Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 6, 1980

УДК 539.3

ОБ ОБОБЩЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ РАВНОВЕСИЯ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ

Л. П. Лебедев

(Ростов-на-Дону)

Изучается «неэнергетическая» постановка краевых задач статики упругой полосы, основанная на принципе возможных перемещений. Она позволяет, в частности, рассмотреть задачи о полосе с бесконечной энергией, сохраняя внешнюю форму «энергетической» постановки [1-3], и получить однозначную разрешимость задачи при менее жестких условиях на внешние нагрузки. Такая постановка возможна и для других задач теории упругости.

1. Для бесконечной упругой полосы Ω единичной толщины $-\infty < x_1 < \infty$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 1$ с жестко зажатой нижней стороной $x_2 = 0$ принцип возможных перемещений имеет вид

$$\int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}\delta e_{ij}\, dx_1\, dx_2 = \int\limits_{\Omega} F_i \delta u_i\, dx_1\, dx_2 + \int\limits_{\Gamma} f_i \delta u_i\, dx_1 \tag{1.1}$$

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}e_{kl}, \quad e_{kl} \equiv e_{kl}(\mathbf{u}) = {}^1/_2(u_{k,\,l} + u_{l,\,k}), \quad \delta e_{ij} = e_{ij}(\delta \mathbf{u})$$

где F_i — внешние нагрузки, f_i — нагрузка, действующая на верхней стороне Γ полосы, E_{ijkl} — симметричный тензор упругих постоянных, относительно которых, как функций координат x_1, x_2, предполагается ограниченность, измеримость по Лебегу и равномерная положительная определенность на полосе [3]

$$E_{ijkl}\gamma_{kl}\gamma_{ij} \geqslant m\gamma_{ij}\gamma_{ij}, \quad m = \text{const} > 0, \quad \gamma_{12} = \gamma_{21}$$

Возможные перемещения $\delta\mathbf{u}$ должны вместе с перемещениями $\mathbf{u}\,(u_1, u_2)$ удовлетворять условиям

$$u_i|_{x_2=0} = \delta u_i|_{x_2=0} = 0 \quad (i = 1, 2) \tag{1.2}$$

Принцип возможных перемещений требует, чтобы уравнение (1.1) выполнялось для всех возможных перемещений $\delta\mathbf{u}$, удовлетворяющих условиям закрепления полосы. В энергетической постановке задачи [3] $\delta\mathbf{u}$ выбираются из класса функций с «конечной энергией». Это налагает определенные ограничения на внешние данные задачи, при которых легко доказывается обобщенная разрешимость задачи в «энергетическом» классе функций [3]. При этом из рассмотрения выпадают задачи с неубывающей на бесконечности нагрузкой, в частности с периодической. В данной статье класс возможных перемещений сужен, что приводит к расширению класса возможных нагрузок F_i, f_i. Предварительно излагается математический аппарат.

2. Известные результаты П. Д. Лакса ([4], стр. 142—145) по построению негативных соболевских пространств допускают абстрактное обобщение, которое понадобится ниже. Соответствующие доказательства при этом изменяются мало. Терминология берется из [4].

Пусть $\mathbf{X}$ — рефлексивное комплексное или действительное банахово пространство, а $\mathbf{Y}$ — нормированное пространство. Далее, пусть $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$— полуторалинейный непрерывный по $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ функционал, т. е. для любых комплексных чисел α_k, β_k

$$B(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = \alpha_1 B(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \alpha_2 B(\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$$
$$B(\mathbf{x}, \beta_1\mathbf{y}_1 + \beta_2\mathbf{y}_2) = \bar\beta_1 B(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + \bar\beta_2 B(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)$$
$$|B(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leqslant m_1 \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|.$$

Здесь и далее m_k — некоторые положительные постоянные.

