

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ФОРМ РАВНОВЕСИЯ ТОНКОЙ ПОЛОГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В. В. Ларченко

(Ростов-на-Дону)

В рамках теории возмущений в форме Койтера — Фича [1, 2] рассматривается устойчивость тонкой упругой сферической оболочки с абсолютно неподвижным опорным контуром, нагруженной равномерным внешним давлением. Исследуются напряженно-деформированное состояние, устойчивость и ветвление форм равновесия, при которых несущая способность оболочки не исчерпана. Анализ ограничен давлениями вида

$$p(r) = \delta \eta(r) + p$$

Здесь δ — малый числовой параметр, $\eta(r)$ — функция полярного радиуса r , характеризующая распределение давления по меридиану оболочки, p — скалярный параметр порядка единицы, причем среди его численных значений рассматривается последовательность собственных значений соответствующей нелинейной краевой задачи, линеаризованной в окрестности осесимметричного решения.

Как известно, наблюдаются существенные расхождения между верхними критическими давлениями, полученными согласно геометрически нелинейной теории, и данными прецизионных экспериментов. Критические давления, определенные экспериментально, лежат, как правило, ниже первого (по абсолютной величине) собственного значения. Низкие критические давления получаются вследствие геометрических несовершенств срединной поверхности, образования областей в оболочке, в которых существенны физически нелинейные явления, влияния фактора «разностенности» и т. д.

Известны также данные (см., например, [3-7]), показывающие, что критические давления могут превосходить соответствующие результаты теоретических исследований. Такие результаты получаются, если нагружение производится квазистатически, отклонения в радиусе кривизны не превышают в отдельных точках поверхности оболочки 0.01%, а изменения в толщине оболочки не превышают 1.5%.

Следует отметить, что между данными прецизионных экспериментов различных авторов имеются значительные несовпадения. Во-первых, наблюдается разброс в критических давлениях, достигающий в ряде случаев 20%. Во-вторых, одни исследователи при нагружении наблюдали неосесимметричные формы потери устойчивости [3, 4, 7], другие — лишь осесимметричные формы [6]. Эти и аналогичные эксперименты позволили выдвинуть несколько гипотез.

1°. Поскольку в ходе экспериментов [3, 4] определяются критические давления, соответствующие хлопку оболочки, то, вероятно, имеет место несовпадение первого собственного значения p^* и давления p^0 , при котором происходит хлопок, т. е. в окрестности точки бифуркации p^* ответвляются неосесимметричные формы равновесия, но несущая способность оболочки не исчерпана [8]. В этом случае оболочка может воспринимать давление, превосходящее первое собственное значение. Однако в работе [9] показано, что в рассматриваемой задаче для тех значений геометрических параметров, при которых возможна неосесимметричная бифуркация, имеет место равенство $p^0 = p^*$.

2°. Согласно [10, 11], в окрестности точек бифуркации ответвляются лишь осесимметричные решения¹. В этом случае в прецизионном эксперименте критические давления должны совпадать с соответствующими точками ветвления краевой задачи нелинейной теории оболочек в осесимметричной постановке, существующие же в реальных условиях дефекты их несколько снижают. При обосновании этой точки зрения, как правило, используются результаты работы [11].

Ниже показано, что устойчивость тонкой оболочки чувствительна к виду функции $\eta(r)$: При заданном закреплении опорного контура оболочка для одних видов функции $\eta = \eta_1(r)$ теряет устойчивость в форме хлопка, при других видах $\eta = \eta_2(r)$ наблюдается бифуркация, но несущая способность оболочки не исчерпывается. Определена функция $\eta = \eta_3(r)$, для которой ответвление неосесимметричных форм от осесимметричного решения происходит без хлопка для всех точек неосесимметричной бифуркации. В реальных условиях распределение возмущающего давления зависит от конструктивных особенностей экспериментальной установки, способа нагружения и т. д. Таким образом, одной из причин расхождения в экспериментальных данных может служить то обстоятельство, что в экспериментальных исследованиях реализуются различные критические давления, отвечающие разным формам потери устойчивости.

1. Постановка задачи. Уравнения равновесия и совместности деформаций геометрически нелинейной теории пологой упругой сферической оболочки, срединная поверхность которой отождествлена с плоскостью, имеют в безразмерных переменных вид

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \mu \Delta^2 w &= L(w, \Phi) + \theta \Delta \Phi + \rho(r) \\ \mu \Delta^2 \Phi &= -\frac{1}{2} L(w, w) - \theta \Delta w, \quad \mu = h / a\gamma \ll 1 \\ L(w, \Phi) &= w'' (\Phi' / r + \Phi'' / r^2) + \Phi'' (w' / r + w'' / r^2) - \\ &- 2 (\Phi' / r - \Phi'') (w' / r - w'') / r^2 \\ () \cdot &= \partial / \partial \varphi, \quad ()' = \partial / \partial r, \quad \gamma^2 = 12(1 - \nu^2) \end{aligned}$$

Здесь w — нормальное перемещение, Φ — функция напряжения Эри, $\rho(r)$ — внешнее давление, h — толщина оболочки, a — радиус в плане, ν — коэффициент Пуассона, $\theta = a/R$ — полураствор оболочки, R — радиус кривизны, (φ, r) — полярные координаты.

Безразмерные величины, входящие в (1.1), связаны с размерными, отмеченными индексом d , по формулам (E — модуль Юнга)

$$\rho_d(r_d) = Eh^2 \rho(r) / (a^2 \gamma), \quad \Phi_d = Eha\Phi / \gamma, \quad w_d = aw, \quad r_d = ar$$

Систему уравнений (1.1) дополним граничными условиями

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \text{а) } r = 1, \quad w = w' = 0, \quad \Phi'' - \nu(\Phi' + \Phi'') &= 0 \\ \Phi''' - \nu(\Phi'' - \Phi' + \Phi''' - 2\Phi'') + 2(1 + \nu)(\Phi''' + \Phi'') + \\ + \nu\Phi - \Phi' - \Phi'' &= 0 \\ \text{б) } r = 1, \quad w = w' = 0, \quad \Phi' + \Phi'' = \Phi'' - \Phi' &= 0 \end{aligned}$$

Условия а) и б) соответствуют жесткому заземлению опорного контура и скользящему заземлению.

Функционал энергии упругой пологой сферической оболочки имеет вид

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 [\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\varphi \varepsilon_\varphi + 2\sigma_{r\varphi} \varepsilon_{r\varphi} + M_r \chi_r + \\ + M_\varphi \chi_\varphi + 2M_{r\varphi} \chi_{r\varphi}] r dr \end{aligned}$$

¹ Погорелов А. В. О формах потери устойчивости сферической оболочки. Докл. на Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Ростов-на-Дону, 1971.

