Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 6, 1980

УДК 539.3

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА КИРША ДЛЯ ТРАНСТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ

В. А. Шалдырван

(Донецк)

Качественное и количественное исследование концентрации напряжений в задаче Кирша для изотропных пластин в трехмерной постановке было осуществлено методом суперпозиции [1] и на базе метода однородных решений [2]. Асимптотический метод решения задачи Кирша для транстропных пластин предлагался в работе [3]. Ниже указанная задача решена для транстропных тел конечных размеров.

Пусть $V = \{1 \leqslant r < \infty,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ |\zeta| \leqslant 1\}$ — область, занятая пластиной из транстропного материала. Последний характеризуется упругими параметрами ν, ν_z, $\nu_2 = \nu_z E / E_z$, $s_0{}^2 = G/G_z$ (ν_z, E_z, G_z — коэффициент Пуассона, модуль Юнга и модуль сдвига в плоскостях, перпендикулярных плоскостям изотропии). Предположим, что торцы пластины $S_\pm$ и ее боковая поверхность Ω свободны от внешних усилий, а на бесконечности она находится в условиях одноосного растяжения, т. е.

(1) $$\sigma_{\xi\xi\infty} = P\zeta^{2r},\ r = 0, 1, \ldots;\ \sigma_{ij\infty} = 0, \quad i = j \neq \xi$$

Напряженное состояние пластины представим в виде суперпозиции основного ($\sigma_{ij}{}^\circ$), возникающего в сплошной пластине при действии указанной нагрузки, и возмущенного ($\sigma_{ij}{}^*$), возникающего в пластине с полостью, боковая поверхность которой загружена следующими усилиями:

(2) $$\overset{*}{\sigma}_{rl/\Omega} = -\overset{\circ}{\sigma}_{rl/\Omega} \quad (l = r, \theta, \zeta;\ \overset{*}{\sigma}_{rl\infty} = 0)$$

Основное напряженное состояние имеет вид [3]

(3) $$\overset{\circ}{\sigma}_{rr} = \frac{P}{2}(1 + \cos 2\theta)\zeta^{2r}, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{r\theta} = -\frac{P}{2}\zeta^{2r}\sin 2\theta$$
$$\overset{\circ}{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{P}{2}(1 - \cos 2\theta)\zeta^{2r}, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{r\zeta} = \overset{\circ}{\sigma}_{\theta\zeta} = \overset{\circ}{\sigma}_{\zeta\zeta} = 0$$

Для возмущенного напряженного состояния получим краевую задачу теории упругости с граничными условиями (2), где правые части определяются соотношениями (3). Решение этой задачи сводится к определению функций Лурье — Лехницкого F, Φ_k, Ψ_p из граничных условий на боковой поверхности [2]

(4) $$\varphi(\sigma) + \sigma\overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\Psi(\sigma)} + {}^1\!/_2\Lambda_{1\Omega}(\Phi_0, \Psi_p) = \frac{1}{2}f_{1,0}(\sigma)$$
$$\left(\frac{4\lambda}{m\pi}\right)^2\mu_8\overline{\varphi''(\sigma)} - \Lambda_{1\Omega}(\Phi_m, \Psi_p) = f_{1,m}; \quad \Lambda_{2\Omega}(\Phi_m, \Psi_p) = 0$$

Здесь

(5) $$F = \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)], \quad \Psi(z) = d_z\chi$$
$$\nabla^2\nabla^2 F = 0,\ \nabla^2\Phi_k = (\delta_k{}^*)^2\Phi_k, \quad \nabla^2\Psi_p = (\gamma_p{}^*)^2\Psi_p$$

Общее решение разрешающей системы (5), удовлетворяющее условиям ограниченности напряжений на бесконечности, возьмем в виде

$$\varphi(z) = a_1/z, \quad \Psi_p(r,\theta) = c_{0p}{}^* k_0(\gamma_p{}^* r) + C_{2p}{}^* k_2(\gamma_p{}^* r) \cos 2\theta \tag{6}$$

$$\Psi(z) = \frac{b_1}{z} + \frac{b_3}{z^3}, \quad \Phi_k(r,\theta) = b_{2k}^* k_2(\delta_k{}^* r) \sin 2\theta$$

