Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 6, 1980

УДК 539.3 : 534.1

О ВЛИЯНИИ НАЧАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА СКОРОСТИ ВОЛН СТОНЛИ

А. Н. Гузь, А. П. Жук

(Киев)

Исследуется распространение волн вдоль плоской границы раздела сжимаемых предварительно деформированных тел с произвольной формой упругого потенциала. Привлекается линеаризованная теория распространения волн в телах с конечными начальными деформациями. Рассматривается случай, когда одно из тел — жидкость. Для потенциалов Мурнагана и гармонического типа показано, что скорости волн линейно зависят от начальных напряжений. В отличие от случая неограниченного изотропного тела [1] выбор формы потенциала не повлиял на характер зависимости. При отсутствии начальных напряжений полученные соотношения совпадают с результатами [2].

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о распространении поверхностной волны вдоль плоской границы раздела упругих предварительно напряженных полупространств. Полупространства будем считать сжимаемыми, изотропными с произвольной формой упругого потенциала. Будем использовать лагранжеву систему координат (x_1, x_2, x_3), в недеформированном состоянии совпадающую с декартовой. Величины, относящиеся к начальному (деформированному) состоянию, отмечаем верхним индексом нуль.

Будем считать, что граница раздела полупространств — плоскость $x_2 = 0$. В этом случае исследование поверхностных волн сводится к решению плоской задачи линеаризированной теории упругости в плоскости Ox_1x_2

$$u_1 = u_1 (x_1, x_2, \tau), \quad u_2 = u_2 (x_1, x_2, \tau), \quad u_3 \equiv 0 \tag{1.1}$$

Согласно [3], указанная задача линеаризированной теории упругости при однородном начальном состоянии

$$u_m{}^\circ = \delta_{im} (\lambda_i - 1) x_i, \quad \lambda_i = \text{const}\ (i, m = 1, 2, 3) \tag{1.2}$$

сводится к решению краевой задачи для уравнения движения с граничными условиями в напряжениях

$$L_{ij}u_j = 0 \quad (i, j = 1, 2) \tag{1.3}$$

$$x_2 = \text{const}, \ \sigma_{22}{}^*\lambda_2 + \sigma_{22}^{*\circ} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = P_2{}^*, \ \sigma_{21}{}^*\lambda_1 + \sigma_{22}^{*\circ} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = P_1{}^*$$

Здесь L_{ij} — дифференциальные опараторы, $P_i{}^*$ — компоненты возмущений внешней нагрузки при $x_2 = \text{const}$, λ_i — коэффициенты удлинения вдоль главных осей тензора деформаций Грина.

Если начальное напряженное состояние определяется выражениями

$$\sigma_{11}^{*\circ} \equiv \sigma_{22}^{*\circ} \neq 0, \quad \sigma_{33}^{*\circ} \neq 0, \quad \lambda_1 \equiv \lambda_2, \quad \lambda_3 \neq 0 \tag{1.4}$$

то общее решение системы уравнений (1.3) записывается через функцию χ следующим образом [3]:

$$u_1 = \left\{\lambda_2^2 \left[(\mu_{12} + \sigma_{11}^{*\circ}\lambda_2^{-2}) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (a_{22} + \sigma_{22}^{*\circ}\lambda_2^{-2}) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right] - \rho \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right\} \chi \tag{1.5}$$

$$u_2 = -\lambda_1\lambda_2 (\mu_{12} + a_{12}) \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Выражения для определения величин a_{ij} и μ_{12} через упругий потенциал, а также уравнение для определения функции χ приведены в [3].

Наряду с лагранжевой системой координат введем в начальном состоянии систему координат $z_i = \lambda_i x_i$ и будем отмечать штрихом все величины, относящиеся к полупространству $z_2 > 0$. Перемещения в каждом из полупространств и нормальные и тангенциальные возмущения интенсивности поверхностной нагрузки при $z_2 = 0$ определяются соответственно по формулам (1.5) и (1.3), в которых необходимо перейти к переменным z_i.

На границе раздела полупространств должны выполняться условия непрерывности

$$u_1 = u_1', \ u_2 = u_2', \quad p_1 = p_1', \quad p_2 = p_2' \tag{1.6}$$

Здесь $p_i = (\lambda_1\lambda_3)^{-1}P_i^*$ и $p_i' = (\lambda_1'\lambda_3')^{-1}P_i^{*\prime}$ — возмущения интенсивности поверхностного нагружения при $z_2 = 0$, которые измеряются на единицу площади в начальном состоянии.