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= u_1' + \theta r w' + 1/2 (w')^2, & \chi_r &= -w'' \\ r\varepsilon_\varphi &= u_1 + u_2' + 1/2 (w')^2 / r, & r\chi_\varphi &= -w' - w'' / r \\ 2r\varepsilon_{r\varphi} &= u_1 + ru_2' - u_2 + \theta r w' + w'w', & \chi_{r\varphi} &= -(w' / r)' \\ r\sigma_r &= \Phi' + \Phi'' / r, & \sigma_\varphi &= \Phi'', & r\sigma_{r\varphi} &= \Phi' / r - \Phi'' \\ \varepsilon_r &= \mu (\sigma_r - \nu\sigma_\varphi), & \varepsilon_\varphi &= \mu (\sigma_\varphi - \nu\sigma_r), & \varepsilon_{r\varphi} &= \mu (1 + \nu)\sigma_{r\varphi} \end{aligned}$$

Здесь $\{u_1, u_2\}$ — тангенциальные перемещения, $M_r, M_\varphi, M_{r\varphi}$ — радиальный, окружной и крутящий моменты.

2. Метод решения. Предположим, что при продолжении решения по параметру плотности давления δ в достаточно малой окрестности точки ветвления вектор решения $V = \{w, \Phi\}$ и δ могут быть разложены в ряды по целым степеням ξ

$$(2.1) \quad V(r, \varphi, \delta) = V_0(r, \delta) + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n V_n(r, \varphi)$$

$$\delta = \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \delta_n$$

причем представление (2.1) справедливо хотя бы в асимптотическом смысле при $\xi \rightarrow 0$. Здесь $V_0(r, \delta)$ — осесимметричная форма, от которой отходят решения, содержащие малые неосесимметричные члены $\xi^n V_n$. Для каждого из граничных условий (1.2) вектор-функция $\{w_0, \Phi_0\}$ определяется соотношением

$$V_0(r, \delta) \equiv \left\{ \int_1^r \beta(t, \delta) dt, \int_0^r \psi(t, \delta) dt \right\}$$

Здесь $\{\beta, \psi\}$ удовлетворяет нелинейным краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \mu A_r \beta &= r\theta\psi + \beta\psi + \int_0^r \rho(t) t dt \\ \mu A_r \psi &= -r\theta\beta - 1/2\beta^2 \\ \beta(0) &= 0, \quad \psi(0) = 0, \quad A_r(\cdot) = r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r(\cdot) \right] \\ \text{а) } r &= 1, \quad \beta = \psi' - \nu\psi = 0; \quad \text{б) } r = 1, \quad \beta = \psi = 0 \end{aligned}$$

Подставляя разложение (2.1) в уравнения (1.1) и граничные условия (1.2), затем последовательно удерживая члены первой и второй степени относительно ξ , получим краевые задачи для определения V_1, V_2 . Разлагая V_1 в ряд Фурье и проводя в каждом коэффициенте ряда Фурье $V_{1,n}$ замену переменных $V_{1,n}(r) = r^n Z_n(r)$, получим, что $Z_n(r) = \{W_n, F_n\}$ будут собственными вектор-функциями спектральных задач

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \mu \Delta_n^2 W_n &= T_r^n F_n + \Gamma_r^n W_n, & \mu \Delta_n^2 F_n &= -T_r^n W_n \\ Z_n^k &= 0, & r &= 0, \quad k = 1, 3 \\ \text{а) } r &= 1, & W_n &= W_n' = (c_r^n + \omega_{\nu r}^n) F_n = M_{\nu^n} F_n = 0 \\ \text{б) } r &= 1, & Z_n &= Z_n' = 0 \\ \Delta_n &= (\cdot)'' + (2n+1)/r, & T_r^n &= \theta \Delta_n + \beta' E_r^n + \beta c_r^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_r^n &= \psi c_r^n + \psi' E_r^n, \quad c_r^n = [()'' + 2n/r + (n^2 - n)/r] / r \\ E_r^n &= (n - n^2) / r^2 + ()' / r, \quad \omega_{vr}^n = v [n(n-1) - ()'] \\ M_v^n &= ()''' + 3n()'' + (n^2 - 1)(1 - v) - 3n + n(1 - n^2) \\ &\quad (1 + v) \\ \|W_n\|_{c^0} &= \mu, \quad n = 2, 3, \dots, N \end{aligned}$$

В задачах на собственные значения спектральным параметром является давление на внешней поверхности оболочки p , которое неявно входит в (2.3) через компоненты вектор-функции $\{\beta, \psi\}$.

Подставим (2.1) в (1.1), (1.2) и потребуем, чтобы невязка при $\xi \rightarrow 0$ в выполнении уравнений и граничных условий имела порядок $O(\xi^\alpha)$, $\alpha > 2$. Отсюда получим неоднородные краевые задачи в частных производных для V_2 . Анализ последних показывает, что если $p \in \{p_n\}$, где p_n — собственное значение задачи (2.3), то для каждого n V_2 представимо в виде

$$\begin{aligned} V_{2n}(r, \varphi) &= r^{2n} G_n(r) \cos 2n\varphi + \int_0^r H_n(t) dt \\ G_n(r) &\equiv \{\tau(n, r), \omega(n, r)\}, \quad H_n(r) = \{g(n, r), f(n, r)\} \end{aligned}$$

причем $\{\tau, \omega\}, \{g, f\}$ — решение следующих краевых задач:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \mu \Delta_{2n}^2 \tau &= T_r^{2n} \omega + \Gamma_r^{2n} \tau + \alpha, \quad \mu \Delta_{2n}^2 \omega = -T_r^{2n} \tau + \zeta \\ G_n^{(k)}(0) &= 0, \quad k = 1, 3 \end{aligned}$$

$$a) \quad r = 1, \quad \tau(n, r) = \tau'(n, r) = M_v^{2n} \omega(n, r) = (c_v^{2n} + \omega_{vr}^{2n}) \omega(n, r) = 0$$

$$b) \quad r = 1, \quad G_n = G_n' = 0$$

$$(2.5) \quad \mu A_r g = \theta r f + \beta f + \psi g + \Omega$$

$$\mu A_r f = -(\theta r + \beta)g + S, \quad g(0) = f(0) = 0$$

$$a) \quad r = 1, \quad g = f' - v f = 0, \quad b) \quad r = 1, \quad H_n = 0$$

$$\alpha = 1/2 \{lr^{-2} [F_n W_n'' - F_n W_n' r^{-1} - W_n (F_n' r^{-1} - F_n'')] +$$

$$+ 4nr^{-2} W_n' F_n' + r^{-1} (W_n'' F_n' + F_n'' W_n')\} + n^2 r^{-2} F_n' W_n'$$

$$\zeta = -r^{-2} [(W_n')^2 n (1 + n/2) + l W_n (W_n'' - r^{-1} W_n') / 2 +$$

$$+ r W_n' W_n'' / 2] \\ \Omega = r^{2n} \{W_n' F_n' + l [F_n W_n' + W_n F_n'] / r +$$

$$+ 2nr^{-2} l F_n W_n\} / 2 \\ S = -r^{2n} \{2nlr^{-2} W_n^2 + (W_n')^2 + 2lr^{-1} W_n' W_n\} / 4$$

$$n = 2, 3 \dots N, \quad l = n - n^2$$

Таким образом, сформулированная задача (1.1), (1.2) для каждого из граничных условий а) и б) сведена к рекуррентной последовательности, состоящей из краевых задач 1) для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (2.2); 2) задачи на собственные значения (2.3); 3) для систем линейных неоднородных уравнений (2.4), (2.5), в которых решение задачи (2.2) входит в коэффициенты, а собственная вектор-функция $\{W_n, F_n\}$ — в неоднородные части α, ζ, Ω, S .

