Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 6, 1980

УДК 539.3

К ПОСТРОЕНИЮ И ИССЛЕДОВАНИЮ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ

С. Э. Уманский

(Киев)

Рассматривается несвязанная смешанная краевая задача термовязкоупругости в квазистатической постановке. Распределение температур предполагается нестационарным и неоднородным. Влияние температуры на вязкоупругие свойства материала учитывается введением приведенного времени. Уравнения состояния материала записываются в дифференциальной форме в виде системы кинетических уравнений относительно некоторых параметров деформирования тензорного типа. Указанная система эквивалентна интегральному уравнению Вольтерра с ядром в виде суммы экспонент. Принятый дифференциальный подход, по-видимому, более удобен при численной реализации [1] (особенно в неодномерных задачах) и приводит к существенно иной математической постановке задачи по сравнению с формулировкой, основанной на интегральной форме записи уравнений состояния, исследованной в [2, 3]. Именно при переходе к краевой задаче кинетические дифференциальные уравнения трансформируются в операторное дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве. Устанавливаются существование, единственность и устойчивость решения поставленной задачи, формулируются условия сходимости галеркинских приближений и устойчивости разностных аппроксимаций по времени.

1. Постановка задачи. Рассмотрим несвязанную смешанную квазистатическую краевую задачу термовязкоупругости для тела, подвергаемого нестационарному неоднородному нагреву (охлаждению) и механическому нагружению. Будем считать материал линейно-вязкоупругим и предположим, что для него выполняется принцип температурно- и структурно-временного соответствия, т. е. влияние температурных и структурных изменений на вязкость учитывается путем замены реального времени t на приведенное ξ, определяемое соотношением

$$d\xi = g_T dt \tag{1.1}$$

Здесь g_T — некоторый функционал температурной истории материала. Определяющие уравнения для такого материала имеют вид [2]

$$\boldsymbol{\sigma}(\xi) = \int_0^{\xi} \mathbf{c}(\xi - \xi') \frac{\partial [\boldsymbol{\varepsilon}(\xi') - \boldsymbol{\beta}(\xi')]}{\partial \xi'} d\xi' \tag{1.2}$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\beta}$ — шестимерные вектора, соответствующие симметричным тензорам напряжений, деформации и нестесненных (термических и структурных) деформаций, $\mathbf{c}(t)$ — матрица модулей релаксации, которая в случае изотропного материала имеет вид

$$\mathbf{c}(t) = k(t)\,\mathbf{I}_1 + 2\,G(t)\,\mathbf{I}_2$$

$$I_1 = \frac{1}{3}\left\|\begin{array}{c|c} U^1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right\|, \quad I_2 = \frac{1}{3}\left\|\begin{array}{c|c} U^2 & 0 \\ \hline 0 & U^3 \end{array}\right\|$$

$$U^k = \| U_{ij}{}^k \|, \; k = 1, 2, 3, \; i, j = 1, 2, 3$$

$$U_{ij}{}^1 = 1; \; U_{ii}{}^2 = 2, \; U_{ij}{}^2 = -1, \; i \neq j$$

$$U_{ii}{}^3 = 3, \; U_{ij}{}^3 = 0, \; i \neq j$$

Здесь $k(t)$ и $G(t)$ — соответственно модули объемной и сдвиговой деформации, I_1, I_2 — матрицы размерности 6×6, позволяющие выделить гидростатическую и девиаторную часть произвольного вектора напряженной деформации.

В ряде практически важных случаев ядра релаксации представляются в виде суммы экспонент с отрицательными показателями. В этом случае уравнения состояния материала (1.2) эквивалентны следующим соотношениям:

$$\sigma = \mathbf{D}(\varepsilon - \beta) - \sum_{m=1}^{M} \mathbf{D}_m \varepsilon_m{}^c \tag{1.3}$$

$$(\varepsilon_m{}^c)^{\cdot} = g_T \mathbf{R}_m (\varepsilon - \varepsilon_m{}^c - \beta), \quad m = 1, \ldots, M \tag{1.4}$$

Здесь D — матрица модулей упругости материала: $\varepsilon_m{}^c$ — параметры деформирования (переменные состояния), $\mathbf{D}_m$, $\mathbf{R}_m$ — матрицы: компоненты которых выражаются через коэффициенты экспоненциального разложения ядра уравнения (1.2). В случае изотропного материала

$$\mathbf{D}_m = k_m \mathbf{I}_1 + 2G_m \mathbf{I}_2, \quad \mathbf{R}_m = \rho_m{}^{-1}\mathbf{I}_1 + r_m{}^{-1}\mathbf{I}_2 \tag{1.5}$$

$$\mathbf{D} = k_0 \mathbf{I}_1 + 2\,G_0 \mathbf{I}_2, \quad k(0) = k_0, \quad G(0) = G_0$$

$$\mathbf{D}_\infty = k_\infty \mathbf{I}_1 + 2G_\infty \mathbf{I}_2$$

Здесь k_m, G_m, ρ_m, r_m, k_∞, G_∞ — коэффициенты, определяемые из условия наилучшей аппроксимации релаксационных кривых аналитическими зависимостями

$$G(t) = G_\infty + \sum_{m=1}^{M} G_m \exp\left(-\frac{t}{r_m}\right), \quad k(t) = k_\infty + \sum_{m=1}^{M} k_m \exp\left(-\frac{t}{\rho_m}\right) \tag{1.6}$$

Уравнения состояния, записанные в дифференциальной форме (1.3), (1.4), приводят к существенно иной и, по-видимому: более удобной для численной реализации (см. [1]) постановке краевой задачи по сравнению с исследованной в [2, 3, 4], основанной на интегральном представлении определяющих уравнений. Тем не менее, как указано выше, исходные соотношения (1.3) — (1.5) и (1.2), (1.6) эквивалентны. Действительно, введем в рассмотрение величину $\sigma_m = \mathbf{D}_m(\dot{\varepsilon} - \beta - \varepsilon_m{}^c)$ и преобразуем систему уравнений (1.3), (1.4) к виду

$$\sigma = \sum_m \sigma_m - \left(\mathbf{D} - \sum_m \mathbf{D}_m\right)(\varepsilon - \beta), \quad \dot{\sigma}_m + \mathbf{R}_m \sigma_m = \mathbf{D}_m(\varepsilon^{\cdot} - \beta^{\cdot})$$

откуда и следует (1.2).

