Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 6, 1980

УДК 539.383

ДАВЛЕНИЕ КРУГОВОГО ШТАМПА НА СОСТАВНОЙ СЛОЙ

А. И. Соловьев

(Харьков)

Методом парных интегральных уравнений получено решение задачи о давлении жесткого кругового штампа на упругий составной слой с цилиндрической поверхностью раздела материалов.

К настоящему времени опубликовано большое количество работ по механике многослойных сред, поверхности раздела слоев которых не пересекаются с внешней границей (см. библиографический указатель [1]. Постановку и методы решения основных граничных задач для таких сред можно найти в монографиях [2, 3].

Значительно меньше исследованы граничные задачи для составных сред, поверхности раздела материалов которых пересекаются с внешней границей. В работах [4, 5] такие среды названы областями с поперечным (вертикальным) залеганием слоев.

Из публикаций, посвященных методам решения контактных задач для поперечнослоистых областей, следует отметить работы [4–11] [1]. Осесимметричные задачи кручения рассматривались в работах [12, 13] и других. Для указанных областей практически не изученными остаются пространственные и, в частности, осесимметричные задачи о давлении штампа, приложенного на части внешней границы.

1. Слой покоится на жестком плоском основании и составлен из областей 1 $(0 \leqslant r' \leqslant a,\ 0 \leqslant z' \leqslant H)$ и 2 $(a \leqslant r' < \infty,\ 0 \leqslant z' \leqslant H)$, занимаемых материалами с различными упругими постоянными ν_1, G_1 и ν_2, G_2. На участке $0 \leqslant r' \leqslant b$, $b \geqslant a$, $z' = H$ приложен гладкий жесткий штамп, ограниченный выпуклой поверхностью вращения. Предполагается, что трение между телами 1 и 2, штампом и слоем, слоем и основанием отсутствует. Вдавливание штампа осуществляется силой, направленной вдоль оси цилиндрического включения. Для простоты принимается, что граница слоя вне штампа свободна от внешних усилий.

Краевые условия рассматриваемой задачи имеют следующий вид:

$$w^{(2)}(r, h) = w_0 + f(r) \quad (\varepsilon \leqslant r \leqslant 1), \quad \sigma_{zz}^{(2)}(r, h) = 0 \quad (1 < r < \infty) \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered} w^{(1)}(r, h) = w_0 + f(r) \quad (0 \leqslant r \leqslant \varepsilon) \\ w^{(i)}(r, 0) = \tau_{rz}^{(i)}(r, 0) = \tau_{rz}^{(i)}(r, h) = \tau_{rz}^{(i)}(\varepsilon, z) = 0 \\ u^{(1)}(\varepsilon, z) = u^{(2)}(\varepsilon, z), \quad \sigma_{rr}^{(1)}(\varepsilon, z) = \sigma_{rr}^{(2)}(\varepsilon, z) \\ r = \frac{r'}{b}, \quad z = \frac{z'}{b}, \quad \varepsilon = \frac{a}{b}, \quad h = \frac{H}{b} \end{gathered} \tag{1.2}$$

---

[1] См. также *Баблоян А. А., Гулканян Н. О.* Плоская контактная задача теории упругости для двух усеченных клиньев. Тезисы докл. Всес. конф. по смешанным задачам механики деформируемого тела, ч. 1. Изд-во Ростовск. ун-та, 1977; *Минасян А. Ф., Тоноян В. С.* Контактная задача для составной полуплоскости с вертикальным конечным разрезом. Тезисы докл. Всес. конф. по смешанным задачам механики деформируемого тела, ч. 2. Изд-во Ростовск. ун-та, 1977.

где $w_0 < 0$ — поступательное перемещение штампа вдоль оси z, $f(r)$ — уравнение поверхности штампа, $i = 1, 2$.

Решение уравнений Ламе для области 1 представим в виде [14]

$$u^{(1)} = \sum_{j=1}^{\infty} (A_j z \operatorname{sh} \lambda_j z + C_j \operatorname{ch} \lambda_j z) J_1(\lambda_j r) + B_0 r +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n^{(1)} \frac{4(1-\nu_1)}{k_n} I_1(k_n r) - B_n^{(1)} r I_0(k_n r) - D_n^{(1)} I_1(k_n r) \right] \cos k_n z$$

$$w^{(1)} = A_0 z + \sum_{j=1}^{\infty} \left(A_j \frac{3-4\nu_1}{\lambda_j} \operatorname{sh} \lambda_j z - A_j z \operatorname{ch} \lambda_j z - C_j \operatorname{sh} \lambda_j z \right) J_0(\lambda_j r) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [B_n^{(1)} r I_1(k_n r) + D_n^{(1)} I_0(k_n r)] \sin k_n z, \quad k_n = \frac{\pi n}{h}$$