Замечания. 1°. Решения $G_n(r)$, $H_n(r)$ известны с точностью до постоянного множителя, который определяется методом Ляпунова — Шмидта.

2°. Пусть E_2 — гильбертово пространство двумерных вектор-функций $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2), \dots$ со скалярным произведением

$$\langle x, y \rangle_{E_2} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (x_1 y_1 + x_2 y_2) r dr$$

Скалярное произведение $\langle V_1, V_j \rangle$ равно нулю при $j \geq 2$. Следовательно, выражение

$$\xi = \langle V - V_0, V_1 \rangle / \langle V_1, V_1 \rangle$$

может служить формальным определением малого параметра ξ .

Исследуем степенной ряд (2.1) для δ при некоторых ограничениях. Пусть оболочка находится под действием давления

$$\rho(r) = p + \delta \eta(r)$$

где p — равномерное внешнее давление, равное одному из собственных значений (2.3), $\eta(r)$ — достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условию

$$0 < \left| \int_0^1 g(r) \left[\int_0^r t \eta(t) dt \right] dr \right| < \infty$$

Обозначим через σ, ε, U соответственно обобщенные напряжения, деформации и перемещения, через L_1 и L_2 — линейный и квадратичный по U дифференциальные операторы. Тогда в рамках геометрически нелинейной теории в «квадратичном» приближении функция ε и ее вариация $\delta\varepsilon$ принимают вид

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \varepsilon &= L_1(U) + \frac{1}{2} L_2(U) \\ \delta\varepsilon &= L_1(\delta U) + L_{11}(U, \delta U) \end{aligned}$$

Здесь L_{11} — билинейный дифференциальный оператор. Разложим U в ряд, аналогичный (2.1). Из (2.6) имеем

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0 + \xi [L_1(U_1) + L_{11}(U_0, U_1)] + \xi^2 [L_1(U_2) + \\ &+ L_{11}(U_0, U_2) + \frac{1}{2} L_2(U_1)] + \xi^3 [L_1(U_3) + L_{11}(U_1, U_2) + \\ &+ L_{11}(U_0, U_3) + \dots] + O(\xi^4) \\ \delta\varepsilon &= \delta\varepsilon_0 + \sum_{k=1}^n \xi^k L_{11}(U_k, \delta U) + O(\xi^4) \end{aligned}$$

Преобразуем выражение (2.7), заменив U_0 ($p + \delta\eta$) отрезком его ряда Тейлора в окрестности точки $p \in \{p_n\}$. Получим

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0 + \xi \varepsilon_1 + \xi^2 \varepsilon_2 + \xi^3 \varepsilon_3 + O(\xi^4) \\ \varepsilon_0 &= L_1(U_0) + \frac{1}{2} L_2(U_0), \quad \varepsilon_1 = L_1(U_1) + L_{11}(U_0, U_1) \\ \varepsilon_2 &= L_1(U_2) + \delta_1 L_{11}(\eta U_{0,\rho}^{(1)}, U_1) + L_{11}(U_0, U_2) + \frac{1}{2} L_2(U_1) \\ \varepsilon_3 &= L_1(U_3) + \delta_2 L_{11}(\eta U_{0,\rho}^{(1)}, U_1) + \frac{1}{2} \delta_1^2 L_{11}(\eta^2 U_{0,\rho}^2, U_1) + \\ &+ \delta_1 L_{11}(\eta U_{0,\rho}^{(1)}, U_2) + L_{11}(U_1, U_2) + L_{11}(U_0, U_3) \end{aligned}$$

Здесь $(\)_{\rho}^{(k)}$, $k = 1, 2$ — производные Фреше по ρ порядка k .

Допустим, что равновесие обобщенного напряжения σ и давления p гарантируется условием

$$(2.9) \quad \int_S \sigma \delta \varepsilon ds = \int_S p \delta U ds$$

Здесь S — срединная поверхность оболочки. Тогда из (2.7)—(2.9), используя закон Гука $\sigma_i = \Gamma \varepsilon_i$, $i = 0, \dots, 3$, кинематические и статические соотношения из (1.3), сгруппируем последовательно члены при ξ^n , $n = 0, \dots, 3$ в выражении (2.9). Получим вариационные формулировки задач (2.2), (2.3) в нулевом и первом приближениях. Разложим σ_0 и U_0 в ряды Тейлора по степеням $\eta(r)\delta$. Заменяем δU на U_1 ; учитывая, что

$$\int_S \sigma_1 \varepsilon_j ds = \int_S \sigma_j \varepsilon_1 ds, \quad L_{11}(U_j, U_j) = L_2(U_j), \quad j = 1, 2, 3$$

найдем условие (2.9) в асимптотическом виде

$$(2.10) \quad \sum_{n=2}^{\infty} A_n \xi^n = 0$$

$$A_2 = \int_S \left\{ \delta_1 B_1 + \sigma_1 \left[\frac{3}{2} L_2(U_1) + L_1(U_2) + L_{11}(U_0, U_2) \right] + \right. \\ \left. + \sigma_0 L_{11}(U_2, U_1) \right\} ds$$

$$A_3 = \int_S \left\{ \delta_2 B_1 + \sigma_1 [L_{11}(U_1, U_2) + L_1(U_3) + L_{11}(U_0, U_3)] + \right. \\ \left. + \sigma_0 L_{11}(U_3, U_1) + \sigma_2 L_2(U_1) \right\} ds$$

$$B_1 = \sigma'_{0,\rho} \eta L_2(U_1) + 2\sigma_1 L_{11}(U_1, \eta U'_{0,\rho})$$

Приравнявая нулю коэффициенты при ξ^2 и ξ^3 в (2.10) и используя вариационную формулировку задачи на собственные значения, определим первые два члена разложения (2.1) для δ в виде

$$(2.11) \quad \delta_1 = 0, \quad \delta_2 = J / J_0$$

$$J = \int_0^1 \left[fS - g\Omega + \frac{1}{2} r^{4n+1} (\alpha\tau - \zeta\omega) \right] dr$$

$$J_0 = \int_0^1 \left[g(r) \int_0^r t \eta(t) dt \right] dr$$

Здесь выражение для J_0 найдено с помощью тождественных преобразований задачи (2.5) и задачи, полученной дифференцированием уравнений и граничных условий в (2.2) по параметру δ .

Из (2.11) следует, что для δ -окрестности точки ветвления p^* возможны три случая.