В случае анизотропного материала вид матриц $\mathbf{D}$, $\mathbf{c}(t)$, $\mathbf{D}_m$, $\mathbf{R}_m$ определяется характером анизотропии. Для дальнейшего существенно только требование, чтобы матрица $\mathbf{D}$ была симметричной, положительно-определенной, ограниченной и измеримой в рассматриваемой области Ω, $\mathbf{D}_m$ и $\mathbf{R}_m$ — симметричными, неотрицательно-определенными и кусочно-постоянными в Ω, матрица

$$\mathbf{D}_\infty = \mathbf{D} - \sum_{m=1}^{M} \mathbf{D}_m = \lim_{t\to\infty} \mathbf{c}(t) \tag{1.7}$$

положительно-определенной и чтобы существовала симметричная, неотрицательно-определенная матрица $\mathbf{H}_m$, такая, что

$$\mathbf{H}_m\mathbf{R}_m = \mathbf{R}_m\mathbf{H}_m = \mathbf{D}_m \tag{1.8}$$

$$0 < \gamma = \sup_{\Omega} \max_{m} \sup_{\varepsilon_m^c \in R^6} \frac{\{\mathbf{H}_m\varepsilon_m^c,\ \varepsilon_m^c\}}{\{\mathbf{D}\varepsilon_m^c,\ \varepsilon_m^c\}} \tag{1.9}$$

Здесь $\{\ ,\ \}$ — скалярное произведение шестимерных векторов, определяемое как свертка соответствующих им симметричных тензоров второго ранга.

Из сформулированных выше условий следуют также неравенства

$$0 < \tau_2 = \sup_{\Omega} \max_{m} \sup_{\varepsilon_m^c \in R^6} \frac{\{\mathbf{R}_m\varepsilon_m^c,\ \varepsilon_m^c\}}{\{\varepsilon_m^c,\ \varepsilon_m^c\}} \tag{1.10}$$

$$1 \leqslant \alpha = \max\left[1,\ \sum_m \|\mathbf{Q}_m\|_{L_\infty(\Omega)}\right] \tag{1.11}$$

$$\mathbf{Q}_m = \sup_{\varepsilon \in R^6} \frac{\{\mathbf{D}_m\varepsilon,\ \varepsilon\}}{\{\mathbf{D}_\infty\varepsilon,\ \varepsilon\}} \in L_\infty(\Omega)$$

Относительно функции приведения g_T полагаем, что она измерима и ограничена в каждый момент времени t и выполняется неравенство

$$0 < g_0 \leqslant g_1(t) \leqslant \mathrm{vrai}_\Omega \min g_T(t) \leqslant \mathrm{vrai}_\Omega \max g_T(t) \leqslant \leqslant g_2(t) \leqslant g_3 < \infty \tag{1.12}$$

Здесь g_0, g_3 — константы, $g_1(t)$, $g_2(t)$ — непрерывные функции времени, $\mathrm{vrai}_\Omega \min g_T$ и $\mathrm{vrai}_\Omega \mathrm{mag}\, g_T$ — истинные, т. е. взятые без учета изолированных точек и множеств меры нуль, минимум и максимум функции $g_T \in L_\infty(\Omega)$ [5].

Пусть рассматриваемая область $\Omega \in R^3$ ограничена и имеет регулярную границу $\partial\Omega = \partial_1\Omega \vee \partial_2\Omega$, причем на участке $\partial_1\Omega$ заданы однородные граничные условия по перемещениям, на участке $\partial_2\Omega$ приложены поверхностные нагрузки φ и, кроме того, на тело действуют массовые силы $\mathbf{f}$. Считаем, что

$$\varphi \in C^\circ[S,\ (H^\circ(\partial_2\Omega))^3], \quad \mathbf{f} \in C^\circ[S,\ (H^\circ(\Omega))^3]$$

Здесь $S = [0,\ T]$ либо $[0,\ \infty]$ — интервал времени, $C^k[S,\ \Sigma]$ — пространство k раз непрерывно дифференцируемых по времени функций из S в произвольное банахово пространство Σ, $(H^l(\Omega))^n$ — пространство Соболева порядка l над вектор-функциями из $(\Omega \to R^n)$, причем $(X \to Y)$ означает совокупность всех возможных отображений множества X в множество Y.

Считаем, что деформации и перемещения связаны соотношениями Коши

$$\varepsilon_{ij} = {}^1/_2\,(\partial u_j / \partial x_i + \partial u_i / \partial x_j)$$

которые можно записать в операторном виде

(1.13) $\quad \varepsilon = \mathbf{B}\mathbf{u}$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор перемещений, $\mathbf{B}$ — ограниченный линейный оператор, действующий из пространства полей перемещений

$$V = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^3,\ \mathbf{v}\,|_{\partial_1\Omega} = 0\}$$

в гильбертово пространство Y, элементы которого есть векторы деформаций (напряжений), рассматриваемые как векторные функции в Ω со скалярным произведением

(1.14) $$(\varepsilon, \varkappa)_Y = \int\limits_\Omega \{\varepsilon, \varkappa\}\, d\Omega = \int\limits_\Omega \varepsilon_{ij}\varkappa_{ij}\, d\Omega, \quad \forall \varepsilon, \varkappa \in Y$$

