Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 6, 1980

УДК 539.3

ОБ УРАВНЕНИЯХ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИНКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

А. В. Колос

(Ворошиловград)

Методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений теории упругости строится внутреннее напряженное состояние пластинки переменной толщины [1]. Показывается, что в общем случае оно описывается системой дифференциальных уравнений восьмого порядка относительно компонентов вектора перемещений точек плоскости, проведенной внутри пластинки, причем уравнения изгиба и плоского напряженного состояния не разделяются. В частном случае симметричного расположения лицевых поверхностей относительно этой плоскости изгиб и плоское напряженное состояние описываются раздельными уравнениями. Погрешность полученных уравнений есть величина порядка квадрата относительной толщины пластинки везде вдали от края и других линий искажения напряженного состояния.

Погранслой и формулировка условий на краю пластинки не рассматриваются.

1. Под пластинкой переменной толщины подразумевается призматическое тело (отнесенное к декартовой системе координат xyz), ограниченное цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси z, (край) и двумя лицевыми поверхностями $z = f_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$.

Вводятся предположения:

1) везде в области, занятой телом, $f_1(x, y) \geqslant 0$, $f_2(x, y) \leqslant 0$;

2) толщина пластинки $2h(x, y) = f_1(x, y) - f_2(x, y)$ — малая величина по сравнению с каким-то характерным размером L пластинки в плане;

3) лицевые поверхности пластинки достаточно пологи, так что $\partial f_i/\partial x$, $\partial f_i/\partial y \sim \varepsilon$, $\varepsilon = (h_1 - h_2)/(2L)$ — малый параметр (h_1 и h_2 — наибольшая и наименьшая полутолщины пластинки).

Условия на лицевых поверхностях пластинки для произвольной поверхностной нагрузки представляем в виде

$$z = f_i(x, y) \quad (i = 1, 2) \tag{1.1}$$

$$\sigma_{xx}\cos(n_i, x) + \sigma_{xy}\cos(n_i, y) + \sigma_{xz}\cos(n_i, z) = p_{ix} \quad (xy)$$

$$\sigma_{xz}\cos(n_i, x) + \sigma_{yz}\cos(n_i, y) + \sigma_{zz}\cos(n_i, z) = p_{iz}$$

Предполагаем, как и в случае пластинки постоянной толщины [2], что

$$p_{ix} = \varepsilon^{-1}q_{ix} \quad (xy), \quad p_{iz} = q_{iz} \quad (i = 1, 2) \tag{1.2}$$

где q_{ix}, q_{iy}, q_{iz} не зависят от ε.

Уравнения лицевых поверхностей пластинки в соответствии с введенными выше предположениями представляем в виде

(1.3) $$z = \varepsilon\lambda_i(x, y) \quad (i = 1, 2)$$

$$\lambda_i(x, y) = \varepsilon^{-1} f_i(x, y), \quad \partial\lambda_i/\partial x, \partial\lambda_i/\partial y \sim \varepsilon^0$$

Тогда можно записать

(1.4) $$\cos(n_i, x) = -\varepsilon\, \partial\lambda_i/\partial x + 0(\varepsilon^2) \quad (xy)$$

$$\cos(n_i, z) = 1 + 0(\varepsilon^2)$$

Принимая, что вдали от края напряжения и перемещения не слишком быстро изменяются по переменным x и y и быстро по переменной z, делаем замену $z = \varepsilon\zeta$ в уравнениях равновесия и соотношениях упругости трехмерной теории.

Решение полученных уравнений будем искать в виде

(1.5) $$Q = \varepsilon^{-q} \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^s Q^{(s)}$$

($q = 2$ для σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yy}, u, v; $q = 1$ для σ_{xz}, σ_{yz}; $q = 0$ для σ_{zz}; $q = 3$ для W).

