

## ПУАССОНОВСКОЕ МНОЖЕСТВО ТРЕЩИН В УПРУГОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЕ

С. К. Канаун

(Новосибирск)

Метод эффективного (самосогласованного) поля применяется для решения задачи о случайном множестве взаимодействующих трещин в упругой среде. Разбирается пример построения первого момента решения для среды, содержащей пуассоновское множество плоских эллиптических трещин. Найдены эффективные упругие постоянные среды с трещинами. В плоском случае результаты сравниваются с имеющимися в литературе экспериментальными данными.

В ряде работ по механике упругой неоднородной среды [1-3] самосогласованные решения строились на основании предположения, что каждая типичная неоднородность (зерно поликристалла, включение в композите или трещина) ведет себя как изолированная в однородной среде, свойства которой совпадают с эффективными свойствами всей среды, а поле, в котором находится любая неоднородность, принималось равным внешнему полю. Такую модификацию метода самосогласования называют иногда методом эффективной среды.

Можно предложить другую схему решения, при которой каждая типичная частица (неоднородность) рассматривается как изолированная в основной среде (матрице) с известными свойствами, а наличие окружающих частиц учитывать эффективным внешним полем, в котором эта частица находится. Подобная схема, называемая далее методом эффективного поля, и развивается в данной работе. (Для упругой композитной среды такой подход реализован в [4].)

1. Рассмотрим однородное трехмерное упругое тело, в котором содержится множество произвольно расположенных трещин — разрезов по гладким ориентированным поверхностям, берега которых для простоты будем считать свободными от внешних нагрузок.

В ряде интересных для приложений случаев размеры трещин и расстояния между ними значительно меньше, чем размеры тела и характерный масштаб изменения внешнего поля. Поэтому ниже будет рассматриваться безграничная упругая среда с трещинами, находящаяся в постоянном внешнем поле напряжений, вызванных нагрузками, приложенными на бесконечности.

Известно [5], что адекватной моделью трещины является поверхность, несущая дислокационные моменты плотности  $n_\alpha(x) b_\beta(x)$ , где  $n(x)$  — нормаль к поверхности трещины  $\Omega$ ,  $b(x)$  — вектор скачка перемещений при переходе через  $\Omega$  ( $x(x_1, x_2, x_3)$  — точка среды).

Аналогично, произвольное множество трещин в однородной среде можно интерпретировать как распределение дислокационных моментов

плотности  $m(x)$  вида

$$(1.1) \quad m(x) = \sum_k m^{(k)}(x), \quad m_{\alpha\beta}^{(k)}(x) = n_{\alpha}^{(k)}(x) b_{\beta}^{(k)}(x) \Omega_k(x)$$

Здесь  $n^{(k)}(x)$  — нормаль к поверхности  $k$ -й трещины  $\Omega_k$ ,  $\Omega_k(x)$  — дельта-функция, сосредоточенная на  $\Omega_k$  (определение  $\Omega_k(x)$  см. в [6], где для этой функции используется обозначение  $\delta(\Omega_k)$ ).

Векторы  $b^{(k)}(x)$  — скачки поля перемещений на  $\Omega_k$  — должны определяться из решения упругой задачи для среды с трещинами.

Если  $b^{(k)}(x)$  известны, то, используя результаты континуальной теории дислокаций [6], поля напряжений  $\sigma(x)$  и деформаций  $\varepsilon(x)$  в среде с трещинами можно определять из соотношений

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \sigma^{\alpha\beta}(x) &= \sigma_0^{\alpha\beta} + \int S^{\alpha\beta\lambda\mu}(x-x') m_{\lambda\mu}(x') dx' \\ \varepsilon_{\alpha\beta}(x) &= \varepsilon_0^{\alpha\beta} + \int K_{\alpha\beta\lambda\mu}(x-x') c^{\lambda\mu\nu\rho} m_{\nu\rho}(x') dx' \end{aligned}$$

Здесь  $\sigma_0$  и  $\varepsilon_0$  — соответственно внешние поля напряжений и деформаций,  $\sigma_0^{\alpha\beta} = c^{\alpha\beta\lambda\mu} \varepsilon_{0\lambda\mu}$ ,  $c^{\alpha\beta\lambda\mu}$  — тензор модулей упругости однородной среды,  $m(x)$  имеет вид (1.1).

Ядра интегральных операторов  $S$  и  $K$  в (1.2) выражаются через вторые производные функции Грина  $G(x)$  однородной среды

$$(1.3) \quad \begin{aligned} S^{\alpha\beta\lambda\mu}(x) &= c^{\alpha\beta\nu\rho} K_{\nu\rho\tau\sigma}(x) c^{\tau\sigma\lambda\mu} - c^{\alpha\beta\lambda\mu} \delta(x) \\ K_{\alpha\beta\lambda\mu}(x) &= -[\nabla_{\alpha} \nabla_{\lambda} G_{\beta\mu}(x)]_{(\alpha\beta)(\lambda\mu)} \end{aligned}$$

Здесь  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака,  $\nabla$  — операция градиента в  $\mathbb{R}^3$  — трехмерном евклидовом пространстве.

