Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 6, 1980

УДК 539.3 : 534.1

О ПЛОТНОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ РЕЗОНАНСОВ

В. В. Болотин

(Москва)

Рассматривается связь между асимптотической плотностью собственных частот упругих систем и их реакцией на параметрические колебательные воздействия. Основное внимание уделяется соотношению между плотностью простых параметрических резонансов, при которых в основном возбуждается одна из собственных форм системы, и плотностью комбинационных параметрических резонансов, сопровождаемых парным взаимодействием собственных форм.

1. Многие упругие системы обладают достаточно плотным спектром собственных частот, особенно в высокочастотной области. Для таких систем представляет интерес приближенная характеристика спектра — асимптотическая плотность собственных частот, приближенно равная числу собственных частот на единицу частотного диапазона. Чем выше асимптотическая плотность собственных частот, тем интенсивнее динамическая реакция системы на внешние колебательные воздействия с медленно меняющимися частотами, а также на стационарные широкополосные случайные воздействия [1].

Рассмотрим упругую систему, малые колебания которой описываются операторным уравнением

$$A\,(t,\,\mu)\mathbf{u}^{\cdot\cdot} + \beta B\,(t,\,\mu)\mathbf{u}^{\cdot} + C\,(t,\,\mu)\mathbf{u} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{u}\,(\mathbf{x},\,t)$ — вектор перемещений в системе V, зависящий от координат $\mathbf{x} \in V \subset R^m$ и времени $t \in [t_0,\,\infty)$. Этот вектор — элемент некоторого пространства; будем полагать, что оно является действительным сепарабельным гильбертовым пространством и что A, B и C — линейные операторы в этом пространстве, представляющие собой непрерывные функции времени t и неотрицательного параметра μ, причем при $\mu \to 0$ эти операторы становятся независящими от времени. В большинстве приложений оказывается, что операторы A, B и C при всех рассматриваемых значениях t и μ симметричные и положительно-определенные; кроме того, оператор C^{-1} вполне непрерывный. Оператор A — градиент кинетической энергии системы, βB — градиент диссипативной функции, C — градиент обобщенной потенциальной энергии. Неотрицательный параметр β характеризует уровень диссипации энергии в системе. При $\beta = \mu = 0$ уравнение (1.1) описывает свободные колебания в соответствующей консервативной системе. Собственные формы колебаний

$\varphi_1(\mathbf{x}),\ \varphi_2(\mathbf{x}), \ldots$ определяются как собственные элементы уравнения

$$(C - \omega^2 A)\varphi = 0 \tag{1.2}$$

а соответствующие собственные частоты — как положительные квадратные корни $\omega_1, \omega_2, \ldots$ из собственных значений ω^2 этого уравнения.

Пусть операторные коэффициенты в уравнении (1.1) — периодические функции времени с периодом T и частотой $\omega = 2\pi / T$. Точки в пространстве параметров, описывающих свойства системы (включая частоту возбуждения ω), могут быть разбиты на два множества по признаку устойчивости или неустойчивости тривиального решения $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \equiv 0$. При малых β и μ области неустойчивости имеют вид клиньев, примыкающих к оси ω [2]. Частотные соотношения, характеризующие расположение этих клиньев, называются параметрическими резонансами. Различают простые (1.3) и комбинационные (1.4) параметрические резонансы

$$\omega = 2\,\omega_k / p \quad (k = 1, 2, \ldots;\ p = 1, 2, \ldots) \tag{1.3}$$

$$\omega = (\omega_j + \omega_k) / p \quad (j, k = 1, 2, \ldots;\ j \neq k;\ p = 1, 2, \ldots) \tag{1.4}$$

Последние сопровождаются парным взаимодействием собственных форм $\varphi_j(\mathbf{x})$ и $\varphi_k(\mathbf{x})$.

В некоторых хорошо изученных частных случаях [2] уравнение (1.1) после разложения по координатному базису $\varphi_1(\mathbf{x}),\ \varphi_2(\mathbf{x}), \ldots$приводится к счетному множеству обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами относительно каждой обобщенной координаты системы. В этих случаях в системе возможны лишь простые резонансы (1.3), и этот случай здесь не рассматривается. В общем случае все обобщенные координаты системы взаимодействуют между собой, так что реализуются почти все комбинационные резонансы (1.4).