Наконец, пусть для каждого элемента $\mathbf{x}_1 \in \mathbf{X}$ существует $\mathbf{y}(\mathbf{x}_1) \in \mathbf{Y}$, а для каждого $\mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ существует $\mathbf{x}(\mathbf{y}_2) \in \mathbf{X}$, такие, что

$$B(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}(\mathbf{x}_1)) > 0, \quad B(\mathbf{x}(\mathbf{y}_2), \mathbf{y}_2) > 0, \qquad \mathbf{x}_1 \neq 0, \ \mathbf{y}_2 \neq 0$$

Каждый фиксированный элемент $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, согласно сказанному выше, определяет непрерывный линейный функционал на пространстве $\mathbf{X}$: $f_y(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. При этом норма его

$$\|f_{\mathbf{y}}\| = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leqslant 1} |B(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leqslant m_1 \|\mathbf{y}\|$$

На пространстве $\mathbf{Y}$ вводится негативная норма

$$\|\mathbf{y}\|_{\mathbf{Y}^-} = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leqslant 1} |B(\mathbf{x}, \mathbf{y})|$$

Тогда $\|f_{\mathbf{y}}\| = \|\mathbf{y}\|_{\mathbf{Y}^-}$

Пополнение пространства $\mathbf{Y}$ по негативной норме называется пространством $\mathbf{Y}^-$.

Теорема 2.1. Совокупность $\mathbf{X}_s'$ всех ограниченных линейных функционалов на $\mathbf{X}$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие с пополненным пространством $\mathbf{Y}^-$, при котором норма сохраняется.

Доказательство. Множество $\mathbf{F}$ всех ограниченных линейных функционалов вида $f(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, заданных на $\mathbf{X}$, плотно в $\mathbf{X}_s'$. Действительно, множество $\mathbf{F}$ тотально на $\mathbf{X}$, т. е. из того, что $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ при всех $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, следует, что $\mathbf{x} = 0$. Если $\mathbf{F}$ не плотно в $\mathbf{X}_s'$, то в $\mathbf{X}_{ss}''$ (втором сильно сопряженном пространстве) найдется такой функционал $T \neq 0$, что $T(f_{\mathbf{y}}) = 0$ для всех $f_{\mathbf{y}} \in \mathbf{F}$. В силу рефлексивности $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{ss}''$, поэтому существует элемент $\mathbf{t} \in \mathbf{X}$, такой, что $T(f) = f(\mathbf{t})$ для всех $f \in \mathbf{X}_s'$. Поэтому $T(f_y) = f_y(\mathbf{t}) = 0$, откуда $\mathbf{t} = 0$, что невозможно.

Соответствие между $f_y \in \mathbf{F}$ и $y \in \mathbf{Y}^-$ сохраняет норму и взаимно однозначно. Так как $\mathbf{F}$ плотно в $\mathbf{X}_s'$, то отсюда и вытекает теорема.

Анализ доказательства теоремы 2.1 приводит к другой ее формулировке. В этой формулировке она аналогична теореме Рисса о представлении непрерывного линейного функционала в гильбертовом пространстве.

Теорема 2.2. Каждый непрерывный линейный функционал $f(\mathbf{x})$, заданный на пространстве $\mathbf{X}$, однозначно представим в виде $f(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{y}_f)$, $\mathbf{y}_f \in \mathbf{Y}^-$, причем $\|f\| = \|\mathbf{y}_f\|$.

Теорема 2.3. Всякий непрерывный линейный функционал $g(\mathbf{y})$ на пространстве $\mathbf{Y}^-$ однозначно представим в виде

$$g(\mathbf{y}) = \overline{B(\mathbf{x}_g, \mathbf{y})}$$

при помощи элемента $\mathbf{x}_g \in \mathbf{X}$.

Перенос доказательства соответствующей теоремы П. Д. Лакса [4] производится как и в теореме 2.1, и потому здесь не приводится. Кроме того, теорема 2.3 здесь непосредственно не используется.