Из (1.3) следует, что  $S(x)$  и  $K(x)$  — однородные обобщенные функции степени  $-3$ .

Рассмотрим свойства операторов  $S$  и  $K$  в (1.2). Эти операторы являются операторами свертки с обобщенными функциями  $S(x)$  и  $K(x)$ . На функциях класса  $S(\mathbb{R}^3)$  (при  $|x| \rightarrow \infty$  убывающих быстрее, чем любая степень  $|x|$ )  $S$  и  $K$  допускают регулярные представления [7] ( $\varphi \in S(\mathbb{R}^3)$ )

$$(1.4) \quad \int S(x-x') \varphi(x') dx' = \int S(x-x') \varphi(x') dx' + D\varphi(x)$$

$$(1.5) \quad \int K(x-x') c\varphi(x') dx' = \int K(x-x') c\varphi(x') dx' + A c\varphi(x)$$

Здесь интегралы справа понимаются в смысле главного значения по Коши и существуют, постоянные тензоры  $D$  и  $A$  выражаются через преобразования Фурье  $S(k)$  и  $K(k)$  функций  $S(x)$  и  $K(x)$  по формулам

$$(1.6) \quad D = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_1} S(k) d\Omega, \quad A = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_1} K(k) d\Omega$$

где  $\Omega_1$  — поверхность единичной сферы в  $k$ -пространстве преобразований Фурье.

Определим теперь результат действия операторов  $S$  и  $K$  на постоянную  $m_0$ . Соответствующие интегралы формально расходятся в нуле и на бесконечности. Отметим, что интегралы

$$\int S(x-x') m_0 dx', \quad \int K(x-x') c m_0 dx'$$

имеют смысл, соответственно, поля внутренних напряжений и деформаций в однородной среде, содержащей дислокационные моменты постоянной плотности  $m_0$ . Если деформация среды не стеснена на бесконечности, то такое распределение дислокаций не приведет к появлению внутренних напряжений, но вызовет постоянную дополнительную («пластическую») деформацию среды, величина которой равна  $m_0$ . Следовательно, в этом случае

$$(1.7) \quad \int S(x-x') m_0 dx' = 0, \quad \int K(x-x') c m_0 dx' = m_0$$

Если же деформация среды стеснена на бесконечности, то результат, очевидно, будет иным. Однозначного естественного определения операторов  $S$  и  $K$  на постоянных не существует и значение соответствующих интегралов определяется тем смыслом, который они имеют в конкретной задаче.

В дальнейшем для определенности, предполагая, что деформации не стеснены на бесконечности, будем использовать соотношения (1.7).

Ниже будут рассматриваться только однородные случайные множества трещин в пространстве. При этом плотность  $m(x)$  в (1.2) также будет однородным обобщенным случайным полем.

Можно показать, что соотношений (1.4) — (1.7) достаточно для определения операторов  $S$  и  $K$  на гладких однородных случайных функциях. На реализации случайного поля  $m(x)$  эти операторы продолжаются по непрерывности.

2. Зафиксируем одну из типичных реализаций однородного в пространстве случайного множества трещин и рассмотрим произвольную трещину с номером  $i$ . Если определенные соотношением (1.1) функции  $m^{(k)}(x)$ , соответствующие данной реализации, известны, то поле  $\bar{\sigma}_i(x)$ , в котором находится  $i$ -я трещина, на основании первого соотношения (1.2) представляется в форме

$$(2.1) \quad \bar{\sigma}_i(x) = \sigma_0 + \sum_{k \neq i} \int S(x-x') m^{(k)}(x') dx', \quad x \in \Omega_i,$$

Определенное этим соотношением в точках поверхности  $\Omega_i$  поле  $\bar{\sigma}_i(x)$  можно рассматривать как внешнее поле для  $i$ -й трещины, в котором она ведет себя как изолированная.

Предположим, что решение упругой задачи для изолированной трещины в произвольном внешнем поле  $\bar{\sigma}_k(x)$  известно. Это значит, что известен явный вид зависимости  $m^{(k)}(x, \bar{\sigma}_k)$ . Тогда система уравнений, которой удовлетворяют поля  $\bar{\sigma}_i(x)$  для каждой из взаимодействующих трещин, следует из (2.1) и имеет вид

$$(2.2) \quad \bar{\sigma}_i(x) = \sigma_0 + \sum_{k \neq i} \int S(x-x') m^{(k)}(x, \bar{\sigma}_k) dx', \quad x \in \Omega_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

Зная решение этой системы, можно из (1.2) найти напряжения и деформации в среде с трещинами. Таким образом, поля  $\bar{\sigma}_i(x)$  могут рассматриваться как основные неизвестные задачи.

Если множество трещин случайное, то  $\bar{\sigma}_i(x)$  — случайные функции. Построение статистических моментов полей  $\bar{\sigma}_i(x)$  сводится к решению задачи о взаимодействии многих трещин и связано с практически непреодолимыми трудностями. Чтобы сделать задачу обозримой, приходится вводить упрощающие предположения относительно структуры случайных полей  $\bar{\sigma}_i(x)$ .