Отметим, что требование симметричности операторных коэффициентов в (1.1) существенно. Если это требование не ставить, то вместо комбинационных резонансов типа (1.4) могут встретиться комбинационные резонансы разностного типа вблизи частотных соотношений

$$\omega = |\,\omega_j - \omega_k\,| / p \quad (j, k = 1, 2, \ldots;\ j \neq k;\ p = 1, 2, \ldots) \tag{1.5}$$

За исключением особых случаев, плотность комбинационных резонансов (1.4) выше, чем плотность простых резонансов (1.3). Допустим, что координатная реализация гильбертова пространства усечена до n-мерного пространства, т. е. в расчете учитываются первые n собственных форм. Тогда следует ожидать n простых резонансов класса p и $C_n^2 = {}^1/_2\, n\,(n - 1)$ комбинационных резонансов того же класса. Например, при $n = 100$ имеем $C_n^2 = 4950$. Но этот предварительный вывод еще ничего не говорит о расположении резонансов на оси возбуждающих частот ω.

Пусть спектр собственных частот системы достаточно плотен, чтобы имела смысл обобщенная характеристика спектра — асимптотическая плотность собственных частот [3]. Обозначим эту характеристику, асимптотически равную числу собственных частот, приходящихся на единицу частотного диапазона, через $\nu(\omega)$. При этом имеется в виду асимптотика по такому параметру (или группе параметров), стремление которых к нулю делает спектр собственных частот сколь угодно плотным. В тонких и тонкостенных упругих системах таким параметром служит отношение характерной толщины к характерной длине или характерному радиусу кривизны. По аналогии с асимптотической плотностью собственных частот введем асимптотическую плотность параметрических резонансов, приближенно равную числу резонансных соотношений типа (1.3) или (1.4), приходящихся на единицу диапазона возбуждающих частот ω. Очевидно, что асимптотическая плотность $\nu_s^{(p)}(\omega)$ простых резонансов класса p, т. е. тех, которым в формуле (1.3) отвечает натуральное число p, определяется как

$$(1.6)\qquad \nu_s^{(p)}(\omega)=\frac{p}{2}\,\nu\left(\frac{p\omega}{2}\right)$$

Плотность всех простых резонансов определяется суммированием плотностей по всем классам p

$$(1.7)\qquad \nu_s(\omega)=\sum_{p=1}^{\infty}\nu_s^{(p)}(\omega)$$

Для приложений эта плотность не представляет заметного интереса, поскольку она имеет смысл лишь для систем без диссипации. При отличной от нуля диссипации минимальное значение параметра μ, при котором неустойчивость становится возможной, имеет порядок $\beta^{1/p}$ [2]. Таким образом, наибольшую опасность представляют резонансы класса $p=1$.

Обозначим асимптотическую плотность комбинационных резонансов через $\nu_c^{(p)}(\omega)$. Эта плотность уже не может быть выражена через плотность собственных частот посредством простого соотношения типа (1.6). Для ее вычисления используем метод, аналогичный уже неоднократно применявшемуся в задачах об оценке плотности собственных частот [3–6].

2. Для достаточно широкого класса упругих систем имеются асимптотические оценки собственных частот, которые в высокочастотной области слабо зависят от типа граничных условий [7, 8]. При этих условиях собственные частоты упорядочиваются при помощи некоторого волнового вектора $\mathbf{k}$, принимающего непрерывные значения из положительного сектора $K\subset R^m$, а каждой собственной частоте соответствует одна ячейка $\Delta\mathbf{k} = \Delta k_1\Delta k_2\ldots\Delta k_m$ в области K. Здесь m — размерность рассматриваемой упругой системы. Обозначим асимптотическую зависимость собственных частот от волнового вектора $\mathbf{k}$ через $\omega=\Omega(\mathbf{k})$. Тогда для числа собственных частот, не превышающих заданного значения ω, имеем асимптотическую оценку [3]

$$(2.1)\qquad N(\omega)\sim\int\limits_{\Omega(\mathbf{k})<\omega}\frac{d\mathbf{k}}{\Delta\mathbf{k}(\mathbf{k})},\qquad d\mathbf{k}=dk_1dk_2\ldots dk_m$$

Если функция $N(\omega)$ дифференцируема в некотором интервале, то ее производная $\nu(\omega)$ имеет смысл асимптотической плотности собственных частот. Именно эта плотность была использована в формуле (1.6).