Далее пространства и функционалы конкретизируются.

Пространство X (h) — весовое энергетическое пространство вектор-функций $\mathbf{u}\,(u_1, u_2)$ с нормой

$$\|\mathbf{u}\|^2_{X(h)} = \int\limits_\Omega \sigma_{ij} e_{ij} h^2(x_1)\,dx_1\,dx_2$$

где $\mathbf{u}$ удовлетворяет условию (1.2), а «вес» $h(x_1) > 0$ — гладкая функция и $h(x_1) \to \infty$ при $|x_1| \to \infty$. Дополнительно предполагается, что

$$0 < m_2 < h(E(x_1))\,h^{-1}(x_1) < m_3 \tag{2.1}$$

Тем самым рост $h(x_1)$ на бесконечности может быть экспоненциальным. В (2.1) $E(x_1)$ — целая часть числа x_1.

Имеет место следующая лемма, доказательство которой приводится в п. 4.

Лемма 2. 1. Пространство X (h) — гильбертово. Для любой вектор-функции $\mathbf{u}\,(u_1, u_2)$ имеет место неравенство

$$C(\mathbf{u}) \equiv \left(\int\limits_\Omega \frac{|\mathbf{u}|^p h^r\,dx_1\,dx_2}{(1+|x_1|)^\gamma}\right)^{1/p} + \left(\int\limits_\Gamma \frac{|\mathbf{u}|^p h^r\,dx_1}{(1+|x_1|)^\gamma}\right)^{1/p} + \\ + \left(\int\limits_\Omega h^2 u_{i,j} u_{i,j}\,dx_1\,dx_2\right)^{1/2} \leqslant m(p)\,\|\mathbf{u}\|_{X(h)} \tag{2.2}$$

где постоянная $m(p)$ не зависит от $\mathbf{u}$, а постоянные $r = p$, $\gamma = 0$ при $p \geqslant 2$, и $r = 2$, $\gamma = 2(2-p)^{-1} + \varepsilon$ при $1 \leqslant p < 2$, где $\varepsilon > 0$ и любое.

Соответствующая лемма при $h(x_1) = 1$ имеется в [3].

Плотным множеством в X (h) является множество гладких вектор-функций, обращающихся в нуль при $|x_1| > R$, где R — своя постоянная для каждой вектор-функции.

Если обозначить через Y (h) пространство X (1) и ввести билинейный функционал

$$B_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int\limits_\Omega \sigma_{ij}(\mathbf{v})\,e_{ij}(\mathbf{u})\,dx_1\,dx_2$$

то можно проверить, что для тройки X (h), Y (h), $B_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ выполнены все условия, при которых доказана теорема 2.2. Путем пополнения множества вектор-функций $\mathbf{v} \in$ Y (h) в норме

$$\|\mathbf{v}\|_{Y^-(h)} = \sup_{\|\mathbf{u}\|_{X(h)} \leqslant 1} \int\limits_\Omega \sigma_{ij}(\mathbf{v})\,e_{ij}(\mathbf{u})\,dx_1\,dx_2$$

вводится пространство $Y^-(h)$.

Лемма 2.2. Всякий непрерывный линейный функционал на пространстве X (h) однозначно представим (по теореме 2.2) в виде

$$\int\limits_\Omega \sigma_{ij}(\mathbf{v}^\circ)\,e_{ij}(\mathbf{u})\,dx_1\,dx_2, \quad \mathbf{u} \in X(h)$$

где $\mathbf{v}^\circ \in Y^-(h)$.

Элементами пространства $\mathbf{Y}^-(h)$ служат измеримые вектор-функции, имеющие первые обобщенные производные, суммируемые с квадратом по любой конечной части полосы Ω. Действительно пусть $\chi(x_1)$ — бесконечно дифференцируемая функция со следующими свойствами: $\chi(x_1) = 1$ при $|x_1| \leqslant N$ и $\chi(x_1) = 0$ при $|x_1| \geqslant N + 1$, где N — произвольное фиксированное число. Для любого элемента $\mathbf{v} \in \mathbf{Y}^-(h)$ элемент $\chi\mathbf{v}$ также принадлежит $\mathbf{Y}^-(h)$ и совпадает при $|x_1| \leqslant N$ с $\mathbf{v}$.