Будем считать, что поле  $\bar{\sigma}_i(x)$  практически постоянно в области  $\Omega_i$ , но, вообще говоря, различно для разных трещин (гипотеза  $H_1$ ). Пусть, кроме того, все трещины являются плоскими эллиптическими в плане.

Из решения задачи об изолированной эллиптической трещине в постоянном внешнем поле напряжений  $\bar{\sigma}_k$  [8] следует, что величины  $m^{(k)}(x, \bar{\sigma}_k)$  в (2.2) определяются соотношениями

$$(2.3) \quad m_{\alpha\beta}^{(k)}(x, \bar{\sigma}_k) = P_{\alpha\beta\lambda\mu}^{(k)}(x) \bar{\sigma}_k^{\lambda\mu} \Omega_k(x), \quad P^{(k)}(x) = P^{(k)} h_k(x)$$

где скалярная функция  $h_k(x)$  определена в точках поверхности  $\Omega_k$  и в системе координат  $x_1, x_2$ , связанных с главными осями трещины, имеет вид

$$h_k(x_1, x_2) = \frac{a_k^2}{b_k} \left( 1 - \frac{x_1^2}{a_k^2} - \frac{x_2^2}{b_k^2} \right)^{1/2}$$

Здесь  $a_k$  и  $b_k$  — полуоси эллипса  $\Omega_k$ ,  $a_k \geq b_k$ .

Постоянный тензор  $P^{(k)}$  в (2.3) представляется в форме

$$(2.4) \quad P_{\alpha\beta\lambda\mu}^{(k)} = n_{(\alpha}^{(k)} T_{\beta)(\lambda}^{(k)} n_{\mu)}^{(k)}$$

где  $T_{\alpha\beta}^{(k)}$  для изотропной среды имеет вид (не суммировать по  $\alpha$ !)

$$T_{\alpha\beta}^{(k)} = \frac{2a_k^2}{b_k} \frac{1-\nu}{\mu} d_\alpha^{-1} \delta_{\alpha\beta}$$

$$d_1 = c_1 + \nu(c_2 - 2c_1), \quad d_2 = c_1 + \nu(c_3 - 2c_1), \quad d_3 = c_1/2$$

$$c_3 = -c_2 + 3c_1$$

$$c_1 = E(\alpha)/1 - \alpha^2, \quad c_2 = c_1 - (E(\alpha) - K(\alpha))/\alpha^2,$$

$$\alpha = 1 - (b_k/a_k)^2$$

Здесь  $\mu$  — модуль сдвига,  $\nu$  — коэффициент Пуассона среды,  $\delta_{\alpha\beta}$  — символ Кронекера,  $E(\alpha)$  и  $K(\alpha)$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Введем следующие обозначения. Пусть  $\Omega$  — множество поверхностей трещин в пространстве,  $\Omega(x)$  — дельта-функция, сосредоточенная на  $\Omega$ . Далее зафиксируем некоторую точку  $x_0 \in \Omega$  и определим область  $\Omega_{x_0}$  соотношением

$$\Omega_{x_0} = \bigcup_{i \neq j} \Omega_i, \quad x_0 \in \Omega_j$$

Дельта-функцию, сосредоточенную на  $\Omega_{x_0}$ , обозначим через  $\Omega(x_0; x)$ .

Пусть  $P(x)$  — произвольное гладкое тензорное поле, совпадающее на поверхностях  $\Omega_k$  с  $P^{(k)}(x)$  (см. (2.3)). Введем поле  $\bar{\sigma}(x)$ , определенное в области  $\Omega$  уравнением

$$(2.5) \quad \bar{\sigma}(x) = \sigma_0 + \int S(x - x') P(x') \bar{\sigma}(x') \Omega(x, x') dx', \quad x \in \Omega$$

Сравнение с (2.2), (2.3) показывает, что при справедливости гипотезы  $H_1$  поле  $\bar{\sigma}(x)$  совпадает с  $\bar{\sigma}_k$  в областях  $\Omega_k$ . Будем называть  $\bar{\sigma}(x)$  эффективным полем для данного множества трещин.

В первом приближении можно считать, что эффективное поле  $\bar{\sigma}(x)$  постоянное и одинаковое для всех трещин (аналогичная идея использована в [9, 10] для решения задачи о распространении волн в среде со случайными неоднородностями). Это предположение, очевидно, будет выполняться, если поле, в котором находится каждая трещина, слабо зависит от конкретной конфигурации множества поверхностей  $\Omega_k$  и определяется средним совокупным полем всех взаимодействующих трещин. При этом, осредняя (2.5) по ансамблю реализаций случайного множества трещин при условии  $x \in \Omega$ , получим

$$(2.6) \quad \bar{\sigma} = \sigma_0 + \int S(x - x') \langle P(x') \Omega(x; x') | x \rangle dx' \bar{\sigma}$$

где учтено, что  $\bar{\sigma} = \text{const}$  при  $x \in \Omega$ , а  $\langle \cdot | x \rangle$  означает осреднение при условии  $x \in \Omega$ .