Для области 2 в качестве решения уравнений Ламе примем

$$u^{(2)} = \frac{D_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -D_n^{(2)} K_1(k_n r) + B_n^{(2)} \left[r K_0(k_n r) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{4(1-\nu_2)}{k_n} K_1(k_n r) \right] \right\} \cos k_n z -$$

$$- \int_0^{\infty} \{A(\lambda) \operatorname{ch} \lambda z + C(\lambda) [(3-4\nu_2) \operatorname{ch} \lambda z + \lambda z \operatorname{sh} \lambda z]\} J_1(\lambda r) \, d\lambda$$

$$w^{(2)} = - \sum_{n=1}^{\infty} [D_n^{(2)} K_0(k_n r) - B_n^{(2)} r K_1(k_n r)] \sin k_n z +$$

$$+ \int_0^{\infty} [A(\lambda) \operatorname{sh} \lambda z + C(\lambda) \lambda z \operatorname{ch} \lambda z] J_0(\lambda r) \, d\lambda$$

Здесь A_0, B_0, D_0, A_j, C_j, $B_n^{(1)}$, $B_n^{(2)}$, $D_n^{(1)}$, $D_n^{(2)}$ — произвольные постоянные, $A(\lambda)$, $C(\lambda)$ — произвольные функции, $J_n(x)$ — функция Бесселя первого рода, $I_n(x)$, $K_n(x)$ — функции Макдональда, λ_j — положительные корни уравнения $J_1(\lambda\varepsilon) = 0$. Слагаемые с постоянными A_0, B_0, D_0 соответствуют элементарным решениям для конечного цилиндра и слоя, ослабленного цилиндрической полостью. Формальным основанием для включения члена $A_0 z$ в решение служит то обстоятельство, что система функций $J_0(\lambda_j r)$ в данном случае становится полной лишь после введения в нее постоянной. При выборе в качестве λ_j положительных корней уравнения $J_0(\lambda\varepsilon) = 0$ следует положить $A_0 = 0$ [14].

Удовлетворяя условиям (1.2), исключая из полученных равенств $A(\lambda)$, $D_n^{(i)}$ и обозначая $C(\lambda) \operatorname{sh} \lambda h = C^*(\lambda)$, получаем соотношения

$$B_0 = D_0 + \frac{2\nu_2}{h} \int_0^{\infty} \lambda^{-1} C^*(\lambda) J_1(\lambda\varepsilon) \, d\lambda \tag{1.3}$$

$$\frac{G_1(B_0 + A_0\nu_1)}{1-2\nu_1} = -G_2 \left[D_0 + \frac{2\nu_2}{h} \int_0^{\infty} \lambda^{-1} C^*(\lambda) J_1(\lambda\varepsilon) \, d\lambda \right]$$

$$A_0 = \frac{w_0}{h}, \quad A_j \lambda_j h \operatorname{ch} \lambda_j h - (1-2\nu_1) A_j \operatorname{sh} \lambda_j h + C_j \lambda_j \operatorname{sh} \lambda_j h = 0$$

$$\varkappa_1 A_j \cdot \operatorname{sh}\lambda_j h = \frac{\lambda_j a_j}{\varepsilon^2 J_0^2(\lambda_j \varepsilon)}, \quad a_j = \int_0^\varepsilon r f(r) J_0(\lambda_j r)\,\mathrm{d}r$$

$$B_n^{(1)} = \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\left[\frac{K_1(k_n\varepsilon)}{I_1(k_n\varepsilon)} B_n^{(2)} - \frac{2(-1)^n k_n}{I_1(k_n\varepsilon)} \int_0^\infty \frac{\lambda C^*(\lambda) J_1(\lambda\varepsilon)\,\mathrm{d}\lambda}{h(k_n^2+\lambda^2)}\right]$$

$$\frac{(-1)^n B_n^{(2)}}{K_1(k_n\varepsilon)} = \frac{2\varkappa_1 k_n I_1^2(k_n\varepsilon)}{h\Delta(k_n\varepsilon)}\left\{-\frac{2G_1}{\varkappa_1} k_n^2 \sum_{j=1}^\infty \frac{\lambda_j a_j}{J_0(\lambda_j\varepsilon)(k_n^2+\lambda_j^2)^2} + \right.$$

