Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 6, 1980

УДК 539.3

ДВОЙСТВЕННЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГРАНИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В. Я. Терещенко

(Ростов-на-Дону)

Сформулирована двойственная вариационная задача к задаче минимизации граничных функционалов трехмерной теории упругости методом ортогональных разложений на границе области, построенным в [1]. Решение первоначальной и двойственной задач позволяет получить этим методом оценки погрешности приближенного решения граничных задач теории упругости.

1. В линейной теории упругости функционал Лагранжа $J(\mathbf{u})$ (определенный на поле допустимых перемещений $\mathbf{u}$) и функционал Кастильяно $I(\sigma)$ (определенный на поле допустимых напряжений σ) являются двойственными функционалами. Это означает, что выполняется равенство

$$\inf_{\mathbf{u}} J(\mathbf{u}) = \sup_\sigma I(\sigma)$$

на основании которого могут быть получены двусторонние оценки функционала энергии. Ниже показано, что аналогичный результат для граничных функционалов теории упругости следует из построенных в [1] ортогональных разложений двойственной пары пространств следов $W_2^{*1/2}(S) \times W_2^{-1/2}(S)$ (S — граница ограниченной области $G \subset E_3$, занимаемой упругой средой)

$$W_2^{*1/2}(S) = P \otimes P^{\otimes}, \quad W_2^{-1/2}(S) = P \otimes P^{\perp} \tag{1.1}$$

Здесь $W_2^{*1/2}(S) \subset W^{1/2}(S)$ — пространство следов векторов перемещений $\varphi_0(x)$, $x \in G$, которые являются решениями задачи

$$\mathbf{A}\varphi_0 = 0 \text{ в } G \left(\int_G \varphi_0 \, dG = 0\right), \quad \mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_0)|_S = \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)|_S \tag{1.2}$$

P — подпространство следов векторов перемещений $\mathbf{u}'(x)$, удовлетворяющих граничному условию на закрепленной части поверхности S

$$P^* = \{\mathbf{u}'' \in W_2^{*1/2}(S) \mid [\mathbf{u}'', u']_{1/2S} = 0, \quad \forall u' \in P\} \tag{1.3}$$

$$P^{\perp} = \{t^{(\nu)}(\mathbf{u}'') \in W_2^{-1/2}(S) \mid \langle \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}''), u' \rangle = 0, \ \forall \mathbf{u}' \in P\}$$

$P^{\perp} = \mathbf{T}P^{\oplus}$ (см. [1], леммы 3—5).

В (1.2), (1.3) $\mathbf{A}$ — векторный оператор анизотропной теории упругости [2], $\mathbf{u}^*(x)$ — произвольный вектор перемещений, удовлетворяющий в области G уравнению теории упругости $\mathbf{Au}^* = \mathbf{K}$ ($\mathbf{K}(x)$, $x \in G$ — вектор объемных сил) и граничному условию на свободной части поверхности S, который представим [3] в виде суммы $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_0 + \varphi_0$, где $\mathbf{u}_0(x)$ — энергетическое решение основной граничной задачи теории упругости, φ_0 — решение задачи (1.2), $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)$ — вектор напряжений, действующих на площадку поверхности S, $\mathbf{u}''(x)$ — вектор перемещений, удовлетворяющий условию $\mathbf{A}\mathbf{u}'' = 0$ в G и граничному условию на свободной части поверхности S, для таких векторов $\mathbf{u}''$, $\mathbf{v}''$ из формулы Бетти следует [1]

$$\int_S \mathbf{v}''\cdot\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'')\,ds = 2\int_G W(\mathbf{v}'', \mathbf{u}'')\,dG \tag{1.4}$$

$$\int_S \mathbf{u}''\cdot\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'')\,ds = 2\int_G W(\mathbf{u}'', \mathbf{u}'')\,dG \geqslant 0$$