Подставляя (6) в граничные условия (4), получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных a_1, b_1, b_3, $c_{np} = c_{np}^*/k_n(\gamma_p{}^*)$, $b_{2k} = b_{2k}{}^*/k_2(\delta_k{}^*)$. Запишем ее окончательный вид

$$\operatorname{Re}\sum_p [l_{mp} - n_{mp}P_0^-(\gamma_p{}^*)]\, c_{0p} = -\frac{P}{2}E_m{}^r \tag{7}$$

$$\operatorname{Re}\sum_p r_{mp}P_0^-(\gamma_p{}^*)\, c_{0p} = 0 \quad (p, m = 1, 2, \ldots, \infty)$$

$$b_1 = -\frac{P}{2}\left\{E_0{}^r + \operatorname{Re}\sum_p [l_{0p} - n_{0p}P_0^-(\gamma_p^*)]\, c_{0p}\right\} \tag{8}$$

$$3b_3 - 4a_1 + \operatorname{Re}\sum_p [l_{0p} + n_{0p}N_2^-(\gamma_p{}^*)]\, c_{2p} = -\frac{P}{4}E_0{}^r$$

$$3b_3 - 2a_1 - \operatorname{Re}\sum_p n_{0p}M_2^-(\gamma_p{}^*)\, c_{2p} = \frac{P}{4}E_0{}^r$$

$$\frac{96\lambda^2\mu_8}{(m\pi)^2}a_1 - (-1)^m M_2^-(\delta_m{}^*)\, b_{2m} - \sum_p [l_{mp} + n_{mp}N_2^-(\gamma_p{}^*)]\, c_{2p} =$$

$$= \frac{P}{2}E_m{}^r$$

$$\frac{96\lambda^2\mu_8}{(m\pi)^2}a_1 + (-1)^m\left[\frac{1}{2}(\delta_m{}^*)^2 + N_2^-(\delta_m{}^*)\right] b_{2m} +$$

$$+ \sum_n n_{mp}M_2^-(\gamma_p{}^*)\, c_{2p} = \frac{P}{2}E_m{}^r$$

$$\sum_p r_{mp}P_2^-(\gamma_p{}^*)\, c_{2p} - \frac{(-1)^m\delta_m}{\lambda s_0}b_{2m} = 0$$

В записи системы используются обозначения, принятые в монографии [2].

После определения из системы (7), (8) введенных постоянных напряжения в пластине находим по формулам

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}{}^* + \sigma_{ij}^\circ \tag{9}$$

где величины со звездочками имеют следующий вид:

$$\frac{1}{P}\sigma_{\theta\theta}^* = \frac{b_1}{r_2} + \cos 2\theta\left\{\frac{3b_3}{r^4} - \left[\frac{4}{r^2} - \frac{24\lambda^2\mu_8}{r^4}\left(\frac{1}{3} - \zeta^2\right)\right] a_1 + \right. \tag{10}$$

$$+ \sum_k P_k(\zeta)\, M_2^-(\delta_k{}^* r)\, b_{2k}^* k_2(\delta_k{}^* r) +$$

$$\left. + \sum_p [l_p(\zeta) + n_p(\zeta) N_2^-(\gamma_p{}^* r)]\, c_{2p}^* k_2(\gamma_p{}^* r)\right\}$$

. . . .

$$\frac{1}{P}\sigma_{\zeta\zeta}^* = 2\operatorname{Re}\sum_p t_p(\zeta)\, c_{2p}^* k_2(\gamma_p{}^* r) \cos 2\theta \quad (k, p = \overline{1, \infty})$$

При исследовании концентрации напряжений, возникающей в рассматриваемой пластине, используются значения напряжений на Ω. В частности, для нормальных напряжений имеем

$$\frac{1}{P}\sigma_{\theta\theta}|_\Omega = A(\lambda,\zeta) - B(\lambda,\zeta)\cos 2\theta \tag{11}$$

$$\frac{1}{P}\sigma_{\zeta\zeta}|_\Omega = c(\lambda,\zeta)\cos 2\theta$$

$$A(\lambda,\zeta) = \frac{1}{2}\zeta^{2r} - b_1, \quad c(\lambda,\zeta) = 2\operatorname{Re}\sum_p t_p(\zeta)c_{2p}$$

$$B(\lambda,\zeta) = \frac{1}{2}\zeta^{2r} + 24\lambda^2\mu_8\left(\frac{1}{3}-\zeta^2\right)a_1 + \sum_k P_k(\zeta)M_2^-(\delta_k^*)b_{2k} +$$
$$+ 3b_3 - 2\operatorname{Re}\sum_p [s_p(\zeta) - n_p(\zeta)N_2^-(\gamma_p^*)]c_{2p}$$

Максимальные нормальные напряжения, как следует из выражений (11), возникают в сечении $\theta = \pi/2$. Пусть $r = 0$, тогда из системы (7) получаем $c_{0p} = 0$, $b_1 = -P/2$. В табл. 1 для этого случая приведены наибольшие значения нормальных напряжений для пластин, изготовленных из кадмия (Cd) и цинка (Zn), при различных относительных толщинах λ. Сравнение с соответствующими величинами для изотропных пластин [2] показывает, что характер распределения напряжений по толщине и в окружном направлении для рассматриваемых транстропных материалов такой же, как и в изотропных пластинах. Максимальное отличие величин окружных напряжений наблюдается вблизи плоских граней и достигает 20%. Напряжения $\sigma_{\zeta\zeta}$, возникающие в транстропных пластинах, почти в два раза больше тех, которые имеют место в изотропных пластинах. Следовательно, в транстропных пластинах поле напряжений имеет более выраженный трехмерный характер, чем в изотропных. Таким образом, чтобы учесть анизотропию материала, необходимо при расчетах концентрации напряжений использовать трехмерное решение.