Оценим число комбинационных резонансов (1.4), для которых возбуждающая частота не превышает заданного значения ω. Это число асимптотически оценивается как

$$(2.2)\qquad N_c^{(p)}(\omega)\sim\frac{1}{2}\iint\limits_{\Lambda(p\omega)}\frac{d\mathbf{k}d\mathbf{k}'}{\Delta\mathbf{k}(\mathbf{k})\Delta\mathbf{k}(\mathbf{k}')}$$

где интегрирование проводится по подмножеству $\Lambda(p\omega)$ прямого произведения $K \times K'$ двух пространств волновых чисел

$$\Lambda(p\omega) = \{\mathbf{k} \in K, \mathbf{k}' \in K' : \Omega(\mathbf{k}) + \Omega(\mathbf{k}') < p\omega\} \tag{2.3}$$

Коэффициент 1/2 в формуле (2.2) введен для того, чтобы не учитывать дважды один и тот же резонанс, которому в формуле (1.4) отвечает перестановка индексов у частот ω_j и ω_k. В ряде задач можно принять, что по всей области изменения волнового вектора $\Delta\mathbf{k} = \mathrm{const}$. Всюду, где функция $N_c^{(p)}(\omega)$ дифференцируемая, имеет смысл асимптотическая плотность параметрических резонансов $\nu_c^{(p)}(\omega)$, равная производной от $N_c^{(p)}(\omega)$. По аналогии с (1.7) вводится плотность всех комбинационных резонансов, совместная плотность всех параметрических резонансов и т. п. Если все комбинационные резонансы принадлежат разностному типу, то в формуле (2.2) достаточно заменить область интегрирования на

$$\Lambda(p\omega) = \{\mathbf{k} \in K, \mathbf{k}' \in K' : |\Omega(\mathbf{k}) - \Omega(\mathbf{k}')| < p\omega\}$$

К сожалению, в приложениях, где встречаются уравнения типа (1.1) с несимметричными операторами, обычно лишь часть комбинационных резонансов имеет вид (1.5). При этом без специального анализа конкретной системы трудно указать, какая часть спектра собственных частот будет связана с резонансами суммарного типа и какая часть — с резонансами разностного типа.

3. Покажем применение общих соотношений (2.1) — (2.3) на двух простых примерах. Рассмотрим прямолинейный упругий стержень постоянного сечения F и длиной l, изгибные колебания которого возбуждаются периодической во времени осевой силой с частотой ω. Если концы стержня шарнирно оперты, то все обобщенные координаты при переходе к координатной реализации гильбертова пространства разделяются, так что комбинационные резонансы не возникают. Но, если, например, один конец стержня защемлен, а другой свободен, то все обобщенные координаты оказываются связанными. При произвольных граничных условиях для собственных частот имеем оценку

$$\omega \sim k^2 \left(\frac{EJ}{\rho F}\right)^{1/2} \tag{3.1}$$

Здесь EJ — изгибная жесткость стержня, ρ — плотность материала. Замечая, что размер одной ячейки на полуоси $k > 0$ волновых чисел есть $\Delta k = \pi / l$, для асимптотической плотности собственных частот получаем известную формулу [2]

$$\nu(\omega) = \frac{1}{2(\omega\omega_0)^{1/2}}, \quad \omega_0 = \frac{\pi^2}{l^2}\left(\frac{EJ}{\rho F}\right)^{1/2} \tag{3.2}$$

Общая формула (2.2) для рассматриваемого примера принимает вид

$$N_c^{(p)}(\omega) \sim \frac{1}{2(\Delta k)^2} \iint\limits_{k^2+k'^2<r^2(p\omega)} dk\, dk', \quad r^2(p\omega) = \frac{p\omega}{\omega_0^2}(\Delta k)^2$$

Элементарные выкладки дают формулы для асимптотической плотности параметрических резонансов

$$\nu_s^{(p)}(\omega) = \left(\frac{p}{8}\right)^{1/2} \frac{1}{(\omega_0\omega)^{1/2}}, \quad \nu_c^{(p)}(\omega) = \frac{\pi p}{8\omega_0} \tag{3.3}$$

Сопоставляя между собой эти формулы, видим, что плотность резонансов разного вида ведет себя с ростом ω по-разному. Если плотность простых резонансов с ростом ω разрежается (вследствие разрежения спектра собственных частот), то асимптотическая плотность комбинационных резонансов во всем частотном диапазоне остается постоянной.