Правая часть первого равенства (1.4) — симметричная билинейная форма [2], правая часть второго — соответствующая ей квадратичная форма, положительная для векторов $\mathbf{u}''$, удовлетворяющих условию

$$\int_G \mathbf{u}''\,dG = 0$$

$[,]_{1/2S}$ — скалярное произведение в пространстве $W_2^{*1/2}(S)$, $\langle,\rangle$ — отношение двойственности на $W_2^{1/2}(S) \times W_2^{-1/2}(S)$, $W_2^{1/2}(S)$ — пространство Соболева — Слободецкого, $W_2^{-1/2}(S)$ — его двойственное, $\mathbf{T}$ — изометрия $W_2^{*1/2}(S)$ на $W_2^{-1/2}(S)$, которая определяется по теореме Рисса соотношением [1]

$$[\mathbf{v}'', \mathbf{u}'']_{1/2, S} = (\mathbf{v}'', T\mathbf{u}'')_{0, S} = \langle \mathbf{v}'', \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'')\rangle, \quad \forall \mathbf{v}'', \mathbf{u}'' \in W_2^{*1/2}(S) \tag{1.5}$$

При этом [1]

$$\|\mathbf{T}\mathbf{u}''\|_{-1/2S} = \|\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'')\|_{-1/2, S} \leqslant c_0 \|\mathbf{u}''\|_{1/2, S}, \quad c_0 > 0 \tag{1.6}$$

Здесь $(,)_{0,S}$ — скалярное произведение в $L_2(S)$, $\|\cdot\|_{1/2,S}$, $\|\cdot\|_{-1/2,S}$ — нормы в $W_2^{1/2}(S)$ и $W_2^{-1/2}(S)$.

Как показано в [1], используя ортогональное разложение (1.1) можно построить энергетическое решение $\mathbf{u}_0$, например, первой задачи теории упругости

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_0 = \mathbf{K} \text{ в } \mathrm{G}, \mathbf{u}_0|_S = 0 \quad (P = \{0\})$$

через проекцию φ_0 произвольного вектора $\mathbf{u}^*$ в подпространство $P^\oplus$ с последующим вычитанием из вектора $\mathbf{u}^*$: $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}^* - \varphi_0$, так что $\mathbf{u}_0|_S \in P$. Таким образом, проекция $\varphi_0 \in P^\oplus$ минимизирует функционал $\mathbf{F}_0(\mathbf{u}'') = |\mathbf{u}^* - \mathbf{u}''|_{1/2, S}$ на $\mathbf{u}'' \in P^\oplus$, т. е.

$$\inf F_0(\mathbf{u}'') = \inf_{\mathbf{u}''\in P^\oplus} |\mathbf{u}^* - \mathbf{u}''|_{1/2, S} = |\mathbf{u}^* - \varphi_0|_{1/2, S}$$

Из второго разложения (1.1) следует существование и на основании теоремы об ортогональной проекции [2] разрешимость двойственной вариационной задачи.

2. Вариационная задача для функционала $F_0(\mathbf{u}'')$ эквивалентна вариационной задаче для функционала $|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}''|^2_{1/2S} - |\mathbf{u}^*|^2_{1/2, S}$, так как $\mathbf{u}^*$ — известный элемент, или в силу равенства

$$|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}''|^2_{1/2, S} - |\mathbf{u}^*|^2_{1/2, S} = |\mathbf{u}''|^2_{1/2, S} - 2[\mathbf{u}^*, \mathbf{u}'']_{1/2, S}$$

эквивалентна вариационной задаче для функционала

$$F(\mathbf{u}'') = [\mathbf{u}'', \mathbf{u}'']_{1/2, S} - 2[\mathbf{u}^*, \mathbf{u}'']_{1/2, S}, \quad \mathbf{u}'' \in P^{\oplus}$$

который с учетом равенства (1.5) может быть записан в виде

$$F(\mathbf{u}'') = (\mathbf{u}'', T\mathbf{u}'')_{0, S} - 2\langle u'', \mathbf{t}^{(\nu)}(u^*)\rangle$$

Здесь $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*) \in W_2^{-1/2}(S)$ — известный элемент. Элемент $\varphi_0 \in P^{\oplus}$ (для первой основной задачи теории упругости $P^{\oplus} = \overline{W}_2^{-1/2}(S)$ [1]), минимизирующий функционал $F(\mathbf{u}'')$, удовлетворяет условию

$$(2.1)\qquad (\mathbf{T}\varphi_0, \mathbf{u}'')_{0, S} \equiv \langle \mathbf{T}\varphi_0, \mathbf{u}''\rangle = \langle \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*), \quad \mathbf{u}''\rangle, \ \forall\, \mathbf{u}'' \in P^{\oplus}$$

Отсюда следует $\mathbf{T}\varphi_0 = \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*) \in P^{\perp}$.