Предполагается, что множество V также наделено скалярным произведением

(1.15) $$(\mathbf{w}, \mathbf{v})_V = (\mathbf{B}\mathbf{w}, \mathbf{B}\mathbf{v})_Y = \int\limits_\Omega \{\mathbf{B}\mathbf{w}, \mathbf{B}\mathbf{v}\}\, d\Omega$$
$$\forall \mathbf{w}, \mathbf{v} \in V$$

сообщающим ему структуру гильбертова пространства;

2. **Существование, единственность и свойства обобщенного решения краевой задачи термовязкоупругости.** Вариационное уравнение Лагранжа запишем в виде

(2.1) $$(\sigma, \mathbf{B}\mathbf{v})_Y = \int\limits_{\partial_2\Omega} \varphi_j v_j\, ds + \int\limits_\Omega f_j v_j\, d\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

Обозначим символом Y^* пространство, сопряженное к Y, и отождествим Y и Y^* в соответствии с теоремой Рисса. Определим функцию $\mu \in C\,[S, Y]$ таким образом, что $\mu(t)$ при любом фиксированном t представляет собой продолжение на все пространство $Y^* = Y$ функционала

$$L(\mathbf{B}\mathbf{v}) = \int\limits_{\partial_2\Omega} \varphi_j(t)\, v_j\, ds$$

заданного на множестве значений оператора B в пространстве Y. Тогда интегральное тождество (1.1) запишем в форме операторного уравнения

(2.2) $\quad \mathbf{B}^*\sigma = \mathbf{B}^*\mu + \mathbf{f}$

Здесь $\mathbf{B}^* : Y^* \to V^*$ — оператор, сопряженный с $\mathbf{B}$, V^* — пространство, сопряженное с V.

Подставив (1.3) в (2.2), получим уравнение равновесия в перемещениях

(2.3) $$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} + \mathbf{B}^*\rho, \quad \rho = \mu + \mathbf{D}\beta + \sum_{m=1}^{M} \mathbf{D}_m \varepsilon_m{}^c$$

Здесь $\mathbf{K} = \mathbf{B}^*\mathbf{D}\mathbf{B}$ — эллиптический оператор из V в V^*, соответствующий однородной краевой задаче теории упругости. В силу рефлексивности пространства V оператор $\mathbf{K}$ самосопряжен. Кроме того, как следует из результатов работ [4, 5], он обладает ограниченным обратным $\mathbf{K}^{-1}$ и, следовательно, уравнение (2.3) однозначно разрешимо (при заданных $\varepsilon_m{}^c$) в любой фиксированный момент времени $t \in S$.

Находя u из (2.3) и используя затем (1.13), (1.4), имеем

$$(2.4)\qquad (\varepsilon_m{}^c)^{\cdot} + g_T\mathbf{R}_m\left(\varepsilon_m{}^c - \theta\sum_{k=1}^{M}\mathbf{D}_k\varepsilon_k{}^c\right) = $$
$$= g_T\mathbf{R}_m(\mathbf{BK}^{-1}(f + \mathbf{B}^*\mathbf{D}\beta + \mathbf{B}^*\mu) - \beta),\ m = 1, \ldots, M,\ \beta \in C[S, Y]$$

Здесь $\theta = \mathbf{BK}^{-1}\mathbf{B}^*$ — самосопряженный, неотрицательно-определенный оператор в пространстве Y.

Определим на множестве Y конечный набор скалярных произведений вида

$$(2.5)\qquad (\eta, \varkappa)_m = \int_\Omega \{\mathbf{H}_m\eta, \varkappa\}\, d\Omega = (\mathbf{H}_m\eta, \varkappa)_Y, \quad m = 1, \ldots, M$$

Пространство Y со скалярным произведением (2.5) назовем Y_m, а тождественное отображение $Y \to Y_m$ обозначим i_m и рассмотрим прямую сумму X всех Y_m $(m = 1, \ldots, M)$. Множество $X = Y_1 \oplus Y_2 \oplus \ldots \oplus Y_M$ состоит из всевозможных упорядоченных наборов вектор-функций из Y_m, отождествляемых с соответствующими параметрами состояния.

Пусть $\zeta = (\varepsilon_1{}^c, \ldots, \varepsilon_m{}^c, \ldots, \varepsilon^c{}_M)$ и $\eta_m{}^c$ — произвольные элементы пространств X и Y_m. Определим операторы проектирования $\mathbf{Q}_m : X \to Y_m$ и вложения $\mathbf{L}_m$: $Y_m \to X$ таким образом, чтобы

$$\mathbf{Q}_m\zeta = \varepsilon_m{}^c \in Y_m,\quad \mathbf{L}_m\eta_m{}^c = (0, \ldots, \eta_m{}^c, 0, \ldots, 0) \in X$$

Множество X становится гильбертовым пространством, если задать в нем скалярное произведение с помощью соотношения

$$(2.6)\qquad (\zeta, \chi) = \sum_{m=1}^{M}(\mathbf{Q}_m\zeta, \mathbf{Q}_m\chi) = \sum_{m=1}^{M}(\mathbf{H}_m\mathbf{Q}_m\zeta, \mathbf{Q}_m\chi)_Y$$
$$\forall\zeta, \chi \in X$$

Используя пространство X и систему уравнений (2.4), сведем рассматриваемую задачу термовязкоупругости к задаче Коши для следующего операторного дифференциального уравнения:

$$(2.7)\qquad \zeta^{\cdot} + g_T\Pi\zeta = \psi,\ \zeta \in C^1[S, X],\ \zeta(0) = \zeta_0 \in X$$

Здесь оператор $\Pi : X \to X$ и функция $\psi \in C[S, X]$ в соответствии с (2.4) представлены в виде

$$(2.8)\qquad \Pi = \sum_{m=1}^{M}\mathbf{L}_m\left(\mathbf{R}_m - R_m\theta\sum_{k=j}^{M}\mathbf{D}_k\mathbf{Q}_k\right)$$
$$\psi = \sum_{m=1}^{M} g_T\mathbf{L}_m\mathbf{R}_m(\mathbf{BK}^{-1}(\mathbf{f} + \mathbf{B}^*\mathbf{D}\beta + \mathbf{B}^*\mu) - \beta)$$

Лемма 2.1. Линейный оператор $\Pi : X \to X$ самосопряжен, коэрцитивен и ограничен, причем справедливо неравенство

$$(2.9)\qquad \tau_1\|\zeta\|^2 \leqslant (\Pi\zeta, \zeta) \leqslant \tau_2\|\zeta\|^2$$

где $\tau_1 = 1/(\alpha\gamma)$, τ_2 — положительные константы, определяемые формулами (1.9) — (1.11).