2. Дисперсионные соотношения. Получим дисперсионные соотношения, описывающие волны Стонли на границе раздела упругих полупространств и на границе раздела жидкости и упругого полупространства. Упругие полупространства считаем предварительно деформированными.

Волны на границе раздела упругих полупространств. Рассмотрим случай, когда начальное напряженное состояние удовлетворяет соотношениям

$$\sigma_{11}^{*\circ} = \sigma_{22}^{*\circ} = \sigma_{11}^{*\circ\prime} = \sigma_{22}^{*\circ\prime} \neq 0, \quad \sigma_{33}^{*\circ} \neq 0, \quad \sigma_{33}^{*\circ\prime} \neq 0 \tag{2.1}$$

Для полупространства $z_2 < 0$ функцию χ выберем в виде поверхностной волны, распространяющейся в положительном направлении оси Oz_1

$$\chi = \varphi(z_2) \exp[iq(z_1 - C\tau)] \tag{2.2}$$

Здесь q — волновое число, C — фазовая скорость волны.

Из системы (1.3), принимая во внимание (1.5) и (2.2), получим для неизвестной функции $\varphi(z_2)$ следующее выражение:

$$\varphi = Ae^{q\alpha_1 z_2} + Be^{q\alpha_2 z_2} \tag{2.3}$$

$$\alpha_1 = (1 - C^2/C_{l11}^2)^{1/2}, \quad \alpha_2 = (1 - C^2/C_{s12}^2)^{1/2}$$

Здесь A, B — постоянные интегрирования, C_{l11}, C_{s12} — скорости соответственно продольной и поперечной волн, распространяющихся в предварительно напряженном теле вдоль оси Oz_1 [1].

Следовательно, выражения для перемещений принимают вид

$$u_1 = Kq^2 (Ae^{q\alpha_1 z_2} + B\alpha_2^2 e^{q\alpha_2 z_2}) \exp[iq(z_1 - C\tau)] \tag{2.4}$$

$$u_2 = -iKq^2 (A\alpha_1 e^{q\alpha_1 z_2} + B\alpha_2 e^{q\alpha_2 z_2}) \exp[iq(z_1 - C\tau)]$$

$$K = \rho (C_{l11}^2 - C_{s12}^2)$$

Для полупространства $z_2 > 0$ функция χ' и перемещения u_i' ($i = 1, 2$) определяются формулами, идентичными (2.2) — (2.4), с заменой A, B, α_1, α_2, C_{l11}, C_{s12}, ρ, K на A', B', α_1', ..., K' и $\exp(q\alpha_i z_2)$ на $\exp(-q\alpha_i' z_2)$. При этом в выражении для u_2' необходимо принять знак «плюс».

Учитывая для полупространства $z_2 < 0$ выражения для перемещений (2.4) и уравнения состояния [3]

$$\sigma_{21}^* = \lambda_1\lambda_2\mu_{12}\left(\frac{\partial u_1}{\partial z_2} + \frac{\partial u_2}{\partial z_1}\right), \quad \sigma_{22}^* = a_{12}\lambda_1^2\frac{\partial u_1}{\partial z_1} + a_{22}\lambda_2^2\frac{\partial u_2}{\partial z_2} \tag{2.5}$$

для возмущений интенсивности поверхностного нагружения на границе раздела $z_2 = 0$ согласно (1.3) найдем

$$\begin{aligned} p_1 &= Kq^3(\lambda_1^2\lambda_3)^{-1}[(\rho C_{s12}^2 + \mu_{12}\lambda_1^4)\alpha_1 A + (\rho C_{s12}^2\alpha_2^2 + \\ &+ \mu_{12}\lambda_1^4)\alpha_2 B] \\ p_2 &= iKq^3(\lambda_1^2\lambda_3)^{-1}[(a_{12}\lambda_1^4 - \rho C_{l11}^2\alpha_1^2)A + (a_{12}\lambda_1^4 - \\ &- \rho C_{l11}^2)\alpha_2^2 B] \end{aligned} \tag{2.6}$$

В выражениях (2.6) опущен множитель $\exp[iq(z_1 - C\tau)]$.