Для функций $Q^{(s)}$ получим рекуррентную систему уравнений

$$\frac{\partial\sigma_{xx}^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xz}^{(s)}}{\partial\zeta} = 0 \quad (xy), \qquad \frac{\partial\sigma_{xz}^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yz}^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}^{(s)}}{\partial\zeta} = 0$$

$$E\frac{\partial u^{(s)}}{\partial x} = \sigma_{xx}^{(s)} - \nu\left(\sigma_{yy}^{(s)} + \sigma_{zz}^{(s-2)}\right) \quad (xy)$$

$$E\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta} = \sigma_{zz}^{(s-4)} - \nu\left(\sigma_{xx}^{(s-2)} + \sigma_{yy}^{(s-2)}\right)$$

$$E\left(\frac{\partial u^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial W^{(s)}}{\partial x}\right) = 2(1+\nu)\,\sigma_{xz}^{(s-2)} \quad (xy)$$

$$E\left(\frac{\partial u^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(s)}}{\partial x}\right) = 2(1+\nu)\,\sigma_{xy}^{(s)}$$

Здесь и в дальнейшем (xy) означает, что существует еще одно уравнение, получающееся из приведенного взаимной заменой x на y и u на v.

Интегрируя эти уравнения по ζ, получим (для $s = 0, 1$)

(1.6) $$W^{(s)} = w^{(s)}(x, y), \quad u^{(s)} = -\zeta\frac{\partial w^{(s)}}{\partial x} + \bar{u}^{(s)}(x, y) \quad (xy)$$

$$\sigma_{xx}^{(s)} = -\zeta\tau_{xx}^{(s)} + \bar{\sigma}_{xx}^{(s)} \quad (xy), \qquad \sigma_{xy}^{(s)} = -\zeta\tau_{xy}^{(s)} + \bar{\sigma}_{xy}^{(s)}$$

$$\sigma_{xz}^{(s)} = \frac{\zeta^2}{2}\tau_{xz}^{(s)} - \zeta\bar{\sigma}_{xz}^{(s)} + \overset{\bullet}{\sigma}{}_{xz}^{(s)} \quad (xy)$$

$$\sigma_{zz}^{(s)} = -\frac{\zeta^3}{6}\tau_{zz}^{(s)} + \frac{\zeta^2}{2}\bar{\sigma}_{zz}^{(s)} - \zeta\overset{\bullet}{\sigma}{}_{zz}^{(s)} + \sigma_{zz}^{*(s)}$$

$$\tau_{xx}^{(s)} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w^{(s)}}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w^{(s)}}{\partial y^2}\right) \quad (xy), \qquad \tau_{xy}^{(s)} = \frac{E}{1+\nu}\frac{\partial^2 w^{(s)}}{\partial x\,\partial y}$$

$$\tau_{xz}^{(s)} = \frac{\partial\tau_{xx}^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}^{(s)}}{\partial y} = \frac{E}{1-\nu^2}\frac{\partial\Delta w^{(s)}}{\partial x} \quad (xy)$$

$$\tau_{zz}^{(s)} = \frac{\partial\tau_{xz}^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}^{(s)}}{\partial y} = \frac{E}{1-\nu^2}\Delta\Delta w^{(s)}$$

$$\bar{\sigma}_{xx}^{(s)}=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial\bar{u}^{(s)}}{\partial x}+\nu\frac{\partial\bar{v}^{(s)}}{\partial y}\right)\quad(xy),\quad \bar{\sigma}_{xy}^{(s)}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial\bar{u}^{(s)}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{v}^{(s)}}{\partial x}\right)$$

$$\bar{\sigma}_{xz}^{(s)}=\frac{\partial\bar{\sigma}_{xx}^{(s)}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{\sigma}_{xy}^{(s)}}{\partial y}=\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left[(1-\nu)\Delta\bar{u}^{(s)}+(1+\nu)\frac{\partial\bar{\theta}^{(s)}}{\partial x}\right]\quad(xy)$$

$$\bar{\sigma}_{zz}^{(s)}=\frac{\partial\bar{\sigma}_{xz}^{(s)}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{\sigma}_{yz}^{(s)}}{\partial y}=\frac{E}{1-\nu^2}\Delta\bar{\theta}^{(s)},\quad \mathring{\sigma}_{zz}^{(s)}=\frac{\partial\mathring{\sigma}_{xz}^{(s)}}{\partial x}+\frac{\partial\mathring{\sigma}_{yz}^{(s)}}{\partial y}$$

$$\bar{\theta}^{(s)}=\frac{\partial\bar{u}^{(s)}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{v}^{(s)}}{\partial y},\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Из равенств (1.6) видно, что девять искомых функций $Q^{(s)}$ выражаются через шесть неизвестных функций $\bar{u}^{(s)}$, $\bar{v}^{(s)}$, $w^{(s)}$, $\mathring{\sigma}_{xz}^{(s)}$, $\mathring{\sigma}_{yz}^{(s)}$, $\sigma_{zz}^{*(s)}$, зависящих от двух переменных x и y.