Доказательство. С учетом (2.6), (1.8) и симметричности матрицы $\mathbf{D}_m$ выражение $(\Pi\zeta, \chi)$ имеет вид

$$(\Pi\zeta, \chi) = \sum_{m=1}^{M} (\mathbf{D}_m \mathbf{Q}_m \zeta, \mathbf{Q}_m \chi)_Y - \Big(\sum_{m=1}^{M} \mathbf{D}_m \mathbf{Q}_m \zeta, \theta \sum_{m=1}^{M} \mathbf{D}_m \mathbf{Q}_m \chi \Big)_Y \tag{2.10}$$

Отсюда в силу самосопряженности θ следует самосопряженность оператора Π.

Для доказательства неравенства (2.9) рассмотрим гипотетическое тело, идентичное данному по форме и вязкоупругим свойствам, но свободное от внешних нагрузок, в том числе и термических. Пусть в указанном теле под влиянием, например, химических превращений возникает некоторое непрерывно изменяющееся во времени распределение параметров состояния $\{\varepsilon_m{}^c\}_{m=1}^{M}$, которому соответствует функция

$$\zeta(t) = \sum_{m=1}^{M} \mathbf{L}_m \varepsilon_m^c (t) \in C[S, X]$$

В данном случае

$$\varepsilon = \theta \sum_{k=1}^{M} \mathbf{D}_k \varepsilon_k{}^c, \quad (\Pi\zeta, \zeta) = \sum_{m=1}^{M} (\mathbf{D}_m (\varepsilon_m^c - \varepsilon), \varepsilon_m^c)_Y, \tag{2.11}$$

Скорость изменения дополнительной энергии E' рассматриваемого тела в любой момент времени

$$E'^{\cdot} = (\sigma^{\cdot}, \varepsilon)_Y = \langle \mathbf{B}^* \sigma^{\cdot}, \mathbf{u} \rangle = \langle 0, \mathbf{u} \rangle = 0$$

С другой стороны, с учетом (1.3) и (1.7) имеем

$$E'^{\cdot} = \Big(\mathbf{D}\varepsilon^{\cdot} - \sum_{m=1}^{M} \mathbf{D}_m \varepsilon_m^{c\cdot}, \varepsilon \Big)_Y =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d(\mathbf{D}_\infty \varepsilon, \varepsilon)}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big[\sum_{m=1}^{M} (\mathbf{D}_m (\varepsilon - \varepsilon_m^c), \varepsilon - \varepsilon_m^c)_Y \Big] +$$

$$+ \sum_{m=1}^{M} (\mathbf{D}_m (\varepsilon^{\cdot} - \varepsilon_m^{c\cdot}), \varepsilon_m^c)_Y$$

В силу (2.10), (2.11) последнее слагаемое есть $-(\Pi\zeta^{\cdot}, \zeta) = -{}^1/_2 (\Pi\zeta, \zeta)^{\cdot}$, откуда с учетом того, что $E'^{\cdot} = 0$, получим

$$(\Pi\zeta, \zeta) = \sum_m (\mathbf{D}_m (\varepsilon - \varepsilon_m{}^c), \varepsilon - \varepsilon_m{}^c)_Y + (\mathbf{D}_\infty \varepsilon, \varepsilon)_Y \geqslant 0$$

Используя (1.11), неравенство треугольника, (1.9) и (2.6), имеем

$$(\Pi\zeta, \zeta) \geqslant \alpha^{-1} \Big[\sum_{m=1}^{M} (\mathbf{D}_m (\varepsilon - \varepsilon_m{}^c), \varepsilon - \varepsilon_m{}^c)_Y + \sum_{m=1}^{M} (\mathbf{D}_m \varepsilon, \varepsilon)_Y \Big] \geqslant$$

$$\geqslant \alpha^{-1} \sum_{m=1}^{M} (\mathbf{D}_m \varepsilon_m{}^c, \varepsilon_m{}^c)_Y \geqslant (\alpha\gamma)^{-1} \sum_{m=1}^{M} (\mathbf{H}_m \varepsilon_m{}^c, \varepsilon_m{}^c)_Y = (\alpha\gamma)^{-1} \| \zeta \|^2$$

Из (2.10) при $\chi = \zeta$, учитывая неотрицательную определенность оператора θ и выражения (1.8) — (1.10), получим

$$(\Pi\zeta, \zeta) = \sum_m (\mathbf{D}_m \varepsilon_m{}^c, \varepsilon_m{}^c) - \Big(\sum_m \mathbf{D}_m \varepsilon_m{}^c, \theta \sum_m \mathbf{D}_m \varepsilon_m{}^c \Big)_Y \leqslant$$

$$\leqslant \sum_m (\mathbf{D}_m \varepsilon_m{}^c, \varepsilon_m{}^c)_Y \leqslant \tau_2 \| \zeta \|^2$$

Лемма доказана.

Из леммы 2.1, неравенства (1.12) и общих результатов для операторных дифференциальных уравнений (см., например, [6] следует однозначная разрешимость задачи Коши для уравнения (2.7) и ограниченность решения на полуоси $[0, \infty)$.