Для второго примера возьмем упругую пластину постоянной толщины h, плотностью материала ρ и цилиндрической жесткостью D. Пусть пластина нагружена в срединной плоскости периодическими силами с частотой ω. Рассмотрим изгибные параметрически возбуждаемые колебания пластины. Будем считать, что пластина в плане — прямоугольная со сторонами a_1 и a_2, хотя окончательные результаты, по-видимому, не связаны с этим ограничением и относятся к пластине произвольной формы в плане такой же площади. Асимптотическое выражение для собственных частот имеет вид [7]

$$\omega \sim (k_1^2 + k_2^2)\left(\frac{D}{\rho h}\right)^{1/2} \tag{3.4}$$

а размер одной ячейки $\Delta \mathbf{k} = \pi^2/(a_1 a_2)$. Асимптотическая плотность собственных частот определяется известным выражением [2], полученным впервые Курантом

$$\nu(\omega) = \frac{1}{\omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{4\pi}{a_1 a_2}\left(\frac{D}{\rho h}\right)^{1/2} \tag{3.5}$$

Из формулы (3.5) следует, что асимптотическая плотность простых параметрических резонансов постоянна во всем диапазоне возбуждающих частот. Если пластина оперта по всему контуру, а нагрузка в срединной плоскости равномерно распределенная вдоль сторон пластины, то возбуждаются только простые резонансы. Если пластина защемлена по контуру, то собственные формы разбиваются на несколько групп по классам симметрии, внутри каждой из которых возможны комбинационные резонансы. В самом общем случае возбуждаются почти все комбинационные резонансы; именно этот случай рассмотрим в дальнейшем.

Применение общей формулы (2.2) дает

$$N_c^{(p)}(\omega) \sim \frac{1}{2(\Delta \mathbf{k})^2} \iint\limits_{|\mathbf{k}|^2 + |\mathbf{k}'|^2 < r^2(p\omega)} d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}', \quad r^2(p\omega) = \frac{4p\omega}{\pi\omega_0}\Delta \mathbf{k} \tag{3.6}$$

где интеграл представляет собой объем $^1/_{16}$ части четырехмерного шара радиусом $r(p\omega)$. Отсюда $N_c^{(p)}(\omega) \sim p^2\omega^2/(4\omega_0^2)$, и приходим к следующим формулам для асимптотических плотностей параметрических резонансов:

$$\nu_s^{(p)}(\omega) = p/(2\omega_0), \quad \nu_c^{(p)}(\omega) = p^2\omega/(2\omega_0^2) \tag{3.7}$$

Сравнивая эти формулы, приходим к выводу, уже полученному ранее в задаче о параметрических резонансах стержней: плотность комбинационных резонансов выше, чем плотность простых резонансов (за исключением начального отрезка спектра, где эти оценки не применимы). При этом для пластин плотность комбинационных резонансов растет асимптотически линейно с ростом возбуждающей частоты.

4. Более интересные задачи связаны с параметрически возбуждаемыми колебаниями тонких упругих оболочек, для которых было обнаружено [3] существование особенностей у асимптотических плотностей собственных частот. Эти особенности соответствуют сгущению спектра в окрестности некоторых имеющих четкий механический смысл собственных частот. Около асимптотических точек сгущения следует ожидать повышенной чувствительности оболочек к вибрационным, особенно к широкополосным случайным воздействиям [1].