В дальнейшем понадобится следующее утверждение, представляющее собой перефразировку известной теоремы (см. [4], стр. 137), для случая линейного симметрического и положительного оператора $L \in (V \to V^*)$, имеющего обратный $L^{-1} \in (V^* \to V)$, где V — рефлексивное банахово пространство.

Функционал $f(v) = {}^1/_2\langle Lv, v\rangle$ — потенциал оператора L, для оператора L^{-1} потенциалом является функционал

$$(2.2)\qquad f^*(v^*) = f^*(0) + {}^1/_2\langle v^*, L^{-1}v^*\rangle, \quad f^*(0) = -f(L^{-1}0) = 0$$

и при любых $v \in V$, $v^* \in V^*$ выполняются соотношения

$$(2.3)\qquad f(v) + f^*(v^*) - \langle v^* \ v\rangle \geqslant 0, \quad f(v) + f^*(Lv) - \langle Lv, v\rangle = 0$$

Примечание. Так как оператор $\mathbf{T}$ — изометрия $W_2^{*1/2}(S)$ на $W_2^{-1/2}(S)$, то оператор $\mathbf{T}^{-1}$ —также изометрия [1] $W_2^{-1/2}(S)$ на $W_2^{*1/2}(S)$ и, следовательно, $\mathbf{T}^{-1}0 = 0$.

Теорема 1. Пусть $\varphi_0 W_2^1(G)$ — обобщенное решение задачи (1.2), которое существует [3], и при этом имеет место [1]

$$\varphi_0|_S \in P^{\oplus}, \ \mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_0) + \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*) = 2\mathbf{T}\varphi_0 \in P^{\perp}, \quad \text{где } P^{\oplus} \text{ и } P^{\perp}$$

определены согласно (1.3). Тогда для функционалов

$$F(\mathbf{u}'') = (\mathbf{u}'', \mathbf{T}\mathbf{u}'')_{0, S} - 2\langle \mathbf{u}'', \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\rangle$$

$$\Phi(\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'')) = -{}^1/_4(\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'') + \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*), \ \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'') + \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)))_{0, S}$$

имеет место соотношение двойственности

$$F(\varphi_0) = \inf_{\mathbf{u}'' \in P^{\oplus}} F(\mathbf{u}'') = \sup_{\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'') \in P^{\perp}} \Phi(\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'')) = \Phi(\mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_0))$$

(Так как здесь нижняя (верхняя) грань достигается, то можно заменить inf (syp) на min (max).)

Согласно (2.2), функционал, сопряженный к $f(\mathbf{u}'') = {}^1/_2(\mathbf{u}'', \mathbf{T}\mathbf{u}'')_{0, S}$, есть

$$f^*(\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'')) = {}^1/_2(\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}''), \ \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'')))_{0, S}$$

Очевидно, что $f^*(0) = -f(\mathbf{T}^{-1}0) = -f(0) = 0$ (см. примечание).

Здесь и ниже отношение двойственности $\langle , \rangle$ отождествляется со скалярным произведением $(,)_{0, S}$ в гильбертовом пространстве $L_2(S)$ элементов из $W_2^{1/2}(S) \times W_2^{-1/2}(S)$.

Из выражений функционалов $F(\mathbf{u}'')$ и $\Phi(\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}''))$ получим

$$2F(\mathbf{u}'') - 2\Phi(\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'')) = 4f(\mathbf{u}'') - 4\langle \mathbf{u}'', \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\rangle + f^*(\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'') + \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*))$$

В силу первого соотношения (2.3) имеет место неравенство

$$f(\mathbf{u}'') + f^*(\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'') + t^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)) \geqslant \langle \mathbf{u}'', \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'') + \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*) \rangle \quad \forall u'' \in P^{\oplus}, \quad \mathbf{t}^{(\nu)}(u'') + t^{(\nu)}(\mathbf{u}^*) \in P^{\perp}$$

учитывая которое, получим

$$2F(\mathbf{u}'') - 2\Phi(\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'')) \geqslant 3f(\mathbf{u}'') - 4\langle \mathbf{u}'', \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\rangle + \langle \mathbf{u}'', \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'') + \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\rangle = 3f(\mathbf{u}'') - 3\langle \mathbf{u}'', \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\rangle + (\mathbf{u}'', \mathbf{T}\mathbf{u}'')_{0, S} = \frac{5}{2}(\mathbf{u}'', \mathbf{T}\mathbf{u}'')_{0, S} - 3\langle \mathbf{u}'', \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\rangle \tag{2.4}$$