Задача таким образом сводится к построению среднего и вычислению интеграла в (2.6). Для однородных полей трещин среднее под интегралом — функция разности  $x - x'$ , и, следовательно, интеграл равен некоторой постоянной. Разрешая (2.6) относительно тензора  $\bar{\sigma}$ , получим ( $I$  — единичный тензор четвертого ранга)

$$(2.7) \quad \bar{\sigma}^{\alpha\beta} = \Lambda_{\lambda\mu}^{\alpha\beta} \sigma_0^{\lambda\mu}$$

$$(2.8) \quad \Lambda = [I - \int S(x - x') \langle P(x') \Omega(x; x') | x \rangle dx']^{-1}$$

В рассматриваемом приближении найдем математические ожидания полей напряжений и деформаций в среде с трещинами. Подставляя  $m^{(k)}(x, \bar{\sigma})$  в форме (2.3) в (1.1), а результат — в (1.2) и осредняя полученные выражения для  $\sigma(x)$  и  $\varepsilon(x)$  по ансамблю реализаций множества трещин, имеем

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \langle \sigma(x) \rangle &= \sigma_0 + \int S(x - x') \langle P(x') \Omega(x') \rangle dx' \bar{\sigma} \\ \langle \varepsilon(x) \rangle &= \varepsilon_0 + \int K(x - x') c \langle P(x') \Omega(x') \rangle dx' \bar{\sigma} \end{aligned}$$

Для однородного в пространстве множества трещин среднее  $\langle P(x) \Omega(x) \rangle$  — постоянная величина. Действие операторов  $S$  и  $K$  на постоянных определено соотношениями (1.7), поэтому из (2.9) следует

$$(2.10) \quad \langle \sigma(x) \rangle = \sigma_0, \quad \langle \varepsilon(x) \rangle = \varepsilon_0 + \langle P(x) \Omega(x) \rangle \bar{\sigma}$$

Тензор эффективной податливости среды с трещинами  $B_*$  введем естественным соотношением

$$(2.11) \quad \langle \varepsilon \rangle = B_* \langle \sigma \rangle$$

Отсюда и из (2.10), (2.7) следует равенство ( $\Lambda$  имеет вид (2.8))

$$(2.12) \quad B_* = B + \langle P(x) \Omega(x) \rangle \Lambda, \quad B = c^{-1}$$

Сравним метод эффективного поля с другим методом построения тензора эффективных упругих постоянных — методом эффективной среды [1-3]. Этот метод основан на предположении, что каждая трещина ведет

себя как изолированная в однородной среде, свойства которой совпадают с эффективными свойствами всей среды с трещинами. Внешнее поле для любой трещины предполагается совпадающим с  $\sigma_0$ .

Используя эти предположения, выражения (1.2) для  $\sigma(x)$  и  $\varepsilon(x)$  в случае среды с эллиптическими трещинами преобразуются к виду

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \sigma(x) &= \sigma_0 + \int S(x-x') P_*(x') \Omega(x') dx' \sigma_0 \\ \varepsilon(x) &= \varepsilon_0 + \int K(x-x') c P_*(x') \Omega(x') dx' \sigma_0 \\ P_*(x) \Omega(x) &= \sum_k P_*^{(k)}(x) \Omega_k(x) \end{aligned}$$

Здесь функции  $P_*^{(k)}(x)$  имеют вид, аналогичный указанному в (2.3), но определяются из решения задачи об изолированной эллиптической трещине в однородной среде с тензором упругой податливости  $B_*$ . Уравнение для  $B_*$  получим из условия самосогласования, которое совпадает с (2.11). Осреднив выражения (2.13) для  $\sigma(x)$  и  $\varepsilon(x)$ , действуя затем операторами  $S$  и  $K$  на постоянную  $\langle P_*(x) \Omega(x) \rangle$  и подставляя результат в (2.11), получим

$$(2.14) \quad B_* = B + \langle P_*(x) \Omega(x) \rangle$$

Данное соотношение, связывающее между собой компоненты тензора  $B_*$ , следует рассматривать как уравнение относительно эффективных упругих постоянных среды с трещинами (в правую часть эффективные постоянные входят через тензор  $P_*(x)$ , явное выражение которого предполагается известным).

3. Перейдем к анализу конкретных моделей случайных множеств трещин в пространстве. Свойство эргодичности рассматриваемых случайных функций, которое предполагается в дальнейшем, позволяет заменить средние по ансамблю реализаций средними по объему для фиксированной типичной реализации. Таким образом, например

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \langle P(x) \Omega(x) \rangle &= \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{v} \int_V \sum_{k=1}^N P^{(k)}(x) \Omega_k(x) dx = \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{v} \sum_{k=1}^N \frac{2\pi}{3} a_k^3 P^{(k)} \end{aligned}$$

где  $V$  — область в  $R^3$  с объемом  $v$ , в пределе занимающая все пространство,  $N$  — число трещин, попавших в  $V$ ,  $P^{(k)}(x)$  и  $P^{(k)}$  имеют вид, указанный в (2.3), (2.4).