а) $\delta_2 > 0$. В этом случае неосесимметричное решение существует при $\delta > 0$, т. е. оболочка в состоянии выдерживать давление $p > p^*$, а неосесимметричную форму равновесия, если она энергетически выгодна, можно наблюдать в статическом состоянии. Ветвлению решения здесь отвечает явление выпучивания оболочки.

б) $\delta_2 < 0$. Бифуркация неосесимметричной формы сопровождается хлопком, а ответвившуюся форму в статической постановке наблюдать нельзя.

в) $\delta_2 \neq 0$. Для анализа потери устойчивости необходим учет последующих членов ряда (2.1) для δ .

Из (2.11) следует, что в J явно входит лишь решение задач (2.3)—(2.5), в то время как J_0 зависит и от $\eta(r)$, т. е. от способа нагружения, конструктивных особенностей используемой установки и т. д. Если $g(r)$ — знакопеременная функция, то знак δ_2 , а значит, и вид потери устойчивости зависит от распределения малого возмущающего давления $\delta\eta(r)$ по раствору оболочки в окрестности p^* .

3°. При численном интегрировании краевая задача (2.2) сводилась к двум задачам Коши ($v \equiv \{\beta(r), \psi(r)\}$)

$$1) r \in (0, 1/2), v_+'' = f(v_+', v_+, r, \theta, \mu, \rho), r = 0, v_+ = 0, v_+' = \{s_1, s_2\}$$

$$2) r \in (1/2, 1), v_-'' = f(v_-'', v_-, r, \theta, \mu, \rho)$$

$$а) r = 1, v_- = \{0, s_3\}, v_-' = \{s_4, v_{s_3}\}; б) r = 1, v_- = 0, v_-' = \{s_4, s_3\}$$

Здесь f — двумерная вектор-функция, представляющая собой правые части системы дифференциальных уравнений, разрешенных относительно старших производных, $s_1 \dots s_4$ — неизвестные параметры пристрелки; через v_+ и v_- обозначена функция v для $0 \leq r < 1/2$ и $1/2 < r \leq 1$ соответственно. Интегрирование задач 1) и 2) проводилось методом Рунге — Кутты. Параметры пристрелки найдены методом Ньютона из условия сопряжения

$$r = 0.5, \varepsilon \ll 1, \|v_+^{(k)}(s_1, s_2) - v_-^{(k)}(s_3, s_4)\|_{R^2} < \varepsilon, \quad k = 0, 1$$

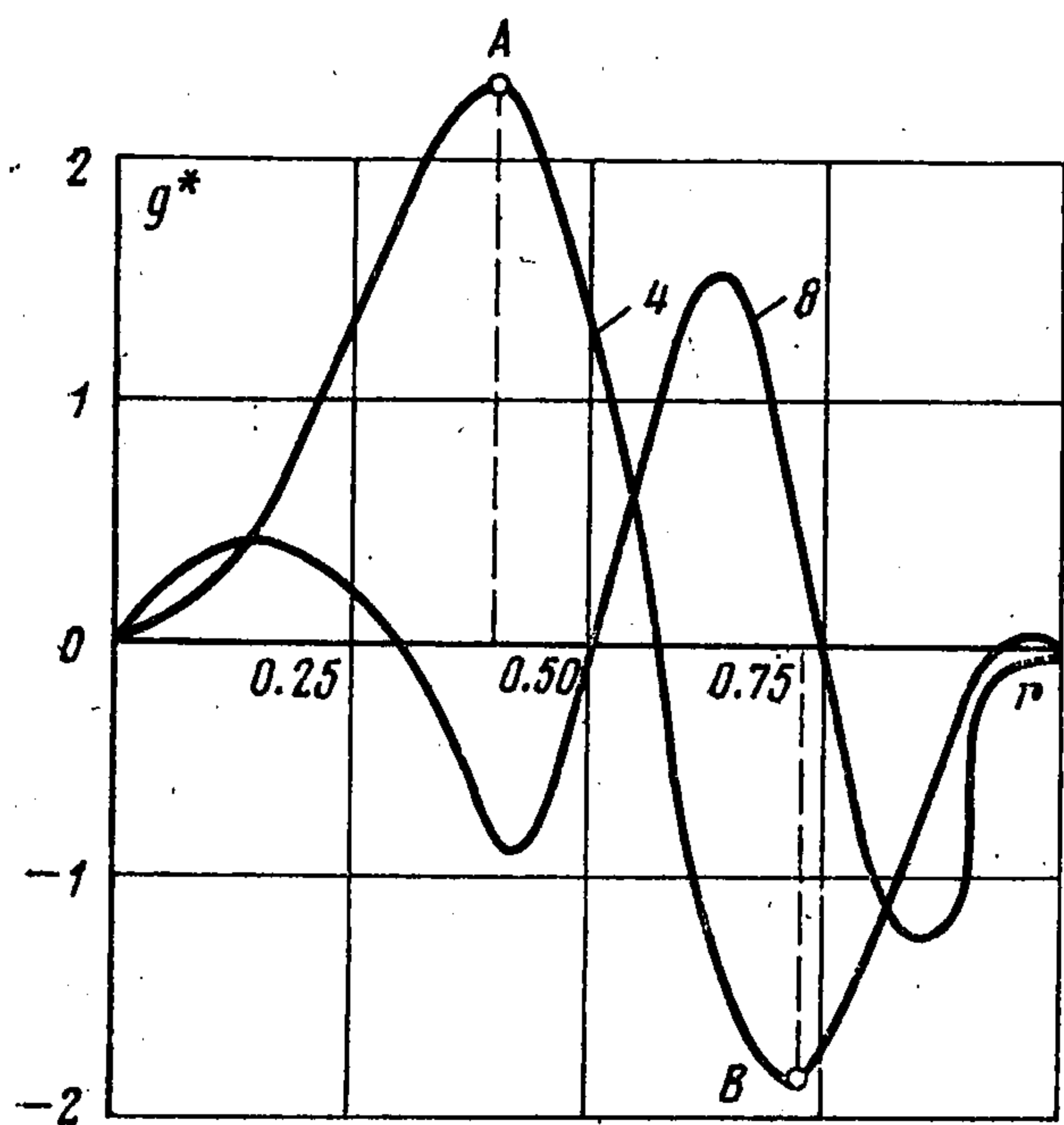
Аналогично решались линейные задачи (2.3)—(2.5). Причем при интегрировании задач Коши типа 1) и 2) для систем (2.3), (2.4) использовалась процедура С. Г. Годунова повышения точности расчета [12]. Количество точек, в которых проводилась ортогонализация Грама — Шмидта, принималось равным восьми. Координаты их r_i ($i = 1 \dots 8$) определялись автоматически из условия $\|W_n(r_i)\|_{C^0} > m$ ($m = 0,3$). При анализе задач (2.3)—(2.5) численно строилась система линейно-независимых векторов, а затем из их линейной комбинации находилось общее решение. Собственное значение определялось из обращения в нуль соответствующего определителя.

4°. При $r \rightarrow 0$ коэффициенты уравнений имеют особенность, поэтому для $r \in [0, \Delta r]$ решение задач (2.2)—(2.5) заменялось отрезком ряда Тейлора. Величина Δr изменялась в пределах 0.11—0.27.