Для полупространства $z_2 > 0$ величины p_i' ($i = 1, 2$) определяются формулами, идентичными (2.6), с заменой λ_1, λ_3, a_{12}, μ_{12}, C_{s12}, C_{l11}, K, ρ на λ_1', λ_3', a_{12}', ..., ρ'. При этом в выражении для p_1' необходимо принять знак «минус».

Из граничных условий (1.6), принимая во внимание выражения (2.4) и (2.6), получим характеристическое уравнение, описывающее распространение волн Стонли в предварительно напряженной среде

$$\begin{aligned} &C^4[(\rho - \rho' m)^2 - (\rho\alpha_1' + \rho'\alpha_1 m)(\rho\alpha_2' + \rho'\alpha_2 m)] + \\ &+ 2SC^2(\rho\alpha_1'\alpha_2' - \rho'\alpha_1\alpha_2 m - \rho + \rho' m) + S^2(\alpha_1\alpha_2 - \\ &- 1)(\alpha_1'\alpha_2' - 1) = 0, \quad m = \lambda_1^2\lambda_3(\lambda_1'^2\lambda_3')^{-1} \\ &S = \rho C_{s12}^2 + \mu_{12}\lambda_1^4 - m(\rho' C_{s12}'^2 + \mu_{12}'\lambda_1'^4) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Если начальные напряжения отсутствуют, характеристическое уравнение (2.7) принимает классический вид [4].

Волны на границе раздела жидкости и упругого полупространства. Рассмотрим случай, когда одно из полупространств, например $z_2 < 0$, жидкое ($C_{s12} = 0$, $C_{l11} = c_1$, $\alpha_2 = \infty$, c_1 — скорость звука в жидкости), а начальное напряженное состояние определяется выражениями

$$\sigma_{11}^{*\circ} = \sigma_{22}^{*\circ} = \sigma_{33}^{*\circ} = 0, \quad \sigma_{11}^{*\circ\prime} = \sigma_{22}^{*\circ\prime} \neq 0, \quad \sigma_{33}^{*\circ\prime} \neq 0 \tag{2.8}$$

В этом случае характеристическое уравнение (2.7) переходит в уравнение

$$\begin{aligned} &(S + m\rho' C^2)^2\alpha_1 + m\rho\rho'\alpha_1' C^4 - S^2\alpha_1\alpha_1'\alpha_2' = 0 \\ &m = (\lambda_1'^2\lambda_3')^{-1}, \quad S = -m(2\mu_{12}'\lambda_1'^4 + \sigma_{11}^{*\circ\prime}\lambda_1'^2) \end{aligned} \tag{2.9}$$

описывающее распространение волн Стонли вдоль границы раздела жидкости и предварительно напряженного упругого полупространства.

Классический случай [4] получается отсюда: если в уравнении (2.9) положить $\sigma_{11}^{*\circ\prime} = \sigma_{22}^{*\circ\prime} = \sigma_{33}^{*\circ\prime} = 0$.

3. Примеры. Рассмотрим теперь примеры для тел с упругими потенциалами конкретной формы.

Волны на границе раздела упругих полупространств. Рассмотрим случай, когда начальное напряженное состояние определяется выражениями

$$\sigma_{11}^{*^\circ} = \sigma_{22}^{*^\circ} = \sigma_{33}^{*^\circ} = \sigma_{11}^{*^{\circ\prime}} = \sigma_{22}^{*^{\circ\prime}} = 0, \quad \sigma_{33}^{\circ\prime} = p^\circ, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \tag{3.1}$$

В этом случае уравнение (2.7) запишем в виде

$$\begin{gathered} v^2 [(\rho / \rho' - m)^2 - (\beta_1\rho/\rho' + m\beta_2)(\beta_3\rho/\rho' + m\beta_4)] + 4v(s\rho/\rho' - mg)\times \\ \times(\beta_1\beta_3\rho/\rho' - m\beta_2\beta_4 - \rho/\rho' + m) + 4(s\rho/\rho' - mg)^2\times \\ \times(\beta_2\beta_4 - 1)(\beta_1\beta_3 - 1) = 0 \end{gathered} \tag{3.2}$$

$$\begin{gathered} \beta_1 = (1 - v/d)^{1/2}, \ \beta_2 = (1 - v/r)^{1/2}, \ \beta_3 = (1 - v/g)^{1/2} \\ \beta_4 = (1 - v/s)^{1/2}, \ v = (C/c_2')^2, \ g = (C_{s12}'/c_2')^2 \\ d = (C_{l11}'/c_2')^2, \ r = (c_1/c_2')^2, \ s = (c_2/c_2')^2 \\ c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho, \ c_2^2 = \mu/\rho, \ c_2'^2 = \mu'/\rho', \ m = (\lambda_1'^2\lambda_3')^{-1} \end{gathered} \tag{3.3}$$