Таблица 1

ζ	$\sigma_{\theta\theta}\|_\Omega$			$\sigma_{\zeta\zeta}\|_\Omega$		
	$\lambda=1$		$\lambda=4$	$\lambda=1$		$\lambda=4$
	Cd	Zn	Cd	Cd	Zn	Cd
0.2	3.343	3.516	3.084	0.418	0.538	0.538
0.4	3.295	3.415	3.108	0.368	0.455	0.537
0.6	3.192	3.250	3.150	0.277	0.341	0.522
0.8	2.967	2.947	3.164	0.142	0.189	0.435
1.0	2.385	2.247	2.167	$0.1\cdot10^{-6}$	$0.8\cdot10^{-6}$	$0.2\cdot10^{-6}$

Если пластина растягивается усилиями интенсивности Q по направлению оси $O\eta$ ($\sigma_{\eta\eta\infty} = Q$), то решение задачи о напряженном состоянии такой пластины получается из формул (10), (11) в результате замены P на Q и θ на $\theta + \pi/2$. В частности, для напряжений вблизи поверхности Ω имеем

$$\frac{1}{Q}\sigma_{\theta\theta}|_\Omega = A(\lambda,\zeta) + B(\lambda,\zeta)\cos 2\theta, \quad \frac{1}{Q}\sigma_{\zeta\zeta}|_\Omega = -c(\lambda,\zeta)\cos 2\theta$$

Наложение рассматриваемых решений, соответствующих нагружениям $\sigma_{\xi\xi\infty} = P\zeta^{2r}$ и $\sigma_{\eta\eta\infty} = Q\zeta^{2r}$, дает решение для случая, когда неограниченная пластина растягивается усилиями $P\zeta^{2r}$ и $Q\zeta^{2r}$ соответственно вдоль и поперек оси 0ξ. В этом случае

$$\sigma_{\theta\theta}|_\Omega = (P + Q)A(\lambda, \zeta) - (P - Q)B(\lambda, \zeta)\cos 2\theta$$

$$\sigma_{\zeta\zeta}|_\Omega = (P - Q)C(\lambda, \zeta)\cos 2\theta$$

В частности, при равностороннем растяжении пластины имеем

$$\sigma_{\theta\theta}|_\Omega = 2PA(\lambda, \zeta)$$

Из системы (8) в этом случае получаем $a_1 = b_3 = c_{2p} = b_{2k} = 0$. Аналогичная задача решена в [4].

В табл. 2 приведены значения напряжений возмущенного состояния (σ_{ij}^*) при различном количестве собственных функций, оставляемых в решении. Данные получены для пластины из кадмия при нагрузке $\sigma_{rr}^*|_\Omega = -P\zeta^2$ и $\lambda = 1$. Из таблицы видно, насколько хорошо выполняются граничные условия (последний столбец соответствует заданным усилиям) и быстрота сходимости решения по приближениям в процессе Бубнова — Галеркина. Так, уже при $m = 8$ данные для напряжений можно считать точными. Даже при $m = 3$ погрешность при удовлетворении граничных условий для пластин с $\lambda = 1$ и $\lambda = 4$ не превышает 1.5% от заданных усилий. При $\lambda = 0{,}1$ уже при $m = 3$ получаются практически точные результаты. Сходимость несколько ухудшается с ростом показателя изменяемости нагрузки r. Подобная картина наблюдается и при решении задач для пластин из цинка. Большой интерес представляет характер изменения возмущенного напряженного состояния при отходе от боковой поверхности в глубь пластины.