$$+\int_0^\infty\left[\frac{G_1\varkappa_2}{\varkappa_1}\frac{\Delta_1(k_n\varepsilon)}{I_1^2(k_n\varepsilon)}\frac{\lambda}{k_n^2+\lambda^2} + 2G_2\varkappa_2\frac{\lambda}{k_n^2+\lambda^2} + \right.$$

$$\left. + 2G_2\frac{\lambda^3 k_n \varepsilon K_0(k_n\varepsilon)}{(k_n^2+\lambda^2)^2 K_1(k_n\varepsilon)}\right] J_1(\lambda\varepsilon) C^*(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda - 2G_2 \times$$

$$\left. \times \int_0^\infty \frac{\lambda^2 k_n^2 \varepsilon}{(k_n^2+\lambda^2)^2} J_0(\lambda\varepsilon) C^*(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\right\}$$

$$\Delta(k_n\varepsilon) = G_1\varkappa_2 K_1^2(k_n\varepsilon)\,\Delta_1(k_n\varepsilon) - G_2\varkappa_1 I_1^2(k_n\varepsilon)\,\Delta_2(k_n\varepsilon)$$

$$\Delta_1(k_n\varepsilon) = k_n^2\varepsilon^2[I_0^2(k_n\varepsilon) - I_1^2(k_n\varepsilon)] - 2\varkappa_1 I_1^2(k_n\varepsilon)$$

$$\Delta_2(k_n\varepsilon) = k_n^2\varepsilon^2[K_0^2(k_n\varepsilon) - K_1^2(k_n\varepsilon)] - 2\varkappa_2 K_1^2(k_n\varepsilon)$$

$$\varkappa_i = 1 - \nu_i \quad (i = 1, 2)$$

Реализация смешанных условий (1.1) приводит к парным интегральным уравнениям

$$\int_0^\infty C^*(\lambda) J_0(\lambda r)\,\mathrm{d}\lambda = g(r) \quad (\varepsilon \leqslant r \leqslant 1) \tag{1.4}$$

$$\int_0^\infty \frac{C^*(\lambda)}{1-G(\lambda h)} \lambda J_0(\lambda r)\,\mathrm{d}\lambda = F(r) \quad (1 < r < \infty)$$

$$G(\lambda h) = \frac{\lambda h + \operatorname{sh}\lambda h e^{-\lambda h}}{\lambda h + \operatorname{sh}\lambda h \operatorname{ch}\lambda h}, \quad g(r) = -\frac{w_0 + f(r)}{2\varkappa_2}$$

$$F(r) = -\sum_{n=1}^\infty \{P_n K_0(k_n r) + (-1)^n B_n^{(2)}[2K_0(k_n r) - k_n r K_1(k_n r)]\}$$

$$P_n = \frac{k_n}{K_1(k_n\varepsilon)}\left[(-1)^n B_n^{(2)} \varepsilon K_0(k_n\varepsilon) + \frac{4}{h}\int_0^\infty \frac{\lambda^3 C^*(\lambda) J_1(\lambda\varepsilon)\,\mathrm{d}\lambda}{(k_n^2+\lambda^2)^2}\right]$$

Распространим, согласно [3], правую часть первого из уравнений (1.4) на промежуток $0 \leqslant r \leqslant 1$ и положим $C^*(\lambda) = [1 - G(\lambda h)]\,\psi(\lambda)$. Тогда

$$\int_0^\infty \psi(\lambda) J_0(\lambda r)\,\mathrm{d}\lambda = \int_0^\infty G(\lambda h)\psi(\lambda) J_0(\lambda r)\,\mathrm{d}\lambda + g(r) \quad (0 \leqslant r \leqslant 1) \tag{1.5}$$

$$\int_0^\infty \lambda\psi(\lambda) J_0(\lambda r)\,\mathrm{d}\lambda = F(r) \quad (1 < r < \infty)$$

Следуя [7], умножим первое из уравнений (1.5) на $r(t^2 - r^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}r$, проинтегрируем по r в пределах от нуля до t и продифференцируем полученное соотношение по t. Второе уравнение (1.5) умножим на $r(r^2 - t^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}r$

и проинтегрируем по r от t до ∞. Используя затем равенства

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{rJ_0(\lambda r)\,dr}{\sqrt{t^2-r^2}} = \cos\lambda t, \quad \int_t^\infty \frac{rJ_0(\lambda r)\,dr}{\sqrt{r^2-t^2}} = \frac{\cos\lambda t}{\lambda}$$