В ансамбле реализаций случайного поля  $P(x) \Omega(x)$  тензоры  $a_k^3 P^{(k)}$  будут случайными величинами с одной и той же функцией распределения для всех  $k$ . Осреднив обе части (3.1) еще раз по ансамблю реализаций, получим

$$(3.2) \quad \langle P(x) \Omega(x) \rangle = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{N}{v} \left\langle \frac{2\pi}{3} a^3 P(a, b) \right\rangle = \frac{2\pi}{3v_0} \langle a^3 P(a, b) \rangle$$

где  $v_0$  — средний объем, приходящийся на одну трещину. Здесь справа стоит среднее от случайного тензора  $a^3 P(a, b)$ , где  $P(a, b)$  имеет тот же

вид, что и  $P^{(k)}$ . Значение этого среднего определяется распределениями случайных полюсей трещины  $a$  и  $b$  и ее случайной ориентации.

Рассмотрим условное среднее в (2.6), (2.8). По определению условного среднего имеем

$$(3.3) \quad \Psi(x-x') = \langle P(x') \Omega(x; x') | x \rangle = \frac{\langle P(x') \Omega(x; x') \Omega(x) \rangle}{\langle \Omega(x) \rangle}$$

Аналогично (3.1) получим

$$(3.4) \quad \langle \Omega(x) \rangle = \pi \langle ab \rangle / v_0, \quad \Psi(x) = \frac{v_0}{\pi \langle ab \rangle} \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{v} \times \\ \times \int_V P(x-x') \Omega(x'; x'-x) \Omega(x') dx'$$

Рассмотрим примеры стохастических множеств трещин в пространстве.

1°. *Пуассоновское множество трещин.* Пусть в ограниченном объеме  $V$  имеется  $N$  трещин, размеры и ориентация которых — случайные величины с известными функциями распределения. Координаты центров трещин — независимые случайные величины, равномерно распределенные в  $V$ . Устремив  $V$  и  $N$  к бесконечности, так что  $v/N \rightarrow v_0 < \infty$ , получим однородное в пространстве множество трещин, которое будем называть пуассоновским.

В силу некоррелированности положения центров трещин в пуассоновском множестве имеем

$$(3.5) \quad \langle P(x') \Omega(x; x') \Omega(x) \rangle = \langle P(x') \Omega(x; x') \rangle \langle \Omega(x) \rangle$$

где аналогично (3.1)

$$(3.6) \quad \langle P(x') \Omega(x; x') \rangle = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{v} \sum_{k=1}^N \frac{2\pi}{3} a_k^3 P^{(k)} = \frac{2\pi}{3v_0} \langle a^3 P(a, b) \rangle$$

Здесь штрих над знаком суммы означает пропуск слагаемого  $\frac{2\pi}{3} a_i^3 P^{(i)}$  при  $x \in \Omega_i$ , что следует из определения функции  $\Omega(x; x')$ .

Таким образом,  $\Psi(x) = \text{const}$  (вообще говоря, за исключением множества точек  $x$ , имеющего меру нуль). При этом интеграл в (2.6), (2.8) в силу (1.7) исчезает и выражение (2.12) для  $B_*$  принимает вид

$$(3.7) \quad B_* = B + \frac{2\pi}{3v_0} \langle a^3 P(a, b) \rangle$$

где учтено (3.2).

Для круговых трещин случайного радиуса  $a$  в изотропной среде из этого соотношения получаем

$$(3.8) \quad B_* = B - \frac{8}{3} \frac{1-v}{\mu(2-v)} q \left\langle \frac{1}{2} Q^1(n) - v Q^2(n) \right\rangle, \quad q = \frac{\langle a^3 \rangle}{v_0} \\ Q_{\alpha\beta\lambda\mu}^1 = n_\alpha n_\lambda \delta_{\beta\mu} + n_\alpha n_\mu \delta_{\beta\lambda} + n_\beta n_\lambda \delta_{\alpha\mu} + n_\beta n_\mu \delta_{\alpha\lambda}, \quad Q_{\alpha\beta\lambda\mu}^2 = \\ = n_\alpha n_\beta n_\lambda n_\mu$$

Осреднение здесь проводится по случайным ориентациям трещин  $n$  (случайная величина  $a$  предполагается не зависящей от  $n$ ).

При равномерном распределении по ориентациям  $B_*$  — изотропный тензор, а эффективный модуль сдвига  $\mu_*$  и коэффициент Пуассона  $\nu_*$  сре-

ды с трещинами принимают вид

$$(3.9) \quad \mu_* = \mu \left[ 1 + \frac{32}{45} q \frac{(1-\nu)(5-\nu)}{(2-\nu)} \right]^{-1}$$

$$\frac{\nu_*}{1+\nu_*} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\mu_*}{\mu} \left[ 1 + \frac{16}{45} q \frac{1-\nu^2}{2-\nu} \right]$$

2°. *Модель с ограничением на пересечение трещин.* Рассмотрим пуассоновскую модель, дополненную еще одним условием. Пусть вокруг каждой трещины имеется окрестность (например, сферическая), вероятность попадания в которую центров других трещин мала. При этом в случайном множестве трещин реализуется ближний порядок, а функция  $\Psi(x)$ , определенная соотношением (3.3), оказывается равной нулю в некоторой окрестности начала координат (точка  $x=0$ ). При  $|x-x'| \rightarrow \infty$  корреляция в положении трещин исчезает и

$$\Psi(x-x') \rightarrow \frac{2\pi}{3v_0} \langle a^3 P(a, b) \rangle = \Psi_*$$

(величина  $\Psi_*$  равна значению  $\Psi(x)$  для пуассоновского множества трещин (3.6)).