Здесь λ, λ' и μ, μ' — постоянные Ламе.

1°. В рамках теории конечных начальных деформаций рассмотрим пример для полупространств с потенциалом гармонического типа [5]

$$\begin{gathered} \Phi^\circ = {}^1/_2\lambda S_1^{\circ 2} + \mu S_2^\circ, \quad S_1^\circ = (\lambda_1 - 1) + (\lambda_2 - 1) + (\lambda_3 - 1), \quad S_2^\circ = \\ = (\lambda_1 - 1)^2 + (\lambda_2 - 1)^2 + (\lambda_3 - 1)^2 \end{gathered} \tag{3.4}$$

Из формул (3.3) и (3.4), принимая во внимание [6], получаем

$$\begin{gathered} n = 0, \ \lambda_1' = 1 \\ n \neq 0, \quad \lambda_1' = \{[(3t - 4) + n(t - 2)(6t - 8)]^{1/2} - 3t + 4\}/[n(t - 2)] \\ g = \lambda_1' - {}^1/_2(t - 2)\lambda_1'[2(\lambda_1' - 1) + (\lambda_3' - 1)], \ n = p^\circ/\mu' \\ d = \lambda_1'\{2 + (t - 2)[\lambda_1' - 2(\lambda_1' - 1) - (\lambda_3' - 1)]\}, \ t = (c_1'/c_2')^2 \end{gathered} \tag{3.5}$$

Численные решения уравнения (3.2) показывают, что зависимость $\eta = (C - C_0)/C_0$ от n имеет линейный характер $\eta = kn$ (C_0 — скорость волны Стонли в ненапряженном теле). Для комбинации материалов сплав АМГ-6 ($\rho = 2.63 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda = 49.6 \cdot 10^9$ Па, $\mu = 24.8 \cdot 10^9$ Па) — сталь 45Г17Ю3 ($\rho' = 7.54 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda' = 78.0 \cdot 10^9$ Па, $\mu' = 63.8 \cdot 10^9$ Па) $k = -0.088$ ($-0{,}5 \cdot 10^{-2} \leqslant n \leqslant 0.5 \cdot 10^{-2}$), а для комбинации сплав АМГ-6 — сталь 09Г2С ($\rho' = 7.795 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda' = 90.75 \cdot 10^9$ Па, $\mu' = 75.95 \cdot 10^9$ Па) $k = -0.0714$ ($-3.5.10^{-3} \leqslant n \leqslant 3.5 \cdot 10^{-3}$).

2°. Рассмотрим случай, когда материалы, заполняющие полупространства, описываются потенциалом Мурнагана [7]

$$\Phi^\circ = {}^1/_2\lambda A_1^{\circ 2} + \mu A_2^\circ + {}^1/_3 a A_1^{\circ 3} + bA_1^\circ A_2^\circ + {}^1/_3 cA_3^\circ \tag{3.6}$$

Здесь a, b, c — упругие постоянные третьего порядка, A_i ($i = 1, 2, 3$) — алгебраические инварианты тензора деформации Грина.