Так как предполагается положительность функционала $F(\mathbf{u}'')$, то

$$\frac{6}{5}|\langle \mathbf{u}'', \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\rangle| < 2|\langle \mathbf{u}'', \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\rangle| \leqslant (\mathbf{u}'', \mathbf{T}\mathbf{u}'')_{0, S}$$

Тогда из (2.4) получим

$$F(\mathbf{u}'') - \Phi(\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'')) \geqslant 0, \quad \forall \mathbf{u}'' \in P^{\oplus}, \quad \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'') \in P^{\perp} \tag{2.5}$$

Далее имеем

$$F(\varphi_0) - \Phi(\mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_0)) = 2f(\varphi_0) - 2\langle \varphi_0, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\rangle + \frac{1}{2}f^*(\mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_0) + \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)) = 2f(\varphi_0) - 2\langle \varphi_0, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\rangle + \frac{1}{2}f^*(2\mathbf{T}\varphi_0) = 2f(\varphi_0) + 2f^*(\mathbf{T}\varphi_0) - 2\langle \varphi_0, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^+)\rangle \tag{2.6}$$

Так как $\mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_0)|_S = \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)|_S$ (см. (1.2) и $\langle \varphi_0, \mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_0)\rangle = \langle \varphi_0, \mathbf{T}\varphi_0\rangle$, то, используя (2.3), из (2.6) получим

$$F(\varphi_0) - \Phi(\mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_0)) = 2f(\varphi_0) + 2f^*(\mathbf{T}\varphi_0) - 2\langle \mathbf{T}\varphi_0, \varphi_0\rangle = 0$$

Из этого равенства и неравенства (2.5) следует утверждение теоремы.

Отметим, что аналогичный подход к доказательству соотношений двойственности использован также в [4].

3. Пусть $\varphi_n \in W_2^1(G)$ — приближенное значение проекции φ_0, построенное методом Ритца, такое, что

$$\lim|\mathbf{u}^* - \varphi_n|_{1/2, S} = |\mathbf{u}^* - \varphi_0|_{1/2, S} = \inf_{\mathbf{u}'' \in P^{\oplus}} F_0(\mathbf{u}''), \quad n \to \infty$$

Тогда можно показать [2], что приближенное решение $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}^* - \varphi_n$ основной краевой задачи теории упругости сходится к точному ее решению $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}^* - \varphi_0$ (при этом $\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_n = \varphi_n - \varphi_0$) в метрике $W^{*1/2}(S)$

$$\lim|\varphi_0 - \varphi_n|_{1/2, S} = \lim|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_n|_{1/2, S} = 0, \quad n \to \infty$$

и в силу (1.5) имеет место также

$$\lim\langle \varphi_n - \varphi_0, t^{(\nu)}(\varphi_n - \varphi_0)\rangle = \lim\langle \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_n, t^{(\nu)}, (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_n)\rangle = 0, \quad n \to \infty$$

и из (1.6) вытекает, что

$$\lim\|\mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_n) - \mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_0)\|_{-1/2, S} = \lim\|\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_0 - \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_n)\|_{-1/2, S} = 0, \quad n \to \infty$$

В силу равенства (1.4) следует также сходимость

$$\lim 2 \int_G W(\varphi_n - \varphi_0)\, dG = \lim 2 \int_G W(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_n)\, dG = 0, \quad n \to \infty$$

и, так как квадратичная форма

$$2 \int_G W(\varphi)\, dG$$

на векторах $\varphi \in W_2^1(G)$, удовлетворяющих условию

$$\int_G \varphi\, dG = 0$$

положительно определена [2, 3]

$$2 \int_G W(\varphi)\, dG \geqslant c \|\varphi\|_{1, G}^2, \quad c > 0, \quad \|\cdot\|_{1, G} = \|\cdot\|_{W_2^1(G)} \tag{3.1}$$

то имеет место также сходимость

$$\lim \| \varphi_n - \varphi_0 \|_{1, G} = \lim \| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_n \|_{1, G} = 0, \qquad n \to \infty$$

Рассмотрим вопрос об оценке погрешности приближенных решений двойственных вариационных задач, сформулированных в теореме 1 (см. [2]).