Замыкание множества элементов вида $\chi\,\mathbf{u} \in \mathbf{X}(h)$ в норме $\mathbf{X}(h)$ образует подпространство в $\mathbf{X}(h)$, обозначенное $\mathbf{X}(h, N)$. Функционал $B_1(\chi\mathbf{v}, \mathbf{u})$ на $\mathbf{X}(h, N)$ по переменной $\mathbf{u}$ непрерывен и в силу неравенства Корна [3] представляет собой скалярное произведение на $\mathbf{X}(h, N)$. Поэтому $\chi\mathbf{v} \in \mathbf{X}(h, N)$. Отсюда и вытекает сказанное выше.

3. *Определение* 3.1. Обобщенным решением задачи о равновесии полосы называется вектор-функция $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{Y}^-(h)$, удовлетворяющая уравнению (1.1) для всех $\delta\mathbf{u} \in \mathbf{X}(h)$.

Таким образом, в основе определения обобщенного решения положен принцип возможных перемещений.

Теорема 3.1. Пусть выполнено условие (2.1) и

$$\left(\int_\Omega |F_i|^{p-1/p} \left(\frac{(1+|x_1|)^\gamma}{h^r(x_1)}\right)^{1/p-1} dx_1\, dx_2\right)^{p/p-1} \equiv A_1(\mathbf{F}) < \infty$$

$$\left(\int_\Gamma |f_i|^{p-1/p} \left(\frac{(1+|x_1|)^\gamma}{h^r(x_1)}\right)^{1/p-1} dx_1\right)^{p/p-1} \equiv A_2(\mathbf{f}) < \infty$$

где соотношения между постоянными r, γ, p заданы в формулировке леммы 2.1. Тогда задача о равновесии упругой полосы имеет единственное обобщенное решение, введенное определением 3.1.

Доказательство. Неравенство Гельдера и лемма 2.1 приводят к следующему неравенству:

$$\left|\int_\Omega F_i \delta u_i\, dx_1\, dx_2 + \int_\Gamma f_i \delta u_i\, dx_1\right| \leqslant 2\,(A_1(\mathbf{F}) + A_2(\mathbf{f}))\, C(\delta\mathbf{u}) \leqslant m_4 \|\delta\mathbf{u}\|_{\mathbf{X}(h)}$$

Отсюда вытекает, что линейный функционал, стоящий в правой части (1.1), — непрерывный по переменной $\delta\mathbf{u}$ в пространстве $\mathbf{X}(h)$. По лемме 2.2 он однозначно представим в виде

$$\int_\Omega \sigma_{ij}(\mathbf{u}_0)\, e_{ij}(\delta\mathbf{u})\, dx_1\, dx_2, \quad u_0 \in \mathbf{Y}^-(h)$$

Из вида уравнения (1.1) вытекает, что $\mathbf{u}_0$ и есть единственное обобщенное решение задачи. Теорема доказана.

Замечания. 1°. Аналогично можно рассмотреть задачи о равновесии полосы при других краевых условиях, а также задачи о равновесии упругого слоя.

2°. Приведенную выше конструкцию обобщенного решения можно перенести и на случай задач для конечных областей. В зависимости от выбора пространства $\mathbf{X}$ можно прийти к понятию решения, принадлежащего тому или иному классу обобщенных функций с некоторыми свойствами регулярности. В частности, при этом можно рассмотреть случаи неинтегрируемых нагрузок с различными типами особенностей, которые выпадают при «энергетической» постановке задач.