Ограничимся линейным приближением [1]. Тогда будем считать $\sigma_{33}^{*^{\circ\prime}} = \sigma_{33}^{\circ\prime} = p^\circ$; величины (3.3) следует вычислять по формулам

$$\begin{gathered} g = \lambda_1'^4 + (\mu')^{-1}(b' + {}^1/_2c')(\lambda_1'^2 - 1)\lambda_1'^4 + {}^1/_2(\mu')^{-1}b'(\lambda_3'^2 - 1)\lambda_1'^4 \\ d = (\lambda' + 2\mu')(\mu')^{-1}\lambda_1'^4 + [(2a' + 4b' + c')(\lambda_1'^2 - 1) + (a' + b')\times \\ \times(\lambda_3'^2 - 1)]\lambda_1'^4(\mu')^{-1}, \ K_0 = 3\lambda' + 2\mu', \ \lambda_1'^2 = 1 - K_0^{-1}\lambda' n, \ \lambda_3'^2 = 1 + \\ + 2K_0^{-1}(\lambda' + \mu')n \end{gathered} \tag{3.7}$$

Результаты вычислений для тех же комбинаций материалов, что и в примере 1°, показывают линейный характер зависимости η от n. При этом для комбинации сплав АМГ-6 ($a = 30.2 \cdot 10^{10}$ Па, $b = -4.8 \cdot 10^{10}$ Па, $c = -28.6 \cdot 10^{10}$ Па) — сталь 45Г17Ю3 ($a' = 60.1 \cdot 10^{10}$ Па, $b' = -21.1 \cdot 10^{10}$ Па, $c' = -33.5 \cdot 10^{10}$ Па) $k = -0.185$, а для комбинации материалов сплав АМГ-6 — сталь 09Г2С ($a' = -25.5 \cdot 10^{10}$ Па, $b' = -20.6 \cdot 10^{10}$ Па, $c' = -46.45 \cdot 10^{10}$ Па) $k = -0.01$.

Волны на границе раздела жидкости и упругого полупространства. Рассмотрим случай, когда начальное напряженное состояние определяется выражениями (3.1). Характеристическое уравнение (2.9) в этом случае принимает вид

$$(2 - v/g)^2\beta_2 + \rho v^2\beta_1/(\rho' m g^2) - 4\beta_1\beta_2\beta_3 = 0 \tag{3.8}$$

3°. В рамках теории конечных начальных деформаций рассмотрим пример для упругого полупространства с потенциалом гармонического типа. Величины, входящие в уравнение (3.8), определяются соотношениями (3.5). Численное решение уравнения (3.8) проводилось для параметров [8] : $t = 2.857$, $r = 1.176$, $\rho/\rho' = 0.5$. Анализ решения показывает, что зависимость η от n имеет линейный характер, $k = -0.12$ ($-0.002 \leqslant n \leqslant 0.002$).

Полученные результаты позволяют определить характер влияния начальных напряжений на волны Стонли, распространяющиеся вдоль границы раздела упругих тел или жидкости и упругого тела. Это влияние заключается в том, что скорость волны Стонли возрастает (убывает), если одно из упругих полупространств сжато (растянуто) в направлении, перпендикулярном направлению распространения. Зависимость скорости волны от начальных напряжений имеет линейный характер.

Из анализа результатов вычислений следует, что в отличие от случая волн в неограниченном изотропном теле выбор формы упругого потенциала не влияет на характер зависимости скорости волны Стонли от начальных напряжений: при сжатии в обеих случаях скорость возрастает, при растяжении — убывает.

В заключение укажем, что некоторые результаты, относящиеся к волнам на границе раздела предварительно напряженных тел, приведены в работах [9, 10].

Поступила 9 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гузь А. Н., Махорт Ф. Г., Гуща О. И.* Введение в акустоупругость. Киев, «Наукова думка», 1977.
2. *Stonely R.* Elastic waves at the surface of separation of two solids. Proc. Roy Soc. London, ser. A, 1924, vol. 106, No. 738.
3. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев, «Наукова думка», 1973.
4. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М., «Наука», 1973.
5. *John F.* Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type. Commun. Pure and Appl. Math., 1960, vol. 13, No. 2, p. 239—296.
6. *Гузь А. Н.* Устойчивость сжимаемых цилиндров при всестороннем сжатии. Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 12.
7. *Murnaghan F. D.* Finite deformations of an elastic solid. New York, Willey, 1951.
8. *Ansell J. H.* The roots of the Stoneley wave equation for solid — liquid interfaces. Pure and Appl. Geophys., 1972, vol. 94, No. 2, p. 172—188.
9. *Жук А. П.* Волны Стонли в среде с начальными напряжениями. Прикл. механ., 1980, т. 16, № 1.
10. *Жук А. П.* Волны на границе раздела предварительно напряженных упругих тел. Докл. АН УССР. Сер. А, 1979, № 10.