Для определения этих функций обратимся к условиям на лицевых поверхностях пластинки.

Подставляя (1.2), (1.4) и (1.5) в условия (1.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в левой и правой частях, получим для $s=0,\ 1$ при $\zeta=\lambda_i(x,y)$ $(i=1,2)$

$$-\frac{\partial\lambda_i}{\partial x}\sigma_{xx}^{(s)}-\frac{\partial\lambda_i}{\partial y}\sigma_{xy}^{(s)}+\sigma_{xz}^{(s)}=p_{ix}^{(s)}\quad(xy)\tag{1.7}$$

$$-\frac{\partial\lambda_i}{\partial x}\sigma_{xz}^{(s)}-\frac{\partial\lambda_i}{\partial y}\sigma_{yz}^{(s)}+\sigma_{zz}^{(s)}=p_{iz}^{(s)}$$

$$p_{ix}^{(0)}=q_{ix},\quad p_{iy}^{(0)}=q_{iy},\quad p_{iz}^{(0)}=q_{iz}$$

$$p_{ix}^{(1)}=p_{iy}^{(1)}=p_{iz}^{(1)}=0\quad(i=1,2)$$

Подставим в (1.7) соответствующие значения из (1.6). После преобразований получим

$$\mathring{\sigma}_{xz}^{(s)}=\frac{1}{2}\Big\{(p_{1x}^{(s)}+p_{2x}^{(s)})-\frac{\partial}{\partial x}[(\delta^2+H^2)\tau_{xx}^{(s)}-2\delta\bar{\sigma}_{xx}^{(s)}]-\tag{1.8}$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}[(\delta^2+H^2)\tau_{xy}^{(s)}-2\delta\bar{\sigma}_{xy}^{(s)}]\Big\}\quad(xy)$$

$$\sigma_{zz}^{*(s)}=\frac{1}{2}(p_{1z}^{(s)}+p_{2z}^{(s)})+\frac{1}{6}\frac{\partial}{\partial x}[\delta(\delta^2+3H^2)\tau_{xz}^{(s)}-$$

$$-3(\delta^2+H^2)\bar{\sigma}_{xz}^{(s)}+6\delta\mathring{\sigma}_{xz}^{(s)}]+\frac{1}{6}\frac{\partial}{\partial y}[\delta(\delta^2+3H^2)\tau_{yz}^{(s)}-$$

$$-3(\delta^2+H^2)\bar{\sigma}_{yz}^{(s)}+6\delta\mathring{\sigma}_{yz}^{(s)}]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[H(\delta\tau_{xx}^{(s)}-\bar{\sigma}_{xx}^{(s)})]+\frac{\partial}{\partial y}[H(\delta\tau_{xy}^{(s)}-\bar{\sigma}_{xy}^{(s)})]=\frac{1}{2}(p_{1x}^{(s)}-p_{2x}^{(s)})\tag{1.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[H(\delta\tau_{xy}^{(s)}-\bar{\sigma}_{xy}^{(s)})]+\frac{\partial}{\partial y}[H(\delta\tau_{yy}^{(s)}-\bar{\sigma}_{yy}^{(s)})]=\frac{1}{2}(p_{1y}^{(s)}-p_{2y}^{(s)})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(H^3\tau_{xx}^{(s)})+2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(H^3\tau_{xy}^{(s)})+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(H^3\tau_{yy}^{(s)})+$$

$$+3H\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}(\delta\tau_{xx}^{(s)}-\bar{\sigma}_{xx}^{(s)})+6H\frac{\partial^2\delta}{\partial x\,\partial y}(\delta\tau_{xy}^{(s)}-\bar{\sigma}_{xy}^{(s)})+$$