и формулу обращения для косинус-преобразования Фурье, после некоторых вычислений получим

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty G(uh)\left[\frac{\sin(\lambda+u)}{\lambda+u} + \frac{\sin(\lambda-u)}{\lambda-u}\right]\psi(u)\,du + \tag{1.6}$$

$$+\sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-k_n}}{k_n(k_n^2+\lambda^2)}\left[P_nF_1(\lambda,k_n) + (-1)^n B_n^{(2)}F_2(\lambda,k_n)\right] + r(\lambda)$$

$$F_1(\lambda,k_n) = \lambda\sin\lambda - k_n\cos\lambda$$

$$F_2(\lambda,k_n) = \left(\frac{2\lambda^2}{k_n^2+\lambda^2} - k_n\right)F_1(\lambda,k_n) - \lambda\sin\lambda$$

$$r(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos\lambda t\left[\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{rg(r)\,dr}{\sqrt{t^2-r^2}}\right]dt$$

Подставляя в соотношение (1.6) выражения для P_n и $B_n^{(2)}$, приходим к регулярному интегральному уравнению Фредгольма второго рода, т. е. интегральному уравнению второго рода с непрерывными и квадратично суммируемыми ядром и свободным членом.

2. Рассмотрим более подробно задачу о давлении штампа с плоским основанием. В этом случае

$$C_j = A_j = a_j = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots), \quad r(\lambda) = -\frac{w_0}{\pi\varkappa_2}\frac{\sin\lambda}{\lambda}$$

Положим

$$(-1)^n B_n^{(1)} = \frac{x_n^{(1)}}{k_nI_1(k_n\varepsilon)}, \quad (-1)^n B_n^{(2)} = \frac{x_n^{(2)}}{k_nK_1(k_n\varepsilon)} \tag{2.1}$$

Тогда в силу равенств (1.3)

$$\varkappa_1x_n^{(1)} = \varkappa_2x_n^{(2)} - \frac{2}{h}\varkappa_2k_n^2\int_0^\infty \frac{\lambda[1-G(\lambda h)]\psi(\lambda)}{k_n^2+\lambda^2}J_1(\lambda\varepsilon)\,d\lambda \tag{2.2}$$

$$x_n^{(2)} = \frac{2\varkappa_1k_n^2I_1^2(k_n\varepsilon)K_1^2(k_n\varepsilon)}{h\Delta(k_n\varepsilon)}\int_0^\infty\left\{\frac{G_1\varkappa_2}{\varkappa_1}\frac{\Delta_1(k_n\varepsilon)}{I_1^2(k_n\varepsilon)} + 2G_2\varkappa_2 + \right.$$

$$\left.+2G_2\frac{k_n\varepsilon K_0(k_n\varepsilon)\lambda^2}{K_1(k_n\varepsilon)(k_n^2+\lambda^2)}\right]J_1(\lambda\varepsilon) - 2G_2\frac{k_n^2\lambda\varepsilon}{k_n^2+\lambda^2}J_0(\lambda\varepsilon)\Bigg\}\times$$

$$\times\frac{\lambda[1-G(\lambda h)]}{k_n^2+\lambda^2}\psi(\lambda)\,d\lambda$$

С учетом проведенных замен (2.1) имеем следующие выражения для контактных напряжений под штампом:

$$\frac{\sigma_{zz}^{(1)}(r,h)}{2G_1} = \frac{2\nu_1B_0 + (1-\nu_1)A_0}{1-2\nu_1} + \sum_{n=1}^\infty \frac{x_n^{(1)}}{k_n}S_1(k_n,r) \tag{2.3}$$

$$\frac{\sigma_{zz}^{(2)}(r,h)}{2G_2} = -\int_0^\infty \lambda\psi(\lambda) J_0(\lambda r)\,d\lambda + \sum_{n=1}^\infty \frac{x_n^{(2)}}{k_n} S_2(k_n, r) - \tag{2.4}$$

$$-\frac{4}{h}\sum_{n=1}^\infty \frac{k_n K_0(k_n r)}{K_1(k_n\varepsilon)} \int_0^\infty \frac{\lambda^3[1-G(\lambda h)]\psi(\lambda)}{(k_n^2+\lambda^2)^2} J_1(\lambda\varepsilon)\,d\lambda$$

$$S_1(k_n, r) = \frac{k_n[rI_1(k_n r) I_1(k_n\varepsilon) - \varepsilon I_0(k_n r) I_2(k_n\varepsilon)]}{I_1^2(k_n\varepsilon)}$$

$$S_2(k_n, r) = \frac{k_n[rK_1(k_n r) K_1(k_n\varepsilon) - \varepsilon K_0(k_n r) K_2(k_n\varepsilon)]}{K_1^2(k_n\varepsilon)}$$