Теорема 2.1. Пусть $\zeta(t)$ — решение уравнения (2.7), удовлетворяющее условию $\zeta(0) = \zeta_0$. Тогда для нормы $\|\zeta\|$ справедлива оценка

$$\|\zeta(t)\| \leqslant \|\zeta_0\| \exp\left(-\tau_1 \int_0^t g_1(s)\,ds\right) + \int_0^t \|\psi(p)\| \exp\left(-\tau_1 \int_0^p g_1(s)\,ds\right) dp \tag{2.12}$$

Доказательство. Домножим уравнение (2.7) скалярно на ζ. Учитывая, что $(\zeta^{\cdot}, \zeta) = {}^1/_2 \|\zeta\|^{2\cdot}$, имеем

$$\|\zeta\|\, d\|\zeta\| / dt = (\psi, \zeta) - (g_T \Pi \zeta, \zeta)$$

Используя неравенство Шварца, а также (1.12) и (2.8), получим

$$d\|\zeta\| / dt \leqslant \|\psi\| - g_1(t)\tau_1 \|\zeta\| \tag{2.13}$$

Оценка (2.12) следует из неравенства (2.13) и леммы Грануолла (см., например, [7]).

3. Сходимость галеркинских аппроксимаций. Определим однопараметрические семейства $\{W_h\}$ и $\{Z_h\}$ аппроксимирующих конечно-мерных пространств, размерности которых неограниченно возрастают при условии, что некоторый общий для этих семейств параметр h стремится к нулю. $\{W_h\}$ — последовательность конечно-мерных гильбертовых пространств, каждое из которых изоморфно некоторому замкнутому подпространству $V_h \in V$, причем $\mathbf{P}_h : W_h \to V$ — оператор, устанавливающий упомянутый изоморфизм и являющийся тем самым, оператором вложения W_h в V, $\{Z_h\}$ — последовательность конечно-мерных гильбертовых пространств, таких, что для любого Z_h существует оператор $\mathrm{S}_h : Z_h \to Y$, устанавливающий изоморфизм между Z_h и пространством $Y_h \subset Y$; $\mathbf{P}_h{}^* : V^* \to W_h{}^*$ и $\mathrm{S}_h : Y = Y^* \to Z_h = Z_h$ — соответственно операторы, сопряженные к P_h и S_h и определяемые соотношениями

$$(\mathrm{S}_h{}^*\varepsilon, \varkappa_h)_{Z_h} = (\varepsilon, \mathrm{S}_h\varkappa_h)_Y, \quad \forall \varepsilon \in Y^* = Y, \ \varkappa_h \in Z_h \tag{3.1}$$

$$\langle \mathbf{P}_h{}^* f, \mathbf{w}_h \rangle_h = \langle \mathbf{f}, \mathbf{P}_h \mathbf{w}_h \rangle, \quad \forall \mathbf{f} \in V^*, \ \mathbf{w}_h \in W_h$$

Здесь $\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle$ обозначает действие функционала $\mathbf{f} \in V^*$ на элементе пространства V.

Скалярные произведения в пространствах Z_h и W_h заданы следующим образом:

$$(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)_{Z_h} = (\mathrm{S}_h \mathbf{z}_1, \mathrm{S}_h \mathbf{z}_2)_Y, \quad \forall \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2 \in Z_h \tag{3.2}$$

$$(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)_{W_h} = (\mathbf{P}_h \mathbf{w}_1, \mathbf{P}_h \mathbf{w}_2)_V, \quad \forall \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W_h$$

Предполагается, что

$$\mathbf{B}\mathbf{P}_h \mathbf{w}_h \in Y_h, \quad \forall \mathbf{w}_h \in W_h$$

Тогда корректно определен оператор $\mathbf{B}_h = \mathrm{S}_h{}^* \mathbf{B} \mathbf{P}_h \in (W_h \to Z_h)$.

Установим соответствие между введенными обозначениями и терминологией, принятой в литературе по методу конечных элементов [8], который является вариантом метода Галеркина. В этом случае h — максимальный среди диаметров элементов, на которые разделена исходная область, W_h — множество векторов узловых перемещений, удовлетворяющих кинематическим граничным условиям, Z_h — множество значений деформации в характерных точках элемента (например, в центрах тяжести или других точках взвешивания), оператор P_h определяется при помощи функций формы элемента, оператор $\mathbf{B}_h$ внутри каждого элемента соответствует матрице преобразования узловых перемещений в деформации.

Заметим, что в силу определения скалярных произведений (3.2) операторы

$$\mathbf{K}_h = \mathbf{P}_h{}^*\mathbf{K}\mathbf{P}_h \in (W_h \to W_h{}^*), \quad \theta_h = \mathbf{B}_h\mathbf{K}_h{}^{-1}\mathbf{B}_h{}^* \in (Z_h \to Z_h)$$

сохраняют основные свойства операторов $\mathbf{K}$ и θ соответственно. В частности, они самосопряжены и ограничены, оператор θ_h неотрицательно определен, а $\mathbf{K}_h$ — коэрцитивен и, следовательно, обладает ограниченным обратным $\mathbf{K}_h{}^{-1}$, так что для любых $\mathbf{f} \in V^*$, $\boldsymbol{\rho} \in Y$ однозначно разрешимо аппроксимирующее задачу (2.3) уравнение

$$\mathbf{K}_h\mathbf{u}_h = \mathbf{P}_h\mathbf{f} + \mathbf{B}_h{}^*\mathbf{S}_h\boldsymbol{\rho}, \quad \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{D}\boldsymbol{\beta} + \sum_{m=1}^{M} \mathbf{D}_m\boldsymbol{\varepsilon}_m{}^c \tag{3.3}$$

Соответствующую аппроксимацию назовем сходящейся, если

$$\lim_{h\to 0} \| \mathbf{S}_h\mathbf{B}_h\mathbf{K}_h^{-1}(\mathbf{P}_h{}^*\mathbf{f} + \mathbf{B}_h{}^*\mathbf{S}_h{}^*\boldsymbol{\rho}) - \mathbf{B}\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{f} + \mathbf{B}^*\boldsymbol{\rho}) \|_Y = 0 \tag{3.4}$$

$$\forall \boldsymbol{\rho} \in Y, \quad \mathbf{f} \in V^*$$

$$\lim_{h\to 0} \| \mathbf{S}_h\mathbf{S}_h{}^* - \mathbf{I}_Y \|_Y = 0 \tag{3.5}$$

Выполнение соотношений (3.4), (3.5) обеспечивается выбором семейств $\{W_h\}$ и $\{Z_h\}$. В частности, при использовании метода конечных элементов достаточным условием сходимости является требование однородности базиса [9], которое в случае треугольных элементов сводится к тому, чтобы при измельчении сетки минимальный угол в треугольниках оставался больше некоторой фиксированной константы.