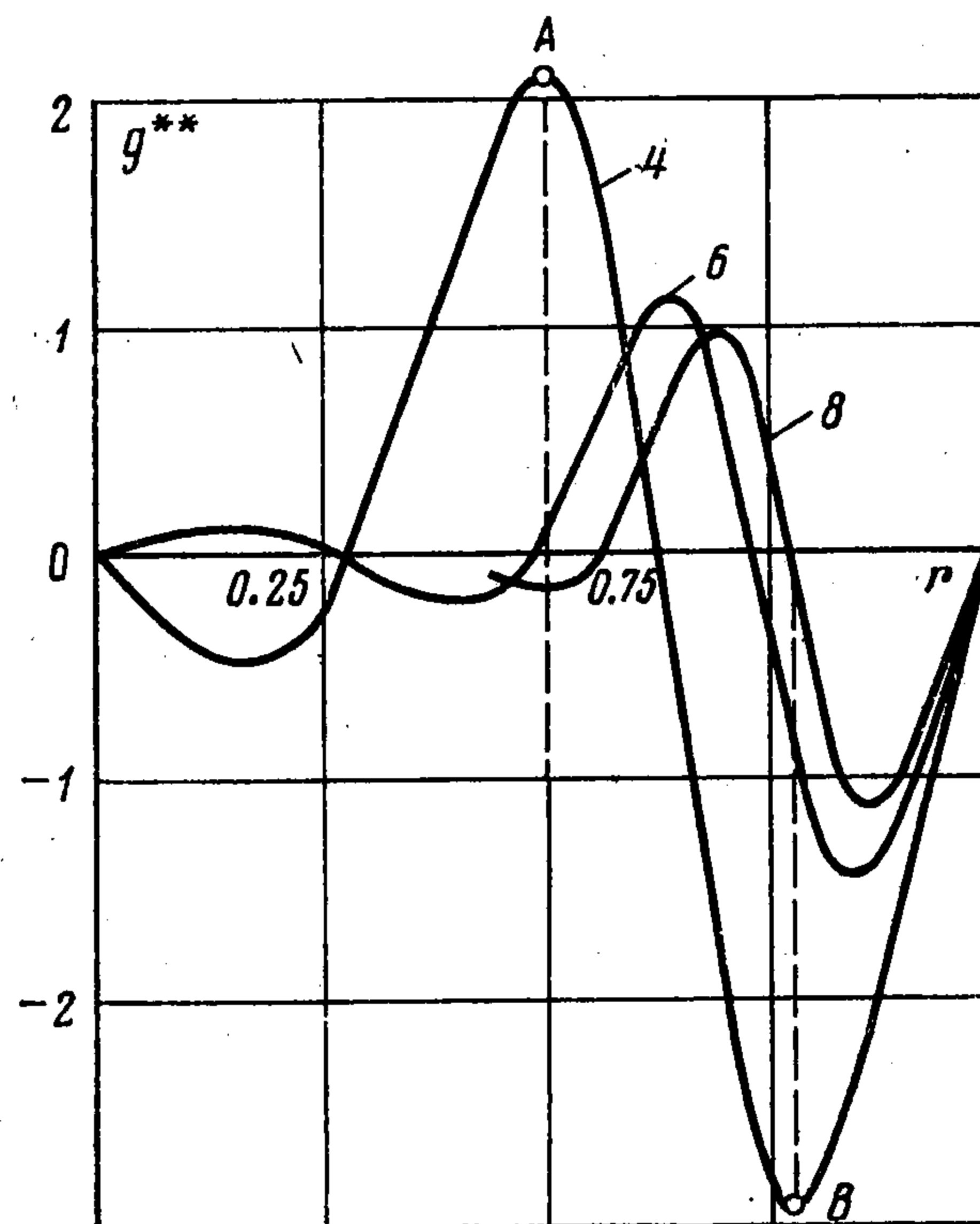
3. Численные результаты. В расчетах принято $\nu = 0.3$. На фиг. 1 и 2 приведены соответственно функции $g^*(r) = 1.66 \cdot 10^3 g(r)$ и $g^{**}(r) = 3.33 \cdot 10^2 g(r)$ для жесткого и подвижного защемлений. Номера кривых соответствуют номеру собственного значения. Кривая 4 на фиг. 1 соответствует значениям параметров $\lambda = 8.52$, $p = 0.76$, кривая 8 — $\lambda = 14$, $p = 0.78$ (здесь и далее $\lambda^2 = \theta / \mu$). На фиг. 2 $n = 4$, $\lambda = 11$, $p = 0.34$; $n = 6$, $\lambda = 16$, $p = 0.32$; $n = 8$, $\lambda = 19$, $p = 0.30$. Видно, что для рассматриваемых краевых условий $g(r)$ — осциллирующая функция, число нулей которой тем больше, чем больше λ . При больших λ (см., например, кривые 6, 8 на фиг. 2) функция $g(r)$ имеет выраженный краевой эффект, в частности, с ростом λ точки максимального и минимального значений смещаются к опорному контуру. Следовательно, сферическая оболочка в окрестности собственных значений задачи (2.3) весьма чувствительна к виду возмущающего давления. В оболочке существуют две области (для рассматриваемого меридиана это окрестности точек A и B), в которых изменение $\eta(r)$ особенно сильно влияет на способ потери устойчивости.

Для тонких оболочек поведение $\eta(r)$ существенно прежде всего в зоне краевого эффекта.