Равенство (2.4) после некоторых преобразований можно записать в виде

$$\frac{\sigma_{zz}^{(2)}(r,h)}{2G_2} = \frac{\gamma}{\sqrt{t^2-r^2}} - \frac{2}{\pi}\int_r^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2-r^2}} \int_0^\infty uG(uh)\psi(u)\sin ut\,du - \tag{2.5}$$

$$-\int_r^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2-r^2}} \sum_{n=1}^\infty \left[P_n + \frac{x_n^{(2)}}{k_n K_1(k_n\varepsilon)}(2-k_n t)\right] e^{-k_n t}$$

$$\gamma = \frac{w_0}{\pi\varkappa_2} - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty G(uh)\psi(u)\cos u\,du -$$

$$-\sum_{n=1}^\infty \left[P_n + \frac{x_n^{(2)}}{k_n K_1(k_n\varepsilon)}(1-k_n)\right]\frac{e^{-k_n}}{k_n}$$

Оба интеграла в первом из равенств (2.5) исчезают при $r \to 1$ и, следовательно,

$$\sigma_{zz}^{(2)}(r,h) \sim \frac{2G_2\gamma}{\sqrt{1-r^2}} \quad (r \to 1)$$

Очевидно, что затруднения при исследовании сходимости входящих в выражения для $\sigma_{zz}^{(1)}(r,h)$, $\sigma_{zz}^{(2)}(r,h)$ рядов возникают лишь в непосредственной близости к линии $r=\varepsilon$ и на самой линии $r=\varepsilon$. Исходя из интегрального уравнения относительно искомой функции можно убедиться, что

$$\int_0^\infty \frac{\lambda[1-G(\lambda h)]\psi(\lambda)}{k_n^2+\lambda^2} J_1(\lambda\varepsilon)\,d\lambda = \frac{\pi}{2} k_n^{-1} e^{-k_n} I_1(k_n\varepsilon)\left\{-\frac{w_0}{\pi\varkappa_2} -\right.$$

$$-\frac{2}{\pi}k_n\int_0^\infty \frac{uG(uh)\psi(u)\sin u}{k_n^2+u^2}\,du + \frac{2}{\pi}k_n^2\int_0^\infty \frac{G(uh)\psi(u)\cos u}{k_n^2+u^2}\,du +$$

$$\left.+k_n\sum_{m=1}^\infty \frac{e^{-k_m}P_m}{k_m(k_m+k_n)} - k_n\sum_{m=1}^\infty \frac{e^{-k_m}[k_m(k_m+k_n)-k_n]\,x_m^{(2)}}{k_m^2 K_1(k_m\varepsilon)(k_m+k_n)^2}\right\}$$

и поэтому

$$\int_0^\infty \frac{\lambda[1-G(\lambda h)]\psi(\lambda)}{k_n^2+\lambda^2} J_2(\lambda\varepsilon)\,d\lambda \sim -\frac{\pi}{2}\gamma k_n^{-1} e^{-k_n} I_1(k_n\varepsilon) \quad (n\to\infty)$$

Аналогично доказывается справедливость следующих асимптотических равенств:

$$\int_0^\infty \frac{\lambda^3[1-G(\lambda h)]\psi(\lambda)}{(k_n^2+\lambda^2)^2} J_1(\lambda\varepsilon)\,d\lambda \sim \frac{\pi}{4}\gamma e^{-k_n}[I_1(a_n\varepsilon)-\varepsilon I_0(k_n\varepsilon)]$$

$$\int_0^\infty \frac{\lambda^2[1-G(\lambda h)]\psi(\lambda)}{(k_n^2+\lambda^2)^2} J_0(\lambda\varepsilon)\,d\lambda \sim \frac{\pi}{4}\gamma k_n^{-1}e^{-k_n}[eI_1(k_n\varepsilon)-I_0(k_n\varepsilon)]$$

Выделение в равенствах (2.2) главных частей интегралов показывает, что

$$\frac{x_n^{(1)}}{\varkappa_2},\ \frac{x_n^{(2)}}{\varkappa_1} \sim \frac{\pi G_2\gamma(1-\varepsilon)}{h(G_1\varkappa_2+G_2\varkappa_1)} k_n^2 e^{-k_n}[I_0(k_n\varepsilon)+I_1(k_n\varepsilon)] \quad (n\to\infty)$$

Следовательно, сходимость каждого из рядов в равенствах (2.3), (2.4) характеризуется экспоненциально убывающим общим членом, что влечет за собой ограниченность контактных напряжений под штампом как в окрестности линии $r=\varepsilon$, так и при $r=\varepsilon$. Последнее верно и для напряжений $\sigma_{zz}^{(1)}(r, 0)$, $\sigma_{zz}^{(2)}(r, 0)$.