При не слишком большой концентрации трещин в силу изотропии модели  $\Psi(x)$  сферически симметрична  $\Psi(x) = \Psi(|x|)$  и интеграл в (2.6), (2.8) принимает особенно простой вид

$$\int S(x-x') \Psi(x-x') dx' = \int S(x-x') [\Psi(x-x') - \Psi_*] dx' = -D\Psi_*$$

Здесь учтены формулы (1.4), (1.7), тензор  $D$  имеет вид (1.6), интеграл в смысле главного значения, фигурирующий в (1.4), исчезает в силу сферической симметрии  $\Psi(x)$ .

Из (2.12) получаем выражение для  $B_*$  в форме

$$B_* = B + \frac{2\pi}{3v_0} \langle a^3 P(a, b) \rangle \left[ I - \frac{2\pi}{3v_0} D \langle a^3 P(a, b) \rangle \right]^{-1}$$

В случае изотропной среды и равномерном распределении по ориентациям отсюда имеем

$$(3.10) \quad B_* = B + \frac{8}{45} \frac{1-\nu}{\mu(2-\nu)} \frac{q}{(1-\beta_1)} \times$$

$$\times \left[ \frac{2\beta_2(5-\nu) - \nu(1-\beta_1)}{1-\beta_1 - 3\beta_2} I^2 + 2(5-\nu) I^1 \right]$$

$$I_{\alpha\beta\lambda\mu}^1 = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\mu} + \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\lambda}), \quad I_{\alpha\beta\lambda\mu}^2 = \delta_{\alpha\beta} \delta_{\lambda\mu}$$

$$\beta_1 = \frac{32}{675} q \frac{(7-5\nu)(5-\nu)}{(2-\nu)}, \quad \beta_2 = \frac{32}{675} q \left( \frac{5-\nu}{2-\nu} + 10\nu \right)$$

где  $q$  — то же, что и в (3.8).

Предыдущие соотношения получены в предположении, что все трещины раскрываются во внешнем поле напряжений. Однако это выполняется не для всех внешних полей. Часть или даже все трещины могут оказаться закрытыми, и это скажется на значении эффективных упругих постоянных. Способ учета закрытых внешним полем трещин рассматривался в [11].

Рассмотрим теперь выражение для тензора эффективных упругих постоянных, которое дает метод эффективной среды. Уравнение (2.14) с учетом (3.2) представляется в форме

$$(3.11) \quad B_* = B + \frac{2\pi}{3v_0} \langle a^3 P_*(a, b) \rangle$$

где  $P_*$  определяется из решения задачи об эллиптической трещине в среде с тензором упругости  $B_*$ .

Пусть изотропная среда содержит однородное множество круговых трещин, равномерно распределенных по ориентациям. При этом среда макроизотропна, а  $B_*$  принимает вид

$$B_* = B + \frac{2}{3} q P_*, \quad P_* = \frac{4}{15} \frac{1 - \nu_*}{\mu_* (2 - \nu_*)} [\nu_* I^2 - 2(5 - \nu_*) I^1]$$

где величины  $q$ ,  $I^1$ ,  $I^2$  определены в (3.8), (3.10).

Отсюда следуют выражения для эффективных упругих постоянных  $\mu_*$  и  $\nu_*$  среды с трещинами

$$(3.12) \quad \frac{\mu_*}{\mu} = 1 - \frac{32}{45} q \frac{(1 - \nu)(5 - \nu)}{(2 - \nu)}$$

$$q = \frac{45}{16} \frac{(\nu - \nu_*)(2 - \nu_*)}{(1 - \nu_*^2)[10\nu - \nu_*(1 + 3\nu)]}$$

последнее из которых можно рассматривать как уравнение для  $\nu_*$ . Этот результат был получен в [3].

Было отмечено [3], что при  $q \cong \nu/16$  эффективный модуль сдвига  $\mu_*$  в (3.12) становится отрицательным и эти формулы перестают иметь физический смысл. Заметим, что значения  $\mu_*$  и  $\nu_*$ , которые дает метод эффективного поля в случае пуассоновского множества трещин (3.9), всегда положительны. В случае модели с ограничением на пересечение трещин компоненты  $B_*$  (из (3.10)) обращаются в нуль при  $q \cong 2$ , так что и здесь область, в которой метод эффективного поля дает физически не противоречивые результаты, в полтора раза шире. (При малых  $q$  оба метода дают одинаковые значения эффективных упругих постоянных.)

Существенно еще одно обстоятельство. Построение тензора  $P_*$  и решение уравнения (3.11) при произвольной анизотропии тензора  $B_*$  — технически очень сложная задача. Поэтому метод эффективной среды реализуют лишь в ситуациях, когда неоднородная среда макроизотропна. Если же использовать метод эффективного поля, то макроанизотропия среды не создает дополнительных технических трудностей при вычислении  $B_*$ .