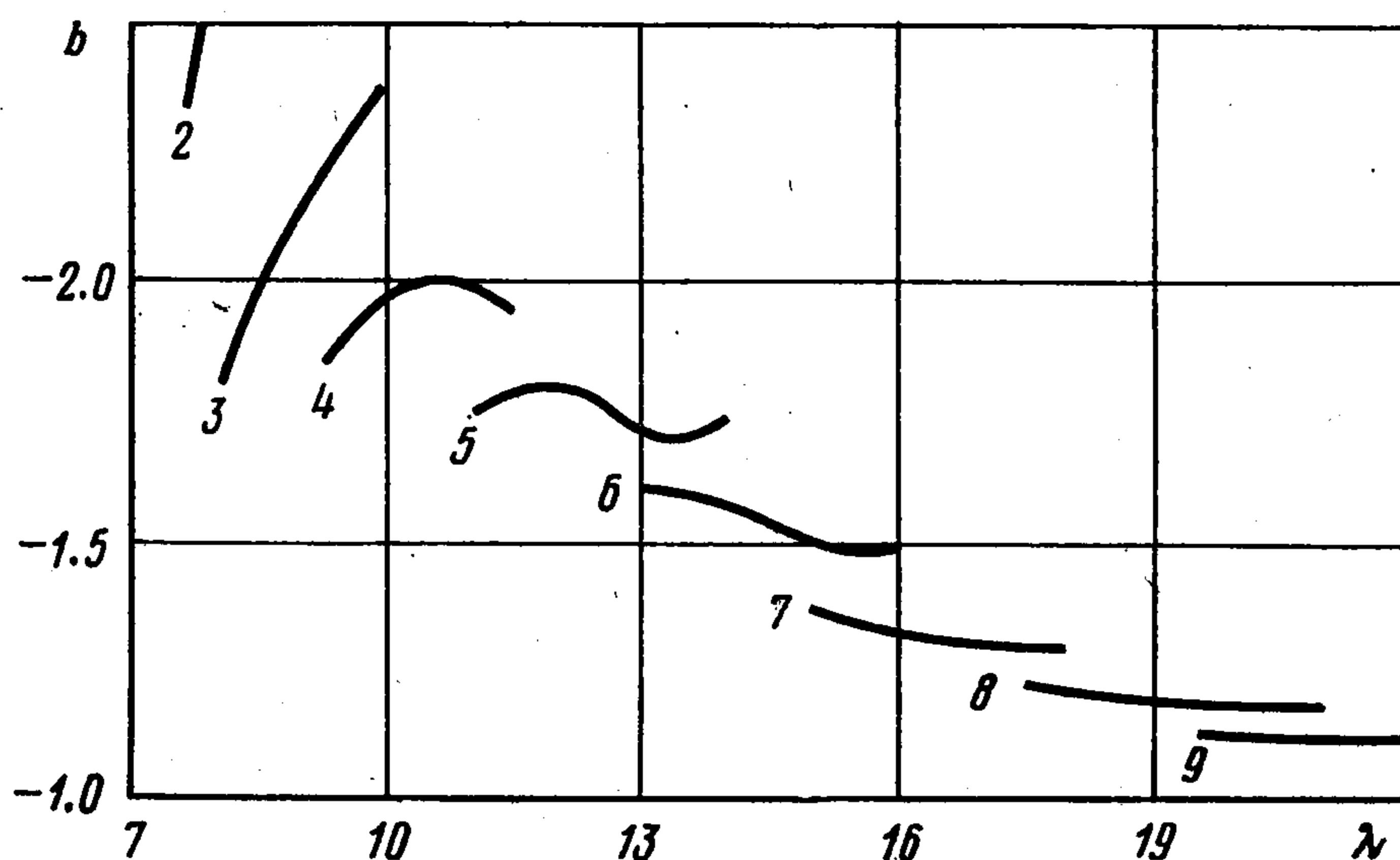
На фиг. 3 показана зависимость параметра Койтера $b = 5 \cdot 10^5 \delta_2$ от λ для задачи (2.3), б) — (2.5), б). Здесь номера кривых соответствуют номеру собственного значения n , $\eta(r) \equiv 1$. Видно, что при фиксированном



Фиг. 1



Фиг. 2



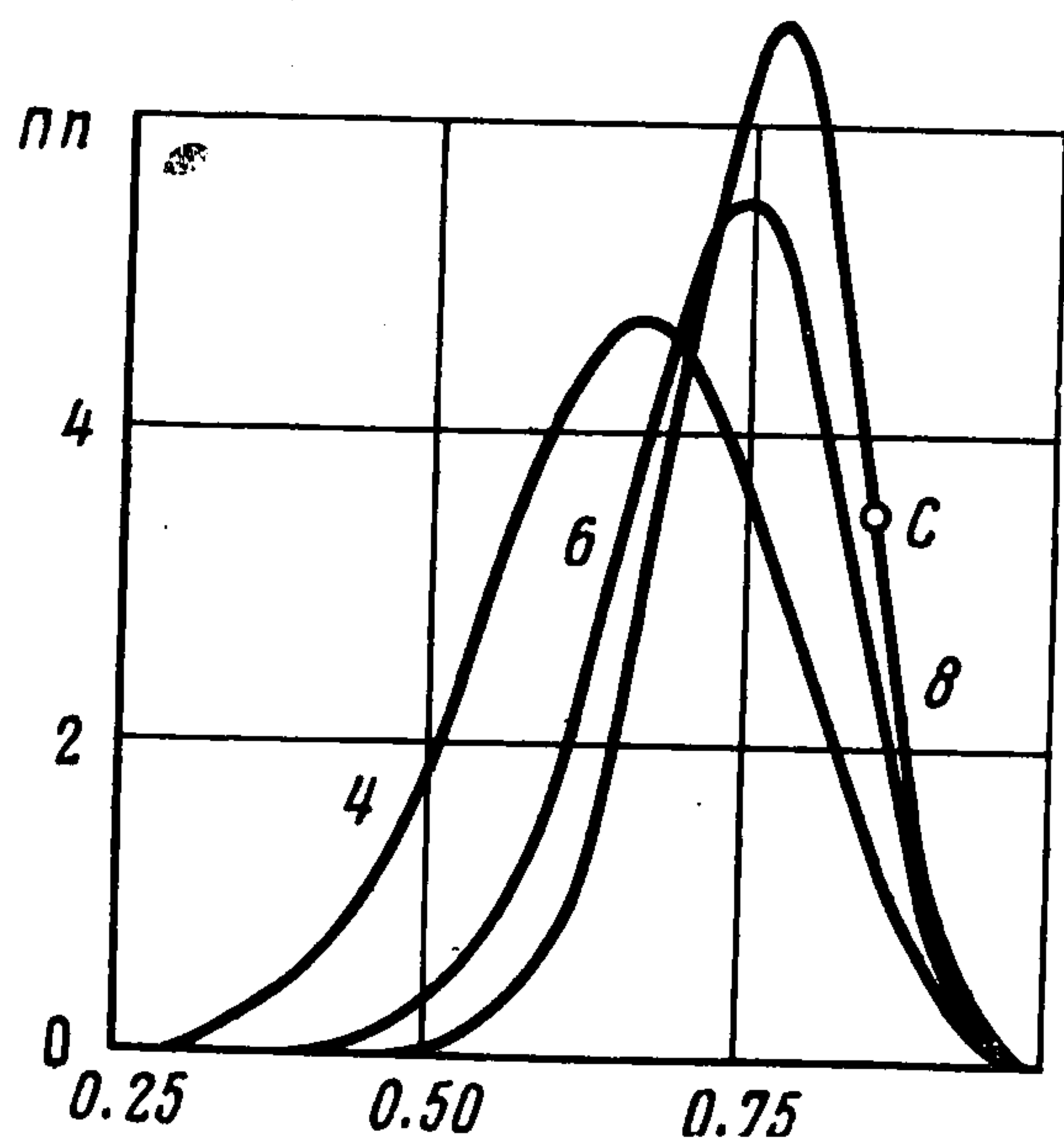
Фиг. 3

n и b — отрицательная непрерывная функция λ . Функция $b(\lambda)$ многозначная, ее ветви определяются выбором n . В исследуемой области переход от одной ветви к другой возможен лишь скачком, минимальная величина которого уменьшается с возрастанием λ . Из результатов, приведенных на фиг. 3, следует, что оболочки с подвижным заземленным опорным контуром теряют устойчивость хлопком, когда $7.6 \leq \lambda \leq 21$.