Таблица 2

σ_{ij}^*	ς	$m = 3$	5	10	20	Заданные напряжения
$\sigma_{rr}^*\|\Omega$	0.2	—0.0389	—0.0396	—0.03999	—0.040006	—0.04
	0.6	—0.3623	—0.3596	—0.35997	—0.360003	—0.36
	0.8	—0.6356	—0.6401	—0.63993	—0.639997	—0.64
	1	—1.0139	—1.0065	—1.00132	—1.000014	—1
$10^{-5}\cdot\sigma_{r\varsigma}^*\|\Omega$	0.2	80	10	1	0.2	0
	0.6	90	—10	4	1.2	0
	0.8	—310	30	8	2.9	0
$\sigma_{\theta\theta}^*\|\Omega$	0.2	0.3172	0.3178	0.31789	0.31786	
	0.4	0.3645	0.3647	0.36489	0.36485	
	0.6	0.4380	0.4379	0.43803	0.43799	
	0.8	0.5295	0.5315	0.53182	0.53177	
	1	0.6548	0.6549	0.65491	0.65490	

Соответствующие данные для пластины из цинка при нагрузке $\sigma_{rr}^*|_\Omega = -P\zeta^2$ приведены в табл. 3 (в числителе помещены значения напряжений σ_{rr}^*, а в знаменателе — $\sigma_{\theta\theta}^*$). Анализ данных этой таблицы вскрывает особенность распределения указанных напряжений в пластине при различных ее толщинах, из которого следует, что концентрация окружных напряжений возникает вблизи поверхности и достаточно быстро затухает при продвижении в глубь пластины.

Следует подчеркнуть, что если внешние нагрузки изменяются по толщине, то картины распределения напряжений в изотропных и транстропных пластинах качественно различаются. Так, если в изотропных пластинах максимальные сжимающие напряжения действуют на срединной плос-

Таблица 3

λ	r	ζ = 0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0.5	1	$\frac{0}{0.373}$	$\frac{-0.040}{0.383}$	$\frac{-0.160}{0.413}$	$\frac{-0.360}{0.462}$	$\frac{-0.640}{0.537}$	$\frac{-1}{0.662}$
	1.6	$\frac{-0.061}{0.074}$	$\frac{-0.071}{0.080}$	$\frac{-0.098}{0.095}$	$\frac{-0.138}{0.117}$	$\frac{-0.180}{0.139}$	$\frac{-0.218}{0.153}$
	2.4	$\frac{-0.062}{-0.056}$	$\frac{-0.061}{0.056}$	$\frac{-0.060}{0.056}$	$\frac{-0.057}{0.056}$	$\frac{-0.054}{0.056}$	$\frac{-0.050}{-0.055}$
1	1	$\frac{0}{0.259}$	$\frac{-0.040}{0.280}$	$\frac{-0.160}{0.342}$	$\frac{-0.360}{0.443}$	$\frac{-0.640}{0.582}$	$\frac{-1}{0.768}$
	1.6	$\frac{0.016}{0,063}$	$\frac{-0.002}{0.071}$	$\frac{-0.055}{0.095}$	$\frac{-0.139}{0.133}$	$\frac{-0.243}{0.179}$	$\frac{-0.348}{0.225}$
	3.2	$\frac{-0.032}{0.026}$	$\frac{-0.033}{0.027}$	$\frac{-0.033}{0.028}$	$\frac{-0.033}{0.029}$	$\frac{-0.032}{0.030}$	$\frac{-0.029}{0.030}$
4	1	$\frac{0}{0.061}$	$\frac{-0.040}{0.098}$	$\frac{-0.160}{0.209}$	$\frac{-0.360}{0.391}$	$\frac{-0.640}{0.639}$	$\frac{-1}{0.942}$
	1.6	$\frac{0.015}{0.028}$	$\frac{-0.001}{0.042}$	$\frac{-0.051}{0.083}$	$\frac{-0.013}{0.150}$	$\frac{-0.252}{0.242}$	$\frac{-0.399}{0.350}$
	4	$\frac{0.007}{0.004}$	$\frac{0.003}{0.006}$	$\frac{0.006}{0.011}$	$\frac{-0.021}{0.020}$	$\frac{-0.040}{0.030}$	$\frac{-0.058}{0.040}$

кости пластины, то в пластинах из цинка и кадмия максимум достигается на ребре пластины. Следовательно, учет анизотропии приводит к качественно новому результату.

Поступила 27 XII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* Точное решение задачи Кирша. Прикл. механ., 1970, т. 6, вып. 5.
2. *Космодамианский А. С., Шалдырван В. А.* Толстые многосвязные пластины. Киев, «Наукова думка», 1978.
3. *Роменская Г. И., Шленев М. А.* Решение трехмерной задачи Кирша для трансверсально изотропной плиты. Тр. X Всес. конф. по теории оболочек и пластин, т. 1. Кутаиси, 1975, Тбилиси, «Мецниереба», 1975.
4. *Космодамианский А. С., Милишенский И. Х., Шалдырван В. А.* О концентрации напряжений в транстропной пластине с цилиндрической полостью. ПММ, 1977, т. 41, вып. 5.