Полагая $G_1=0$, $\nu_1=0$, что соответствует контактной задаче для ослабленного цилиндрической полостью слоя, имеем, как и выше, регулярное интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\psi(\lambda)=\int_0^\infty K(\lambda,u)\psi(u)\,du-\frac{w_0}{\pi\varkappa_2}\frac{\sin\lambda}{\lambda} \tag{2.6}$$

$$K(\lambda,u)=\frac{1}{\pi}G(uh)\left[\frac{\sin(\lambda+u)}{\lambda+u}+\frac{\sin(\lambda-u)}{\lambda-u}\right]-$$

$$-\frac{4}{h}\sum_{n=1}^\infty \frac{[1-G(uh)]e^{-k_n}}{\Delta_2(k_n\varepsilon)(k_n^2+\lambda^2)}[F_1(\lambda,k_n)H_1(u,k_n)+F_2(\lambda,k_n)H_2(u,k_n)]$$

$$H_1(u,k_n)=\left[\frac{u^3(k_n^2\varepsilon^2+2\varkappa_2)K_1(k_n\varepsilon)}{(k_n^2+u^2)^2}+\frac{\varkappa_2k_n\varepsilon uK_0(k_n\varepsilon)}{k_n^2+u^2}\right]J_1(u\varepsilon)-$$

$$-\frac{u^2k_n^3\varepsilon^2K_1(k_n\varepsilon)}{(k_n^2+u^2)^2}J_0(u\varepsilon)$$

$$H_2(u,k_n)=\left[\frac{\varkappa_2uK_1(k_n\varepsilon)}{k_n^2+u^2}+\frac{u^3k_n\varepsilon K_0(k_n\varepsilon)}{(k_n^2+u^2)^2}\right]J_1(u\varepsilon)-$$

$$-\frac{u^2k_n^2\varepsilon K_1(k_n\varepsilon)}{(k_n^2+u^2)^2}I_0(u\varepsilon)$$

Заметим, что $F(r)\to 0$ при $a\to 0$ $(\varepsilon\to 0)$ и уравнение (2.6) переходит в интегральное уравнение контактной задачи для сплошного однородного слоя

$$\psi(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty G(uh)\left[\frac{\sin(\lambda+u)}{\lambda+u}+\frac{\sin(\lambda-u)}{\lambda-u}\right]\psi(u)\,du-\frac{w_0}{\pi\varkappa_2}\frac{\sin\lambda}{\lambda} \tag{2.7}$$

Уравнению (2.7) соответствует и случай $b\to\infty$ $(b\gg a)$.

Решение полученных уравнений сопровождается обычными вычислительными проблемами при малых значениях $h = H/b$ [15], и в этом смысле требуются дополнительные далеко не тривиальные исследования. В данном случае более детальный анализ свойств решений уравнений необходим и при достаточно больших h.

В качестве примера рассмотрим интегральное уравнение (2.6); сказанное ниже будет относиться и к случаю интегрального уравнения исходной задачи. Можно убедиться, что вычислительные проблемы, возникающие в процессе решения уравнений (2.6), (2.7) и интегрального уравнения первого рода контактной задачи для слоя [15], при малых h аналогичны. Метод решения уравнения типа (2.7) при больших h изложен в работе [16].

Обозначим через $K_1(\lambda, u)$ и $K_2(\lambda, u)$ соответственно первое и второе слагаемые ядра $K(\lambda, u)$ уравнения (2.6). Пусть $C[0, \infty)$ — пространство непрерывных и ограниченных на полуоси функций с нормой

$$\| y(\lambda) \| = \sup_{(\lambda)} | y(\lambda) | \quad (0 \leqslant \lambda < \infty)$$

Лемма. При любом $x(\lambda) \in L_2(0, \infty)$ и $h > 0$ функция

$$y(\lambda) = \int_0^\infty K(\lambda, u)\, x(u)\, \mathrm{du}$$

принадлежит пространству $C[0, \infty)$.