Рассмотрим тонкую упругую сферическую панель толщиной h, радиусом срединной поверхности R и цилиндрической жесткостью D. Для определенности примем, что панель — прямоугольная в плане со сторонами a_1 и a_2. В срединной поверхности панели действуют периодические во времени усилия с частотой ω. Будем рассматривать параметрическое возбуждение преимущественно изгибных колебаний, поскольку собственные частоты, которым отвечают преимущественно безмоментные деформации, лежат для тонких оболочек в отдаленной части спектра. Примем, что граничные условия и (или) распределение усилий в срединной поверхности таковы, что возбуждаются почти все параметрические резонансы (1.3) и (1.4). Для собственных частот имеем асимптотическое выражение [7]

$$\omega = [\omega_R^2 + (k_1^2 + k_2^2)^2 D/(\rho h)]^{1/2}, \quad \omega_R = (E/\rho)^{1/2}/R \tag{4.1}$$

Замечая, что $\Delta \mathbf{k} = \pi^2/(a_1 a_2)$, и используя обозначение из (3.5) для характерной частоты изгибных колебаний ω_0, придем к формуле для асимптотической плотности собственных частот

$$(\omega) = \begin{cases} 0 & (\omega < \omega_R) \\ \dfrac{\omega}{\omega_0(\omega^2 - \omega_R^2)^{1/2}} & (\omega > \omega_R) \end{cases} \tag{4.2}$$

Формула (4.2), полученная впервые в [3], обнаруживает асимптотическую точку сгущения у частоты $\omega = \omega_R$. Эта частота соответствует безмоментным радиальным колебаниям. Формула (4.2) остается применимой для панелей другой формы, а также для замкнутой сферической оболочки. В последнем случае достаточно в выражении для ω_0 заменить площадь прямоугольной панели $a_1 a_2$ на $4\pi R^2$. Плотность простых резонансов вычисляется далее по формуле (1.6) с учетом (4.2)

$$\nu_s^{(p)}(\omega) = \begin{cases} 0 & (\omega < 2\omega_R/p) \\ \dfrac{p}{2\omega_0}\left(1 - \dfrac{4\omega_R^2}{p^2\omega^2}\right)^{-1/2} & (\omega > 2\omega_R/p) \end{cases} \tag{4.3}$$

Переходя к комбинационным резонансам, заметим, что область интегрирования (2.3) с учетом (4.1) будет

$$\Lambda(p\omega) = \{\mathbf{k} \in K, \mathbf{k}' \in K' : (\omega_R^2 + \omega_0^2 \mid \mathbf{k} \mid^4/k_0^4)^{1/2} + (\omega_R^2 + \omega_0^2 \mid \mathbf{k}' \mid^4/k_0^4)^{1/2} < p\omega\}$$

При этом $k_0^2 = 4\pi/(a_1 a_2)$. Для вычисления интеграла в (2.2) перейдем к новым координатам r_1, $r_2 > 0$ и θ_1, $\theta_2 \in [0, \pi/2]$

$$k_1 = k_0\sqrt{2r_1}\cos\theta_1, \quad k_1' = k_0\sqrt{2r_2}\cos\theta_2$$
$$k_2 = k_0\sqrt{2r_1}\sin\theta_1, \quad k_2' = k_0\sqrt{2r_2}\sin\theta_2$$

Вместо четырехкратного интеграла получим двойной интеграл ($\alpha = \omega_0/\omega_R$)

$$N_c^{(p)}(\omega) \sim 2 \iint\limits_{M(p\omega/\omega_R)} dr_1 dr_2$$
$$M(z) = \{r_1 > 0, r_2 > 0; (1 + 4\alpha^2 r_1^2)^{1/2} + (1 + 4\alpha^2 r_2^2)^{1/2} < z\}$$

Еще одно интегрирование проводится элементарно. Выпишем его результат вместе с аналогичной формулой для плотности комбинационных резонансов

$$N_c^{(p)}(\omega) \sim \frac{1}{2\alpha^2} J(z), \quad \nu_c^{(p)}(\omega) = \frac{p}{2\alpha^2\omega_R}\frac{dJ(z)}{dz} \tag{4.4}$$

где использованы обозначения

$$J(z) = \int\limits_1^{z-1} \frac{\sqrt{(z-y)^2 - 1}\, y\, dy}{\sqrt{y^2 - 1}}, \quad \frac{dJ(z)}{dz} = \int\limits_1^{z-1} \frac{(z-y)\, y\, dy}{\sqrt{(y^2-1)[(z-y)^2-1]}} \tag{4.5}$$
$$z = p\omega/\omega_R$$