4. Рассмотрим теперь плоскую задачу. Формализм метода эффективного поля переносится на плоский случай без каких-либо принципиальных изменений. Поэтому приведем здесь только окончательные выражения для эффективных упругих постоянных (подробно плоская задача изложена в [12]).

Аналогом эллиптической трещины в плоском случае будет прямолинейный разрез. В случае пуассоновского множества прямых трещин случайной длины  $2l$ , равномерно распределенных по ориентациям, среда макроизотропна, а эффективный модуль Юнга  $E_*$  и коэффициент Пуассона  $\nu_*$  имеют вид

$$(4.1) \quad \frac{E_*}{E} = \frac{\nu_*}{\nu} = \frac{1}{1 + q}, \quad q = \frac{\pi \langle l^2 \rangle}{\omega_0}$$

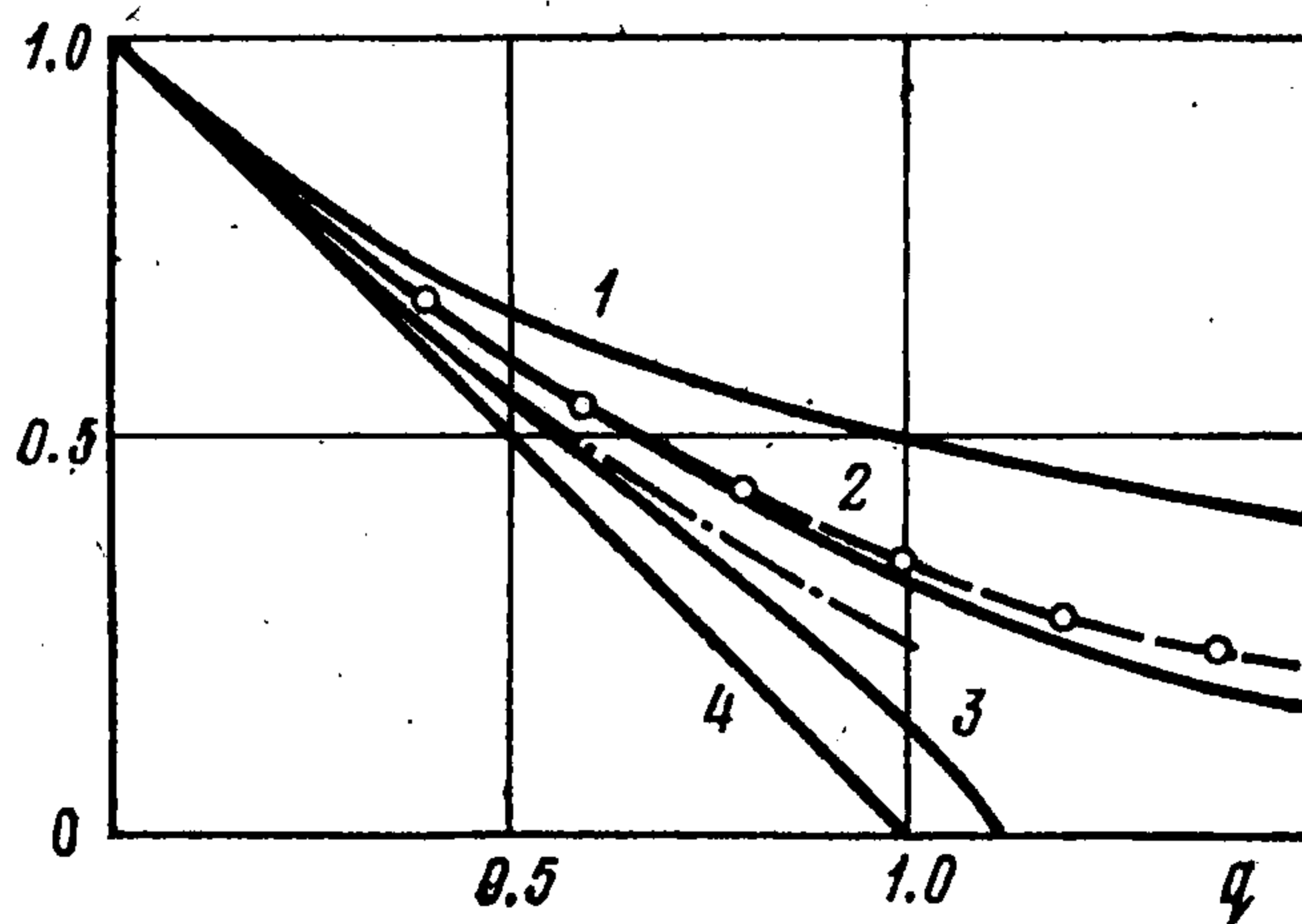
где  $E$  и  $\nu$  — упругие постоянные исходной изотропной среды,  $\omega_0$  — средняя площадь, приходящаяся на одну трещину.