Построим аппроксимирующее конечно-мерное пространство E_h для пространства X. Рассмотрим упорядоченный набор пространств $\{Z_{mh}\}_{m=1}^{M}$, каждое из которых состоит из тех же элементов, что и пространство Z_h, но наделено скалярным произведением вида $(\eta_h, \varkappa_n)_{mh} = (\mathbf{H}_m\eta_h, \varkappa_h)_{zh}$. Определим E_h как их прямую сумму $E_h = Z_{1h} \oplus Z_{2h} \oplus \ldots \oplus Z_{Mh}$. Канонический проектор $\theta_{mh}: E_h \to Z_{mh}$ и оператор канонического вложения $\mathbf{L}_{mh}$: $Z_{mh} \to E_h$ идентичны операторам $\mathbf{L}_m$ и θ_m, введенным в п. 2, а скалярное произведение E_h имеет вид

$$(\zeta_h, \chi_h)_{E_h} = \sum_{m=1}^{M} (\mathbf{H}_m\mathbf{Q}_{mh}\zeta_h, \mathbf{Q}_{mh}\chi_h)_{Z_h}, \quad \forall \zeta_h\chi_h \in E_h \tag{3.6}$$

Пусть $\mathbf{i}_{mh}$ — оператор, задающий тождественное отображение $Z_h \to Z_{mh}$. Тогда оператор

$$\mathbf{J}_h = \sum_{m=1}^{M} \mathbf{L}_m\mathbf{i}_m\mathbf{S}_h\mathbf{i}_{mh}^{-1}\mathbf{Q}_{mh} \in (E_h \to X) \tag{3.7}$$

определяет изоморфизм между E_h и некоторым замкнутым подпространством $X_h \in X$, причем $\| \mathbf{J}_h \zeta_h \|_X = \| \zeta \|_{E_h}$. Обозначим через $\mathbf{J}_h{}^* : X^* = X \to E_h{}^* = E_h$ оператор, сопряженный с $\mathbf{J}_h$ (согласно теореме Рисса, отождествляем $E_h{}^*$ с E_h и X^* с X). Для оператора $\mathbf{I}_h$ имеем $\mathbf{J}_h{}^*\mathbf{J}_h = \mathbf{I}_{E_h}$ и в соответствии с (3.7), (3.5)

(3.8) $$\lim_{n\to 0} \| \mathbf{J}_h \mathbf{J}_h{}^* - \mathbf{I}_X \| = 0$$

Здесь $\mathbf{I}_X$, $\mathbf{I}_{E_h}$ — единичные операторы в соответствующих пространствах.

Определим операторы $\mathbf{\Pi}_h \in (E_h \to E_h)$, $g_{Th} \in C\,[S, (E_h \to E_h)]$ и вектор-функцию $\boldsymbol{\psi}_h \in C\,[S, E_h]$ при помощи соотношений

(3.9) $$\mathbf{\Pi}_h = \sum_{m=1}^{M} \mathbf{L}_{mh} (\mathbf{R}_m - \mathbf{R}_m \theta_h \sum_{k=1}^{M} \mathbf{D}_k \mathbf{Q}_{kh})$$
$$g_{Th} = J_h{}^* g_T J_h$$
$$\boldsymbol{\psi}_h = g_{Th} \sum_{m=1}^{M} \mathbf{L}_{mh} \mathbf{R}_m [\mathbf{B}_h \mathbf{K}_h^{-1} (\mathbf{P}_h \mathbf{f} + \mathbf{B}_h{}^* \mathbf{S}_h{}^* (\mathbf{D}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\mu})) - \mathbf{S}_h{}^* \boldsymbol{\beta}]$$

Рассмотрим являющуюся конечно-мерным аналогом задачи (2.7) задачу Коши

(3.10) $$\zeta_h{}^{\cdot} + g_{Th} \mathbf{\Pi}_h \zeta_h = \boldsymbol{\psi}_h, \quad \zeta_h \in C^1\,[S, E_h], \quad \zeta_h(0) = J_h{}^* \zeta_0$$

В силу определения скалярного произведения (3.6) операторы $\mathbf{\Pi}_h$ и g_{Th} сохраняют основные свойства операторов $\mathbf{\Pi}$ и g_T, в частности, выполняются неравенства, аналогичные (2.9) и (1.12) и, следовательно, задача (3.10) однозначно разрешима и ее решение $\zeta_h(t)$ подчиняется оценке, идентичной (2.12).

Величину $\mathbf{J}_h \zeta_h$ назовем галеркинской аппроксимацией решения уравнения (2.7) и оценим величину погрешности $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{J}_h \zeta_h - \zeta$.