$$+3H\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}(\delta\tau_{yy}^{(s)}-\bar{\sigma}_{yy}^{(s)})=\frac{3}{2}\Big\{(p_{1z}^{(s)}-p_{2z}^{(s)})-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}[H(p_{1x}^{(s)}+p_{2x}^{(s)})]-\frac{\partial}{\partial y}[H(p_{1y}^{(s)}+p_{2y}^{(s)})]-$$

$$-\frac{\partial\delta}{\partial x}(p_{1x}^{(s)}-p_{2x}^{(s)})-\frac{\partial\delta}{\partial y}(p_{1y}^{(s)}-p_{2y}^{(s)})$$

$$(2H=\lambda_1-\lambda_2,\quad 2\delta=\lambda_1+\lambda_2)$$

Из уравнений (1.8) и (1.6) видно, что функции $\overset{\circ}{\sigma}{}^{(s)}_{xz}$, $\overset{\circ}{\sigma}{}^{(s)}_{yz}$ и $\sigma^{*(s)}_{zz}$ выражаются через функции $\bar{u}^{(s)}$, $\bar{v}^{(s)}$, $w^{(s)}$ непосредственно и решение задачи о напряженном состоянии пластинки переменной толщины сводится к решению трех уравнений (1.9).

Если в (1.5) ограничиться двумя первыми слагаемыми, объединить уравнения (1.9), записанные для $s = 0, 1$, выразив в них напряжения через перемещения по формулам (1.6), и возвратиться к исходным обозначениям задачи, то для напряженного состояния пластинки переменной толщины получим следующую систему разрешающих уравнений в перемещениях:

$$
\begin{aligned}
(1.10)\qquad & 2\frac{\partial}{\partial x}\left\{h\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}-\varphi\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]\right\}+\\
&+(1-\nu)\frac{\partial}{\partial y}\left\{h\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}-2\varphi\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right]\right\}=-\frac{1-\nu^2}{E}(q_{1x}-q_{2x})\\
&(1-\nu)\frac{\partial}{\partial x}\left\{h\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}-2\varphi\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right]\right\}+2\frac{\partial}{\partial y}\left\{h\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\nu\frac{\partial u}{\partial x}-\right.\right.\\
&\left.\left.-\varphi\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]\right\}=-\frac{1-\nu^2}{E}(q_{1y}-q_{2y})\\
&D\Delta\Delta w+2\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial\Delta w}{\partial x}+2\frac{\partial D}{\partial y}\frac{\partial\Delta w}{\partial y}+\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\\
&+\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+2(1-\nu)\frac{\partial^2 D}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\\
&+\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left[\varphi\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]+\right.\\
&+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left[\varphi\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]+\\
&\left.+(1-\nu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\left[2\varphi\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}-\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]\right\}=\\
&=q_{1z}-q_{2z}-\frac{\partial}{\partial x}\left[h(q_{1x}+q_{2x})\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[h(q_{1y}+q_{2y})\right]-\\
&-\frac{\partial\varphi}{\partial x}(q_{1x}-q_{2x})-\frac{\partial\varphi}{\partial y}(q_{1y}-q_{2y})\\
&D=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)},\quad 2h=f_1-f_2=2H\varepsilon\\
&2\varphi=f_1+f_2=2\delta\varepsilon
\end{aligned}
$$

Здесь $z = \varphi(x, y)$ — уравнение «срединной» поверхности пластинки (расстояния точек этой поверхности от лицевых поверхностей пластинки отсчитываются в направлении оси z).

Из уравнений (1.10) следует, что в общем случае напряженное состояние пластинки переменной толщины описывается системой трех дифференциальных уравнений восьмого порядка относительно компонентов вектора перемещения точек плоскости xy, причем уравнения изгиба и плоского напряженного состояния не разделяются. Погрешность уравнений есть величина порядка ε^2 по сравнению с единицей.