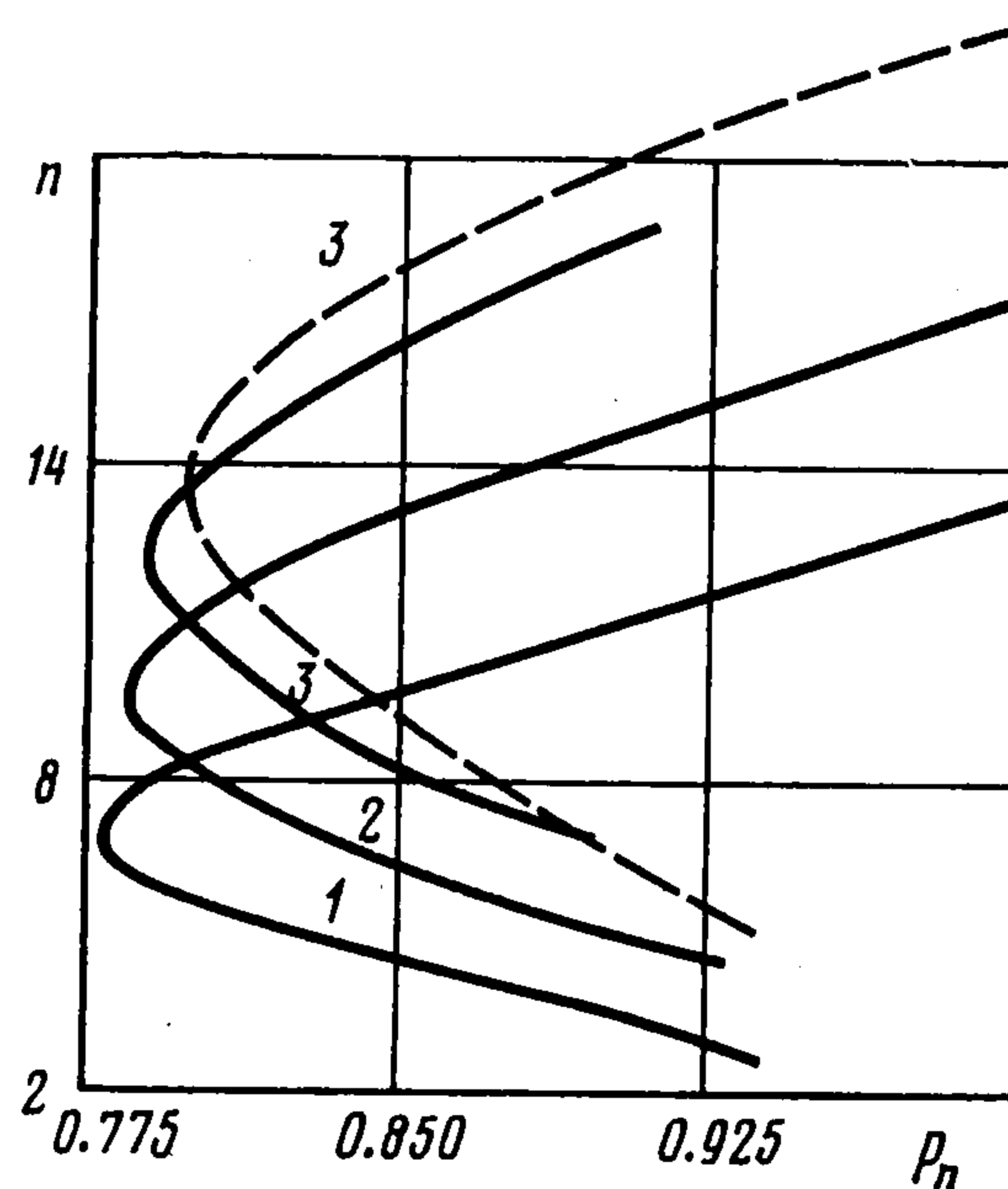
На фиг. 4 приведены прогибы $\pi_n = 10^5 e_n r^n W_n$ ($e_8 = 5/2$, $e_6 = 5/12$, $e_4 = 5/6$). Условия закрепления и численные значения n , λ , p здесь те же, что и в примере, проиллюстрированном на фиг. 2.

В ряде случаев при асимптотическом анализе уравнений Маргерра—Власова используется предположение, что в зоне опорного контура шириной $O(\mu |\ln \mu|)$ имеет место соотношение $|w_{\varphi}''| \ll |w_r'|$. Проверка его в какой-либо точке зоны краевого эффекта, например в точке C , показывает, что $|w_{\varphi}''| > |w_r'|$. Следовательно, отмеченное допущение может вносить значительную погрешность в асимптотический анализ оболочек с конечным, хотя и большим λ ($\lambda \sim 20$).

Распределение собственных значений задачи (2.3), а) характеризуют зависимости $n(p_n)$, приведенные на фиг. 5. Сплошные линии — данные численного расчета, штриховая линия — результат асимптотического



Фиг. 4



Фиг. 5

интегрирования спектральной задачи (см. пп. 1, 2). Здесь в асимптотическом анализе не накладывалось ограничений на количество волн в окружном направлении [13] ¹⁾. Кривые, обозначенные цифрами 1, 2, 3, соответствуют значениям $\lambda = 12, 15, 18$. Из результатов, приведенных на фиг. 5, следует, что на поверхности оболочки могут появляться быстро и слабо осциллирующие волны, описываемые двумя ветвями функции $n(p_n)$. При этом количество волн, соответствующее одной ветви, с ростом давления возрастает, другой — убывает. Методом Ляпунова — Шмидта строились малые неосесимметричные формы равновесия для каждого p_n . Оказалось, что если p_n — простое собственное значение, то от осесимметричной формы ответвляются две неосесимметричные формы равновесия, содержащие одинаковое число мод в окружном направлении, но точки их максимальных нормальных перемещений сдвинуты в окружном направлении на фазу $\alpha = \pi/n$. Исследования неосесимметричных форм для каждой точки спектра $\{p_n\}$ показали, что для $\lambda \leq 22$ количество ответвившихся неосесимметричных решений, имеющих разное число мод, немонотонно возрастает с увеличением λ , а для больших λ определяется

¹⁾ Ларченко В. В. Нелинейная устойчивость и оценка эффективности асимптотического метода в упругих сферических оболочках при различных граничных условиях. Автореф. канд. дис., Ростов-на-Дону, 1977.

асимптотической формулой

$$\lambda \rightarrow \infty, \quad N \sim [1.33\lambda]$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа. Если λ фиксировано, p — краткое значение и принадлежит началу спектра $\{p_n\}$, тогда от осесимметричного решения ответвляется не более двух форм, содержащих разное число неосесимметричных мод. При этом, если $p = \min_n \{p_n\}$, то числа волн в окружном направлении, относящиеся к двум разным формам, отличаются друг от друга на единицу. Если первое собственное значение простое, а λ достаточно велико, то отвечающее ему количество волн может быть получено асимптотическим методом. Это подтверждает сравнение численных [13, 14] и асимптотических результатов. Последнее приводит к асимптотической формуле для количества волн вида

$$\lambda \rightarrow \infty, \quad n \sim [0.808\lambda]$$

Сравнение полученных асимптотических результатов с результатами нелинейной теории в неосесимметричной постановке показывает, что для всех λ , у которых имеет место неосесимметричная бифуркация, первое критическое давление задачи (2.3), а) определяется асимптотическим методом с погрешностью менее 6%.