Справедливость леммы вытекает из неравенства Коши — Буняковского, непрерывности и ограниченности функции $K(\lambda, u)$ и оценок

$$\left| \frac{e^{-k_n}}{k_n^2 + \lambda^2} F_1(\lambda, k_n) \right| = \left| \int_1^\infty e^{-k_n t} \cos \lambda t \mathrm{dt} \right| \leqslant k_n^{-1} e^{-k_n} \tag{2.8}$$

$$\left| \frac{e^{-k_n}}{k_n^2 + \lambda^2} F_2(\lambda, k_n) \right| = \left| \int_1^\infty (k_n t - 1)\, e^{-k_n t} \cos \lambda t \, \mathrm{dt} \right| <$$

$$< k_n^{-1}(k_n + 2)\, e^{-k_n}$$

$$|K_1(\lambda, u)| \leqslant \frac{2}{\pi} G(uh) \quad (0 \leqslant \lambda, u < \infty)$$

$$| K_2(\lambda, u) | < d_1 u^{-1} \, | J_1(u\varepsilon) | + d_2 u^{-2} \, | J_0(u\varepsilon) |$$

$$(0 \leqslant \lambda < \infty, \; u \geqslant u_0 > 0, \; d_i > 0, \; d_i = \mathrm{const})$$

Из леммы в силу принадлежности свободного члена уравнения (2.6) пространству $C[0, \infty)$ следует, что решениями уравнения (2.6) могут быть только функции пространства $C[0, \infty)$.

Теорема 1. Оператор Kx, определенный при $h > 0$ равенством

$$Kx = \int_0^\infty K(\lambda, u)\, x(u)\, \mathrm{du}$$

вполне непрерывен из $C[0, \infty)$ в $C[0, \infty)$.

Справедливость теоремы 1 может быть установлена с помощью утверждения леммы, оценок (2.8) и теоремы Арцела.

Теорема 2. Интегральное уравнение (2.6) при любом $h > 0$ имеет единственное решение, принадлежащее пространству $C[0, \infty)$.

Доказательство теоремы 2 с учетом леммы и теоремы 1 аналогично приведенному в работе [16].

Совершая замену $w^{(i)} \to -w^{(i)}$, $z \to h - z$ в исходных выражениях для компонент вектора смещений и используя равенство [14]

$$\lim_{\alpha\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{n}{\alpha}\right) = \int_0^\infty f(s)\,ds$$

от уравнения (2.6) переходим при $h \to \infty$ к интегральному уравнению

$$\psi_\infty(\lambda) = \int_0^\infty k(\lambda, u)\,\psi_\infty(u)\,du + \frac{w_0}{\pi\varkappa_2}\frac{\sin\lambda}{\lambda} \quad (w_0 > 0) \tag{2.9}$$

$$k(\lambda, u) = -\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\Delta_2(s\varepsilon)(s^2+\lambda^2)}\,[F_1(\lambda, s)\,H_1(u, s) + F_2(\lambda, s)\,H_2(u, s)]\,ds$$

Функции $F_i(\lambda, s)$, $H_i(u, s)$, $\Delta_2(s\varepsilon)$ получены заменой $k_n \to S$ в приведенных выше выражениях для $F_i(\lambda, k_n)$, $H_i(u, k_n)$, $\Delta_2(k_n\varepsilon)$.

Уравнение (2.9) получается и при решении задачи для полупространства с цилиндрической полостью как исходной.

С помощью оценок, аналогичных (2.8), и неравенств

$$\left|\frac{e^{-s}}{s^2+\lambda^2}F_1(\lambda, s)\right| < \frac{2e^{-s}}{\lambda}, \quad \left|\frac{e^{-s}}{s^2+\lambda^2}F_2(\lambda, s)\right| < \frac{2(s+2)}{\lambda}e^{-s} \quad (s > 0,\ \lambda \geqslant \lambda_0 > 0)$$

можно показать, что ядро $k(\lambda, u)$ интегрируемо с квадратом и является непрерывной в области $0 \leqslant \lambda$, $u < \infty$ функцией. Таким образом, уравнение (2.9) — регулярное интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Для него справедливы утверждения, аналогичные приведенным выше.

Обозначим через $\psi_h(\lambda)$ решение уравнения (2.6), соответствующее определенному значению параметра h.

Теорема 3. $\psi_h(\lambda) \div \psi_\infty(\lambda)$ при $h \to \infty$ равномерно относительно λ.