Подействуем на уравнение (3.10) слева оператором J_h и из результата вычтем (2.7). Воспользовавшись разложением $\mathbf{I}_{E_h} = J_h{}^* J_h$ и второй формулой (3.9), найдем

(3.11) $$\boldsymbol{\delta}^{\cdot} = -(\mathbf{J}_h g_{Th} \mathbf{J}_h{}^*)(\mathbf{J}_h \mathbf{\Pi}_h \mathbf{J}_h{}^*)\boldsymbol{\delta} + \mathbf{A}(t), \quad \boldsymbol{\delta}(0) = \boldsymbol{\delta}_0 = \mathbf{J}_h \mathbf{J}_h{}^* \zeta_0 - \zeta_0$$
$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_1(t) + \mathbf{A}_2(t) + \mathbf{A}_3(t), \quad \mathbf{A}_1(t) = \mathbf{J}_h \boldsymbol{\psi}_h - \boldsymbol{\psi}$$
$$\mathbf{A}_2(t) = (\mathbf{I}_X - \mathbf{J}_h \mathbf{J}_h{}^*) g_T (\mathbf{J}_h \mathbf{\Pi}_h \mathbf{J}_h{}^*) \zeta, \quad \mathbf{A}_3(t) = g_T (\mathbf{\Pi} - \mathbf{J}_h \mathbf{\Pi}_h \mathbf{J}_h{}^*) \zeta$$

Поскольку оператор $(\mathbf{J}_h g_{Th} \mathbf{J}_h{}^*)(\mathbf{J}_h \mathbf{\Pi}_h \mathbf{J}_h{}^*) \in C\,[S\,(X_h \to X_h)]$ обладает теми же свойствами, что и оператор $g_T \mathbf{\Pi}$, в соответствии с теоремой (2.1) из (3.11) следует оценка

(3.12) $$\| \boldsymbol{\delta}(t) \| \leqslant \| \boldsymbol{\delta}_0 \| \exp\left(-\tau_1 \int_0^t g_1(s)\, ds\right) + \int_0^t \| \mathbf{A}(p) \| \exp\left(-\tau_1 \int_0^p g_1(s)\, ds\right) dp$$

Использовав (3.4), (3.5) и (3.7), получим

(3.13) $$\lim_{h\to 0} \sup_{t\in s} \| A_1(t) \| = 0$$

В соответствии с (3.8)

(3.14) $$\lim_{h\to 0} \| \delta_0 \| = 0, \quad \lim_{h\to 0} \sup_{t\in s} \| A_2(t) \| = 0$$

Согласно (1.12), $\| \mathbf{A}_3(t) \| \leqslant g_2(t) \| \mathbf{a}(t) \|$, где $\mathbf{a}(t) = \mathbf{\Pi}\zeta - \mathbf{J}_h \mathbf{\Pi}_h \mathbf{J}_h{}^* \zeta$. Обозначим

$$\mathbf{Q}_m \zeta = \varepsilon_m^c, \quad \sum_m \mathbf{D}_m \mathbf{Q}_m \zeta = \mathbf{q}, \quad \mathbf{Q}_m \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_m$$

Принимая во внимание (2.8), (3.7) и (3.9), имеем

$$\mathbf{a}_m(t) = \mathbf{R}_m\,[(\boldsymbol{\varepsilon}_m{}^c - \mathbf{S}_h\mathbf{S}_h{}^*\,\boldsymbol{\varepsilon}_m{}^c) + (\mathbf{S}_h\theta_h\mathbf{S}_h{}^*\mathbf{q} - \theta\mathbf{q})]$$

Отсюда с учетом (3.5), определения операторов θ и θ_h формулы (3.4), неравенства треугольника, а также ограниченности $\|\boldsymbol{\zeta}(t)\|$ и $g_2(t)$, следует

(3.15) $$\lim_{h\to 0}\sup_{t\in s}\|A_3(t)\| = 0$$

Из (3.13) — (3.15) вытекает, что $\lim\limits_{h\to 0}\ \sup\limits_{t\in s}\|\delta(t)\| = 0.$

Таким образом доказано следующее утверждение.

Теорема 3.1. При предположениях (1.8) — (1.12), (3.4) и (3.5) приближенное решение задачи термовязкоупругости, полученное методом Галеркина, равномерно по времени сходится к точному решению.

4. Разностная аппроксимация производных по времени. Как следует из результатов п.3, для определения приближенного решения по Галеркину уравнения (2.7) необходимо решить задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.10). Рассмотрим приближенные (шаговые) методы решения уравнения (3.10), заменяя производные по времени конечными разностями.

Пусть $\{t_j\}_{j=1}^N$ — некоторое разбиение рассматриваемого интервала времени S, $\Delta t_j = t_j - t_j$, $\boldsymbol{\zeta}_h{}^j$ — приближенное значение функции $\boldsymbol{\zeta}_h(t_j)$, полученное шаговым методом

$$\mathbf{g}_{Th}^j = \frac{1}{\Delta t_j}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \mathbf{g}_{Th}dt,\quad \boldsymbol{\psi}_h{}^j = \frac{1}{\Delta t_j}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \boldsymbol{\psi}_h(t)\,dt$$

Тогда в соответствии с явной разностной аппроксимацией уравнения (3.10) получим

(4.1) $$\boldsymbol{\zeta}_h^{j+1} = (\mathbf{I}_{E_h} - \Delta t_j\mathbf{g}_{Th}^j\,\boldsymbol{\Pi}_h)\boldsymbol{\zeta}_h{}^j + \Delta t_j\boldsymbol{\psi}_h{}^j$$

При использовании неявной аппроксимации с весами имеем

(4.2) $$(\mathbf{I}_{E_h} + \omega_1\Delta t_j\mathbf{g}_{Th}^j\boldsymbol{\Pi}_h)\,\boldsymbol{\zeta}_h^{j+1} = \Delta t_j\boldsymbol{\psi}_h{}^j + (\mathbf{I}_{E_h} - \omega_2\Delta t_j\mathbf{g}_{Th}^j\boldsymbol{\Pi}_h)\,\boldsymbol{\zeta}_h{}^j$$

Здесь ω_1, ω_2 — весовые множители, $\omega_1 + \omega_2 = 1$. Неявная разностная схема (4.2) абсолютно устойчива при $\omega_1 \geqslant {}^1/_2$, однако, поскольку оператор $(I_{E_h} + \omega_1\Delta t_j\mathbf{g}_{Th}^j\boldsymbol{\Pi}_h)^{-1}$, как правило, невозможно вычислить в явном виде, решение уравнения (4.2) определяется итерационно по формулам