Для модели с ограничением на пересечение трещин при равномерном их распределении по ориентациям эффективные упругие постоянные определяются соотношениями (исходная среда изотропна)

$$(4.2) \quad \frac{E_*}{E} = \left[ 1 + \frac{q(1-3q/8)}{(1-q/2)(1-q/4)} \right]^{-1}$$

$$(4.3) \quad \frac{\nu_*}{\nu} = \frac{E_*}{E} \left[ 1 - \frac{q^2}{8\nu(1-q/2)(1-q/4)} \right]$$

На фигуре зависимости (4.1) (кривая 1), (4.2) (кривая 2) и (4.3) (кривая 3) сравниваются с экспериментальными данными, приведенными в [13]. Эксперименты проводились на тонких листах резины, содержащих



множество прямолинейных сквозных разрезов ( $\nu = 0.5$ ). Результаты экспериментов аппроксимируются штриховой кривой со светлыми точками ( $E_*/E$ ) и штрихпунктирной линией ( $\nu_*/\nu$ ).

Статистический анализ показывает, что множество трещин, которое исследовалось в [13], удовлетворительно описывается моделью с ограничением на пересечение трещин. Полученные для этой модели выражения эффективных упругих постоянных на-

ходятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными.

Отметим, что метод эффективной среды дает в рассматриваемом случае следующие выражения для  $E_*$  и  $\nu_*$ :

$$E_*/E = \nu_*/\nu = 1 - q$$

Этой зависимости соответствует прямая 4 на фигуре.

5. Выше метод эффективного поля применялся для вычисления эффективных упругих постоянных среды с трещинами. Однако возможности метода этим не ограничиваются. В [14] метод эффективного поля использовался для построения двух первых статистических моментов решения задачи о постоянном электрическом токе в среде с большим числом трещин. При этом наряду с гипотезой  $H_1$  о постоянстве эффективного поля для каждой трещины использовалась гипотеза о статистической независимости этого поля в области  $\Omega_k$  от ориентации и размеров трещины  $\Omega_k$  (гипотеза  $H_2$ ). В этих предположениях удается получить замкнутые уравнения для второго статистического момента эффективного поля, а через него выразить второй статистический момент решения. Аналогичным путем могут быть получены вторые моменты решения рассматриваемой здесь задачи теории упругости.

Подчеркнем, что гипотезы, лежащие в основе метода, относятся к аппроксимации состояния каждой трещины в неоднородной среде. С увеличением концентрации трещин данные гипотезы описывают состояние трещин все более грубо. Однако это может слабо сказываться на точности вычисления первого и второго статистических моментов решения — величинах, представляющих наибольший интерес для приложений. Указанные моменты сами являются довольно грубыми статистическими характеристиками, и часть информации о детальном поведении трещин здесь наверняка утеряна. Поэтому точный учет состояния каждой трещины при вычислении первых двух моментов решения едва ли оправдан.

Как показывают результаты данной работы и работ [4, 12], метод эффективного поля позволяет удовлетворительно описать результаты экспериментального измерения эффективных упругих постоянных, а также дает хорошее совпадение с точными значениями этих постоянных в случае регулярных решеток включений и трещин на плоскости.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kröner E. Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus Konstanten des Einkristall. Z. Phys., 1958, Bd 151, H. 4.
  2. Hill R. A self-consistent mechanic of composite materials. J. Mech. and Phys. Solids, 1965, vol. 13, No. 4.
  3. Budjanski B., O'Connell R. J. Elastic moduli of a cracked solid. Internat. J. Solid. and Struct., 1976, vol. 12, No. 2.
  4. Канаун С. К. О приближении самосогласованного поля для упругой композитной среды. ПМТФ, 1977, № 2.
  5. Булби Б., Эшелби Дж. Дислокации и теория разрушения. В сб.: Разрушение, т. 1. М., «Мир», 1973.
  6. Кунин И. А. Теория дислокаций. Дополнение к книге Я. А. Схоутена «Тензорный анализ для физиков». М., «Наука», 1965.
  7. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М., «Наука», 1973.
  8. Kassier M. K., Sih G. C. Three-dimensional stress distribution around an elliptical crack under arbitrary loadings. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1966, vol. 33, No. 3.
  9. Чабан И. А. Метод самосогласованного поля в применении к расчету эффективных параметров микронеоднородных сред. Акуст. ж., 1964, т. 10, вып. 3.
  10. Чекин Б. С. Об эффективных параметрах упругой среды со случайно распределенными трещинами. Изв. АН СССР. Физика Земли, 1970, № 10.
  11. Канаун С. К. Случайное поле трещин в упругой сплошной среде. В сб.: Исследования по упругости и пластичности, вып. 10. Изд-во Ленингр. ун-та, 1974.
  12. Канаун С. К., Яблокова Г. И. Приближение самосогласованного поля в плоской задаче для систем взаимодействующих трещин. В сб.: Механика стержневых систем и сплошных сред, вып. 9, ЛИСИ, 1976.
  13. Вавакин А. С., Салганик Р. Л. Об эффективных характеристиках неоднородных сред с изолированными неоднородностями. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3.
  14. Канаун С. К. Постоянный электрический ток в среде с большим числом трещин. ПМТФ, 1979, № 4.
-