Справедливость теоремы 3 вытекает из полной непрерывности оператора Kx, полноты пространства $C[0, \infty)$ и единственности решений интегральных уравнений (2.6), (2.9).

Приведенные здесь утверждения не исчерпывают вопрос о структуре решений интегральных уравнений. Это относится, в частности, к возможности получения практически удобной аналитической оценки скорости сходимости $\psi_h(\lambda)$ к $\psi_\infty(\lambda)$ в зависимости от h. Известно [17, 18], что задача такого рода сложна даже в том случае, когда интегральное уравнение задано на конечном промежутке и ядро его представляется в явном виде. Тем не менее вопросы, связанные с возможностью замены решения задачи для составного слоя (слоя с полостью) решением для составного полупространства (полупространства с полостью) или выбора последнего в качестве начального приближения при достаточно больших h, могут быть решены в результате численного эксперимента. Естественно, при этом необходимо преодолеть известные трудности суммирования встречающихся здесь рядов при достаточно больших h.

Отметим еще одно обстоятельство, связанное теперь с корректностью контактной задачи для составного полупространства. При условиях $\tau_{rz}^{(i)}(\varepsilon, z) = 0$ и отсутствии напряжений на бесконечности решение указанной задачи будет корректным, если напряжения $\sigma_{zz}^{(1)}(r,0)$ самоуравновешены. В данном случае действительно

$$\sigma_{zz}^{(1)}(r,z)=2G_1\lim_{h\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n k_n^{-1}S_1(k_n,r)\cos k_n z\to 0\quad(z\to\infty)$$

$$\iint\limits_{r\leqslant\varepsilon}\sigma_{zz}^{(1)}(r,z)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=0\quad(0\leqslant z<\infty)$$

Автор признателен В. С. Проценко за постоянное внимание к работе.

Поступила 29 X 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колчин Г. Б., Фаверман Э. А.* Теория упругости неоднородных тел. Кишинев, «Штиинца», 1972.
2. *Никишин В. С., Шапиро Г. С.* Задачи теории упругости для многослойных сред. М., «Наука», 1973.
3. *Шевляков Ю. А.* Матричные алгоритмы в теории упругости неоднородных сред. Киев — Одесса, «Вища школа», 1977.
4. *Кремер М. И., Нуллер Б. М.* Контактные задачи для неоднородной упругой полосы. Изв. Всес. н.-и. ин-та гидротехники, 1975, т. 109.
5. *Глаговский В. Б., Нуллер Б. М., Шифрин Г. М.* О расчете балок переменной жесткости на вертикально-слоистой упругой полосе, полуполосе или прямоугольнике. Изв. Всес. н.-и. ин-та гидротехники, 1979, т. 129.
6. *Арутюнян Н. Х., Баблоян А. А., Тоноян В. С.* Контактные задачи для составной полуплоскости. Тезисы докл. IV Всес. конф. по прочности и пластичности. М., «Наука», 1967.
7. *Тоноян В. С.* О решении симметричной контактной задачи для полуплоскости с включением. Изв. АН АрмССР. Механика, 1968, т. 21, вып. 3.
8. *Боговой В. Г., Нуллер Б. М.* Давление плоского кругового штампа на упругое полупространство с выемкой или включением. ПММ, 1971, т. 35, вып. 4.
9. *Гирвидов А. Д., Нуллер Б. М.* Движение жесткого штампа на упругую полуплоскость с включением. Изв. Всес. н.- и. ин-та гидротехники, 1971, т. 95.
10. *Нуллер Б. М.* О некоторых обобщениях метода кусочно-однородных решений. Изв. Всес. н.- и. ин-та гидротехники, 1978, т. 120.
11. *Тоноян В. С., Минасян А. Ф.* Об одной контактной задаче для упругой составной полуплоскости. Изв. АН АрмССР. Механика, 1979, т. 32, вып. 3.
12. *Арутюнян Н. Х., Баблоян А. А.* О контактных задачах для полупространства с включением. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6.
13. *Абрамян Б. Л., Арутюнян Н. Х.* О некоторых контактных задачах для составного полупространства. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
14. *Гринченко В. Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев, «Наукова думка», 1978.
15. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., «Наука», 1974.
16. *Ворович И. И., Устинов Ю. А.* О давлении штампа на слой конечной толщины. ПММ, 1959, т. 23, вып. 3.
17. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.— Л., Физматгиз, 1962.
18. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. Киев, «Наукова думка», 1978.