3°. Условиями теоремы 3.1 допускается экспоненциальный рост нагрузок на бесконечности.

4°. Указанную выше конструкцию обобщенного решения можно перенести на случай общих эллиптических положительно-определенных краевых задач.

4. *Доказательство леммы* 2.1. То, что пространство X (h) гильбертово, вытекает непосредственно из вида нормы X (h) и неравенства Корна [3]. Доказательство оценки (2.2) для двух первых интегралов левой части (2.2) однотипно. Поэтому оценка будет получена лишь для одного из них.

Полоса Ω разбивается на квадраты K_n с единичной стороной. На K_n $n \leqslant x_1 < n+1$. В силу краевых условий и неравенства Корна [3] для вектор-функции $\mathbf{u}$ для всех $1 \leqslant p < \infty$ выполнено неравенство

$$\left(\int\limits_{K_n} |\mathbf{u}|^p \, dx_1 \, dx_2\right)^{2/p} \leqslant m_5 \int\limits_{K_n} \sigma_{ij}(\mathbf{u})\, e_{ij}(\mathbf{u})\, dx_1 \, dx_2$$

Обе его части умножаются на $h^2(n)$, а затем суммируются по n

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{K_n} h^p(n)\, |\mathbf{u}|^p \, dx_1 \, dx_2\right)^q \leqslant m_5 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int\limits_{K_n} h^2(n)\, \sigma_{ij} e_{ij} \, dx_1 \, dx_2 \tag{4.1}$$
$$(q = 2p^{-1})$$

Оценка (2.2) для первого интеграла с учетом (2.1) при $p = 2$ отсюда вытекает непосредственно. Совершенно аналогично получается и оценка для третьего интеграла из (2.2).

Пусть теперь $1 \leqslant p < 2$. Для вывода оценки (2.2) достаточно определить весовую функцию $\rho(x_1) = (1 + |x_1|)^\gamma$ так, чтобы имела место следующая оценка:

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int\limits_{K_n} \rho(n)\, h^p(n)\, |\mathbf{u}|^p dx_1 \, dx_2\right)^q \leqslant m_6 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{K_n} h^p(n)\, |\mathbf{u}|^p \, dx_1 \, dx_2\right)^q$$

или, что то же самое

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho_{(n)} a_n\right)^q \leqslant m_6 \sum a_n^q, \quad a_n = \int\limits_{K_n} h^p(n)\, |\mathbf{u}|^p \, dx_1 \, dx_2$$

Поскольку последовательности $\{a_n\}$ и $\{a_{-n}\}$, $0 \leqslant n < \infty$ произвольны и принадлежат пространству l^q суммируемых со степенью q последовательностей, то последовательности $\{\rho(\pm n)\}$ должны принадлежать сопряженному пространству $l^{2/(2-p)}$. Это возможно, если показатель γ в выражении функции $\rho(x_1)$ $\gamma > 2(2-p)^{-1}$. Отсюда с учетом (2.1) вытекает оценка (2.2) при $1 \leqslant p < 2$.

Пусть теперь $p > 2$. В силу неравенства Иенсена

$$\left(\sum |a_n|^q\right)^{1/q} \geqslant \sum |a_n|, \quad q < 1$$

с учетом (2.1) имеет место неравенство

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{K_n} h^p(n)\, |u|^p \, dx_1 \, dx_2\right)^q \geqslant \left(m_2 \int\limits_{\Omega} h^p(x_1)\, |u|^p \, dx_1 \, dx_2\right)^q$$

Объединение его с неравенством (4.1) завершает доказательство оценки (2.2).

Автор благодарит И. И. Воровича за обсуждение статьи.

Поступила 20 III 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эйдус Д. М.* Контактная задача теории упругости. Матем. сб., 1954, т. 54, вып. 3.
2. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М., «Мир», 1974.
3. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., «Наука», 1974.
4. *Иосида К.* Функциональный анализ. М., «Мир», 1967.