Интегралы в правых частях этих формул приводятся к эллиптическим, однако фактические вычисления довольно кропотливы. Пределы интегрирования в (4.5) оказались так согласованы с подынтегральными выражениями, что конечный результат выражается через полные эллиптические интегралы $\mathbf{K}(\cdot)$ и $\mathbf{E}(\cdot)$ первого и второго рода. Вводя обозначение $\zeta = (1-4/z^2)^{1/2}$, где $z > 2$, запишем результат в виде

$$J(z)=\frac{z^2}{2}\left[\mathbf{E}(\zeta)-\frac{4}{z^2}\mathbf{K}(\zeta)\right],\quad \frac{dJ(z)}{dz}=z\left[\mathbf{E}(\zeta)-\frac{2}{z^2}\mathbf{K}(\zeta)\right] \tag{4.6}$$

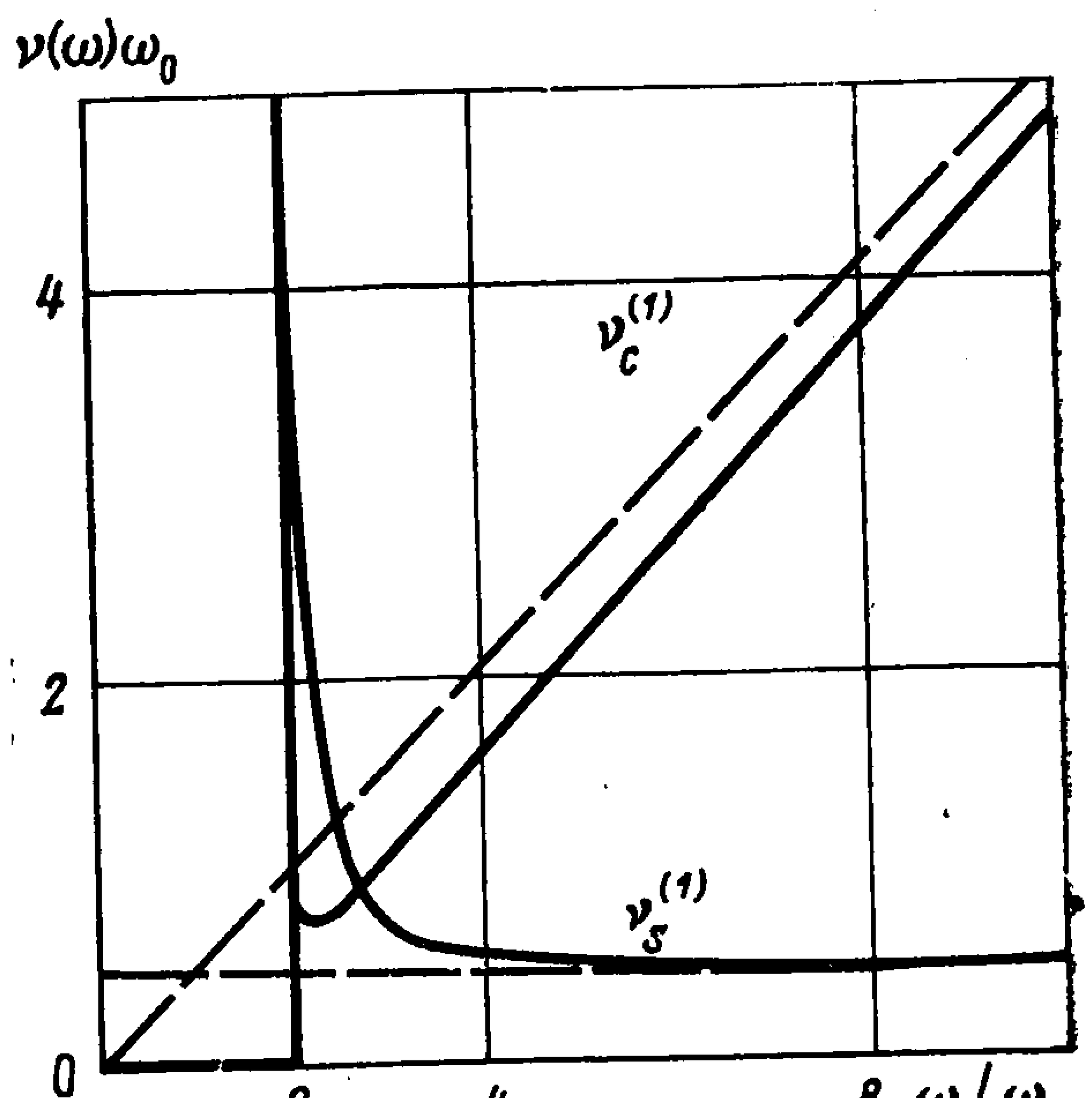
С учетом (4.4) и (4.6) получаем окончательно