Отметим, что разница между p_n и p_{n+1} в начале спектра, как правило, значительно меньше аналогичной величины вдали от первого собственного значения. Это справедливо также для задачи (2.3), б).

Исследуем начальное закритическое деформирование оболочек, когда $\lambda = 8.3$ и 7.89. Для первой оболочки критическое давление, определенное экспериментальным путем в работе [5], равно 0,915, для второй — 1.010 [3]. Численный анализ спектра $\{p_n\}$ привел к следующим данным: $\lambda = 8.3$, $p_2 = 0,915$, $p_3 = 0.782$, $p_4 = 0.757$, $p_5 = 0.790$, $p_6 = 0.854$, $p_7 = 0.933$, $p_8 = 1,015$, $p_9 = 1,087$; $\lambda = 7.89$, $p_2 = 0.867$, $p_3 = 0.760$, $p_4 = 0.761$, $p_5 = 0.812$, $p_6 = 0.890$, $p_7 = 0.978$, $p_8 = 1.058$. Видно, что если $\lambda = 8.3$, то спектр состоит из восьми точек, если $\lambda = 7.89$ — из семи точек. Для первой оболочки наименьшее собственное значение 0.757 достигается при $n = 4$, для второй — при $n = 3$, причем оба эти значения меньше соответствующих экспериментальных критических давлений. Учтем, что в эксперименте возмущающее давление неравномерное. Аппроксимируем функционал J_0 в (2.11) следующим образом:

$$(3.1) \quad J_0 = \int_0^1 g(r) r^2 [1 + a_1 \operatorname{th} M(m-r)] dr, \quad M = 10$$

Численный анализ показал, если $a_1 = 1$ и $m = 0.3$, то бифуркация неосесимметричных форм для этих оболочек при достижении первых собственных значений осуществляется без хлопка, так как $\delta_2 = J/J_0$, при этом оболочки могут выдерживать давления, превышающие соответственно p_4 и p_3 . В таких случаях неосесимметричные формы реализуются в эксперименте, если они энергетически выгодны. Для $\lambda = 8.3$ ветвление сопровождается хлопком лишь при $n = 9$, а для $\lambda = 7.89$ хлопок происходит при достижении точки ветвления решений, отвечающей критическому давлению геометрически нелинейной теории в осесимметричной постановке. Если для $\lambda = 8.3$ и $m = 0.3$ монотонно уменьшать a_1 от 1.022 — ε (здесь $\varepsilon > 0$ — малый скалярный параметр) до 0.633 — ε , то хлопок будет происходить последовательно при $n = 9, 8, 6, 5, 4, 2, 7, 3$. Если $a_1 = 0.721 - \varepsilon$, то бифуркация сопровождается хлопком уже на первом собственном значении $p_4 = 0.757$, а неосесимметричные формы в статическом состоянии не наблюдаются. Аналогичный анализ для $7.6 \leq \lambda \leq 20.7$ показал, что, как правило, параметры Койтера, соответствующие быстро осциллирующим волнам, более

чувствительны к изменению a_1 , чем параметры, соответствующие медленно осциллирующим волнам.

В ряде случаев в прецизионном эксперименте наблюдались осесимметричные формы равновесия [6]. Сравнительный анализ численных результатов с данными работы [6] показал, что экспериментальные значения для нормального перемещения качественно согласуются с результатами счета. Так, для $\theta = 0.2$, $h = 1.3$ мм, $a = 150$ мм, $\nu = 0.4$, $p = 0.79$ нормальное перемещение w_d в полюсе оболочки равно 0.225 мм, замеренное в эксперименте — 0.21 мм. Для точки, в которой перемещение принимает свое максимальное значение, эти величины равны соответственно 0.43 и 0.48 мм. Для $90 \text{ мм} \leq r_d \leq 150 \text{ мм}$ не обнаружено расхождений между результатами счета и прецизионного эксперимента. Для точек, в которых наблюдается резкое изменение прогиба оболочки, экспериментальные значения перемещений превышают расчетные на ~30%.

Для этой же оболочки при $p = 0.94$ сравнивались деформации ε_r и ε_φ . Здесь результаты измерений на ~15% лежат либо выше, либо ниже расчетных данных — в зависимости от координаты исследуемой точки.

Обратим внимание на интересный факт, обнаруженный в эксперименте [6] и подтвержденный численным анализом. Достаточно тонкая оболочка с жестко защемленным краем растягивается в окружном направлении в малой зоне у опорного контура.

Поступила 3 IX 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Koiter W. T. Over de stabiliteit van het elastisch even wicht. Thesis. Amsterdam — Paris, 1945.
2. Fitch J. R. The buckling and post-buckling behavior of spherical caps under concentrated load. Internat. J. Solids and Structures, 1968, vol. 4, No. 4, p. 421—466.
3. Krenzke M. A., Kiernan T. J. Elastic stability of near-perfect shallow spherical shells. AIAA J., 1963, vol. 1, No. 12.
4. Parmeter R. R. The buckling of clamped shallow spherical shells under uniform pressure. California Institute of Technology Rept. AFOSR, No. 5362, 1963.
5. Loo T. C. Stability of shallow spherical shells under the action of the system of loading consisting of uniform pressure and concentrated load at the apex. Ph. D. Dissertation, Syracuse Univ., 1964.
6. Sunakawa M., Ichida K. A high precision experiment on the buckling of spherical caps subjected to external pressure. Univ. of Tokyo, 1974, Report No. 508.
7. Tillman S. C. On the buckling behavior of shallow spherical caps under a uniform pressure load. Internat. J. Solids and Structure, 1970, vol. 6, No. 1.
8. Thurston G. A. Asymmetrical buckling of spherical caps under uniform pressure. AIAA J., 1964, vol. 2, No. 10.
9. Fitch J. R., Budiansky B. Buckling and postbuckling behavior of spherical caps under axisymmetrical load. AIAA J., 1970, vol. 8, No. 4.
10. Погорелов А. В. Исследование потери устойчивости сферической оболочки под внешним давлением. Докл. АН СССР, 1971, т. 200, № 4.
11. Срубцик Л. С. О потере устойчивости несимметричных строго выпуклых тонких пологих оболочек. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
12. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Успехи матем. наук, 1961, т. 16, вып. 3.
13. Huang Nai-Chien. Unsymmetrical buckling of thin shallow spherical shells. Trans ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1964, vol. 31, No. 3.
14. Валишвили Н. В. Методы расчета оболочек вращения на ЭВМ. М., «Машиностроение», 1976.