(4.3) $$\boldsymbol{\zeta}_h^{j+1} = \lim_{k\to\infty}\boldsymbol{\zeta}_h^{j+1,\,k}$$

$$\boldsymbol{\zeta}_h^{j+1,\,k} = -\,\omega_1\Delta t_j\mathbf{g}_{Th}\boldsymbol{\Pi}_h\boldsymbol{\zeta}_h^{j+1,\,k-1} + (\mathbf{I}_{E_h} - \omega_2\Delta t_j\mathbf{g}_{Th}\boldsymbol{\Pi}_h)\,\boldsymbol{\zeta}_h{}^j + \Delta t_j\boldsymbol{\psi}_h{}^j$$

Из (4.2) и (4.3) получим

$$\boldsymbol{\zeta}_h^{j+1} - \boldsymbol{\zeta}_h^{j+1,\,k} = -\,\omega_1\Delta t_j\mathbf{g}_{Th}^{j+1}\boldsymbol{\Pi}_h\,(\boldsymbol{\zeta}_h^{j+1} - \boldsymbol{\zeta}_h^{j+1,\,k-1})$$

Следовательно, для сходимости итерационного процесса (4.3) достаточно, чтобы $\omega_1\Delta t_j\,\|\mathbf{g}_{Th}^j\,\boldsymbol{\Pi}_h\| < 1$, откуда с учетом оценок для норм $\mathbf{g}_{Th}$ и $\boldsymbol{\Pi}_h$, вытекающих из неравенств, которые, как указывалось выше, справедливы и для конечно-мерных операторов, имеем критерий выбора временного шага

(4.4) $$\Delta t_j \leqslant \frac{1}{\omega_1\tau_1 g_{2j}},\quad g_{2j} = \frac{1}{\Delta t_j}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} g_2(t)\,dt$$

Для обеспечения устойчивости явной схемы (4.1) достаточно потребовать [10], чтобы норма оператора перехода $\boldsymbol{\Gamma}_h{}^j = \mathbf{I}_{E_h} - \Delta t_j\mathbf{g}_{Th}^j\,\boldsymbol{\Pi}_h$ была не больше единицы.

Оценка нормы Γ_h^j затруднена тем, что оператор Γ_h^j — несамосопряженный вследствие некоммутативности g_{Th} и Π_h. Оператор Γ_h^j станет самосопряженным при перенормировке пространства E_h с помощью энергетического скалярного произведения $(\zeta_h \chi_h)_{\Pi_h} = (\Pi_h \zeta_h, \chi_h)_{E_h}$. Учитывая, что для самосопряженного положительно-определенного оператора Π_h существует самосопряженный оператор $\Pi_h^{1/2}$, такой, что $\Pi_h^{1/2}\Pi_h^{1/2} = \Pi_h$ имеем

$$\|\Gamma_h^j\|_{\Pi_h} = \sup_{\zeta_h \in E_h} \frac{|(\Pi_h \Gamma_h^j \zeta_h, \zeta_h)_{E_h}|}{(\Pi_h \zeta_h, \zeta_h)_{E_h}} = \tag{4.5}$$

$$= \sup_{\chi_h} \left| 1 - \frac{\Delta t_j (\Pi_h^{1/2} g_{Th} \Pi_h^{1/2} \chi_h, \chi_h)_{E_h}}{(\chi_h, \chi_h)_{E_h}} \right| = \max [Q_1, Q_2]$$

$$\chi_h = \Pi_h^{1/2} \zeta_h \in E_h, \quad Q_1 = 1 - \Delta t_j \inf_{\chi_h} \frac{(\Pi_h^{1/2} g_{Th} \Pi_h^{1/2} \chi_h, \chi_h)_{E_h}}{(\chi_h, \chi_h)_{E_h}}$$

$$Q_2 = \Delta t_j \sup_{\chi_h} \frac{(\Pi_h^{1/2} g_{Th} \Pi_h^{1/2} \chi_h, \chi_h)_{E_h}}{(\chi_h, \chi_h)_{E_h}} - 1$$

Величина $Q_1 \leqslant 1$ в силу неотрицательности оператора g_{Th}. Чтобы $Q_2 \leqslant 1$, достаточно потребовать

$$\Delta t_j \leqslant 2 / (\tau_2 g_{2j}) \leqslant 2 / \| \Pi_h^{1/2} g_{Th}^j \Pi_h^{1/2} \| \tag{4.6}$$

Условие (4.6) является достаточным условием устойчивости явной схемы (4.1). Схемы (4.1) и (4.2) имеют соответственно первый и второй порядок аппроксимации, что в совокупности с устойчивостью обеспечивает их сходимость с таким же порядком точности [10].

Поступила 31 VII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уманский С. Э.* К определению остаточных напряжений, возникающих при охлаждении вязкоупругих тел. Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 12.
2. *Победря Б. Е.* Математическая теория нелинейной вязкоупругости. В сб.: Упругость и неупругость, вып. 3. М., Изд-во Моск. ун-та, 1973.
3. *Ciobanu Gh.* On the existence and uniqueness of solution in linear visoelasticity: First. boundary value problem. Arch. mech. stosowanej, 1971, vol. 23, No. 1, p. 45—54.
4. *Fichera G.* Existence theorems in elasticity. In: Handbuch der Physik, Bd 6a/2. Berlin, Springer — Verlag, 1972. (Рус. перев.: М., «Мир», 1974.)
5. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., «Наука», 1973.
6. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., «Наука», 1970.
7. *Gaiewski H., Groger K., Zacharias K.* Nichlineare operatorgleichungen und operator-differential — gleichungen. Berlin, Academie — Verlag, 1974. (Рус. перев.: М., «Мир», 1978.)
8. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М., «Мир», 1975.
9. *Strang G., Fix G. J.* An analysis of the finite element method. Engelewood, Cliffs, Prentice Hall, 1973.
10. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.