$$\nu_c^{(p)}(\omega)=\frac{p^2\omega}{2\omega_0^2}\left[\mathbf{E}\left(\sqrt{1-\frac{4\omega_R^2}{p^2\omega^2}}\right)-\frac{2\omega_R^2}{p^2\omega^2}\mathbf{K}\left(\sqrt{1-\frac{4\omega_R^2}{p^2\omega^2}}\right)\right] \tag{4.7}$$

Рассмотрим два предельных случая. Первый случай — когда $\omega \downarrow 2\,\omega_R/p$, что соответствует резонансам на собственных частотах, лежащих в окрестности точки сгущения. Этот предел — конечный

$$\lim_{\omega\downarrow 2\omega_R/p}\nu_c^{(p)}(\omega)=\frac{\pi p\omega_R}{4\omega_0^2}$$

т. е. в окрестности частоты $\omega = 2\,\omega_R/p$ нет точек сгущения комбинационных резонансов. Такой вывод на первый взгляд может показаться неожиданным, поскольку у простых резонансов точки сгущения вблизи $\omega = 2\,\omega_R/p$ есть (они просто воспроизводят в кратном отношении точку сгущения собственных частот при $\omega = \omega_R$). Существенно, однако, что уже при очень небольшом удалении от частоты $\omega = 2\,\omega_R/p$ плотность комбинационных резонансов значительно выше, чем у простых резонансов. Другой предельный случай $\omega/\omega_R \to \infty$ соответствует переходу от пологой сферической панели к плоской пластине. При этом формула (4.7) переходит в формулу (3.7).



Результаты вычислений по формулам (1.6), (3.5), (3.7), (4.2) и (4.7) при $p = 1$ приведены на фигуре. Сплошные линии построены для оболочки с соотношением характерных частот $\omega_R/\omega_0 = 1$, штриховые — для аналогичной пластины, т. е. при $\omega_R/\omega_0 \to 0$. Как видно из графика, асимптотическая плотность простых резонансов у сферической оболочки больше, чем у соответствующей пластины, а асимптотическая плотность комбинационных резонансов меньше. Это объясняется тем, что спектр собственных частот у оболочки начинается с частоты ω_R, так что у собственных форм вначале не хватает пар для образования комбинационных резонансов. В этом лежит также причина отсутствия особенности у функции $\nu_c^{(1)}(\omega)$ при $\omega = 2\omega_R$. Отметим также, что отношение

$$\frac{\omega_R}{\omega_0}=\frac{a_1a_2}{Rh}\,\frac{\sqrt{12(1-\mu^2)}}{4\pi}$$

(μ — коэффициент Пуассона) может изменяться в очень широких пределах, а при $a_1 \sim a_2 \sim R$ имеет порядок R/h.

Поступила 8 V 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В.* Случайные колебания упругих систем. М., «Наука», 1979.
2. Вибрации в технике. Справочник в 6 томах (под ред. В. Н. Челомея), т. 1. Колебания линейных систем. М., «Машиностроение», 1978.
3. *Болотин В. В.* О плотности частот собственных колебаний тонких упругих оболочек. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
4. *Москаленко В. Н.* О спектрах частот собственных колебаний оболочек вращения. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.
5. *Товстик П. К.* О плотности частот колебаний тонких оболочек вращения. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.
6. *Хроматов В. Е.* Свойства спектров тонких круговых цилиндрических оболочек, колеблющихся в окрестности безмоментного напряженного состояния. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 2.
7. *Болотин В. В.* Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
8. *Жинжер Н. И.* Динамические краевые эффекты в ортотропных упругих оболочках. ПММ, 1975, т. 39, вып. 4.