2. Введем в рассмотрение тангенциальные усилия N_x, N_y, N_{xy}, перерезывающие силы Q_x, Q_y и моменты M_x, M_y, M_{xy}

$$
N_x=\int_{f_1}^{f_2}\sigma_{xx}\,dz=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}-\varphi\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]\quad (xy)
$$

$$N_{xy}=\int_{f_1}^{f_2}\sigma_{xy}\,dz=\frac{Eh}{1+\nu}\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}-2\varphi\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right]$$

$$M_x=\int_{f_1}^{f_2}z\sigma_{xx}\,dz=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\varphi N_x\quad(xy)$$

$$M_{xy}=\int_{f_1}^{f_2}z\sigma_{xy}\,dz=-D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\varphi N_{xy}$$

$$Q_x=\int_{f_1}^{f_2}\sigma_{xz}\,dz=\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}+f_1q_{1x}-f_2q_{2x}\quad(xy)$$

Разрешающие уравнения (1.10) при этом запишутся в виде

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=-(q_{1x}-q_{2x})\quad(xy)\tag{2.1}$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}=q_{1z}-q_{2z}$$

В случае симметричного расположения лицевых поверхностей пластинки относительно плоскости xy имеем $\varphi(x, y)=0$ и уравнения (1.10) разделяются на две независимые системы

$$2\frac{\partial}{\partial x}\left[h\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]+(1-\nu)\frac{\partial}{\partial y}\left[h\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]=-\frac{1-\nu^2}{E}(q_{1x}-q_{2x})\tag{2.2}$$

$$(1-\nu)\frac{\partial}{\partial x}\left[h\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+2\frac{\partial}{\partial y}\left[h\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]=-\frac{1-\nu^2}{E}(q_{1y}-q_{2y})$$

$$D\Delta\Delta w+2\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial\Delta w}{\partial x}+2\frac{\partial D}{\partial y}\frac{\partial\Delta w}{\partial y}+\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+2(1-\nu)\frac{\partial^2 D}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}=q_{1z}-q_{2z}-\frac{\partial}{\partial x}[h(q_{1x}+q_{2x})]-\frac{\partial}{\partial y}[h(q_{1y}+q_{2y})]\tag{2.3}$$

Уравнения (2.2) описывают плоское напряженное состояние пластинки, уравнение (2.3) — ее изгиб. Уравнение (2.3) совпадает с уравнением классической теории.

Из уравнений (1.10) можно получить уравнения напряженного состояния пластинки постоянной толщины $2h$ с малым начальным искривлением срединной плоскости.

Пусть уравнение первоначально искривленной срединной поверхности пластинки есть $z=\varphi_0(x, y)$. Тогда уравнения лицевых поверхностей пластинки

$$z=f_i(x, y)=\varphi_0(x, y)\pm h\quad(i=1, 2)$$

Уравнения (1.10) принимают вид

$$(1-\nu)\Delta u+(1+\nu)\frac{\partial\theta}{\partial x}-2\varphi_0\frac{\partial\Delta w}{\partial x}-2\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-$$
$$-2(1-\nu)\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}=-\frac{1-\nu^2}{E}(q_{1x}-q_{2x})$$
$$(1-\nu)\Delta v+(1+\nu)\frac{\partial\theta}{\partial y}-2\varphi_0\frac{\partial\Delta w}{\partial y}-2\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-$$
$$-2(1-\nu)\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}=-\frac{1-\nu^2}{E}(q_{1y}-q_{2y})$$
$$D\Delta\Delta w+\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left\{\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}\left[\varphi_0\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-\right.\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2}\left[\varphi_0\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-\right.$$
$$\left.\left.-\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]+(1-\nu)\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x\,\partial y}\left[2\varphi_0\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}-\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]\right\}=$$
$$=q_{1z}-q_{2z}-h\left[\frac{\partial}{\partial x}(q_{1x}+q_{2x})+\frac{\partial}{\partial y}(q_{1y}+q_{2y})\right]-$$
$$-\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}(q_{1x}-q_{2x})-\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}(q_{1y}-q_{2y})$$

Поступила 21 VIII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
2. *Гольденвейзер А. Л., Колос А. В.* К построению двумерных уравнений теории упругих тонких пластинок. ПММ, 1965, т. 28, вып. 1.