Теорема 2. Пусть $\varphi_n = W_2^1(G)$ $(\varphi_n |_S \in P^{\oplus}, \quad \mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_n) \in P^{\perp})$ — произвольные приближения «по Ритцу» для φ_0. Тогда имеют место оценки погрешности

$$\| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_n \|_{1, G} = \| \varphi_n - \varphi_0 \|_{1, G} \leqslant \Delta(\varphi_n)$$

$$\| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_n \|_{1/2, S} = \| \varphi_n - \varphi_0 \|_{1/2, S} \leqslant c_1 \Delta(\varphi_n)$$

$$\| \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_0) - \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_n) \|_{-1/2, S} = \| \mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_n) - \mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_0) \|_{-1/2, S} \leqslant c_2 \Delta(\varphi_n)$$

$$\left(\Delta(\varphi_n) = \left\{ \frac{1}{c} \left[F(\varphi_n) - \Phi(\mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_n)) \right] \right\}^{1/2} \right)$$

Искомая проекция φ_0, на которой достигается

$$\inf_{\mathbf{u}'' \in P^{\oplus}} | \mathbf{u}^* - \mathbf{u}'' |_{1/2, S}$$

есть обобщенное решение из $W_2^1(G)$ задачи (1.2) в смысле [3]

$$2 \int_G W(\varphi_0, \varphi)\, dG - \int_S \varphi \cdot \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\, ds = 0, \quad \forall \varphi \in W_2^1(G) \tag{3.2}$$

минимизирующее также функционал

$$F(\varphi) = 2 \int_G W(\varphi)\, dG - 2 \int_S \varphi \cdot \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\, ds$$

$$\text{на } \varphi \in W_2^1(G), \quad \int_G \varphi\, dG = 0$$

Для разности функционалов имеем

$$\frac{1}{2} F(\varphi_n) - \frac{1}{2} F(\varphi_0) = \int_G W(\varphi_n)\, dG - \int_G W(\varphi_0)\, dG -$$

$$- \int_S (\varphi_n - \varphi_0)\, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\, ds$$

Отсюда, положив в (3.2) $\varphi = \varphi_n - \varphi_0$, получим

$$\frac{1}{2}F(\varphi_n) - \frac{1}{2}F(\varphi_0) = \int_G W(\varphi_n)\,dG - \int_G W(\varphi_0)\,dG -$$
$$-2\int_G W(\varphi_0, \varphi_n - \varphi_0)\,dG = \int_G W(\varphi_n)\,dG - \int_G W(\varphi_0)\,dG -$$
$$-2\int_G W(\varphi_0, \varphi_n)\,dG + 2\int_G W(\varphi_0)\,dG = \int_G W(\varphi_n - \varphi_0)\,dG$$

Тогда в силу (3.1) следует неравенство

$$F(\varphi_n) - F(\varphi_0) > c\,\|\varphi_n - \varphi_0\|_{1,G}^2$$

Отсюда, используя неравенство $F(\varphi_0) > \Phi(\mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_n))$, которое следует из соотношения двойственности теоремы 1, получим оценку

$$\|\varphi_n - \varphi_0\|_{1,G} \leqslant \Delta(\varphi_n)$$

Из неравенства теоремы о следах на S функций из $W_2^1(G)$ в метрике $W_2^{1/2}(S)$ следует также оценка

$$\|\varphi_n - \varphi_0\|_{1/2,S} \leqslant c_1\Delta(\varphi_n), \quad c_1 > 0$$

и в силу (1.6) имеет место оценка

$$\|\mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_n) - \mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_0)\|_{-1/2,S} \leqslant c_2\Delta(\varphi_n), \quad c_2 > 0$$

Теорема доказана.

В силу равенства (см. (2.1))

$$(\mathbf{T}\varphi_n, \psi_k)_{0,S} = \langle \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*), \psi_k\rangle, \quad \forall \psi_k \in P^{\oplus}$$
$$\left(\varphi_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\psi_i\right)$$

которому должно удовлетворять приближенное решение φ_n задачи о минимуме функционала $F(\mathbf{u}'')$ и равенства $\mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_n) + \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*) = 2\mathbf{T}\varphi_n$ (которое понимается в смысле отношения двойственности на $W_2^{1/2}(S) \times \times W_2^{-1/2}(S)$), правая часть в полученных оценках может быть приведена к виду, удобному для вычислений

$$F(\varphi_n) - \Phi(\mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_n)) = (\mathbf{T}\varphi_n, \varphi_n)_{0,S} - 2\langle \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*), \varphi_n\rangle +$$
$$+ {}^1/_4(\mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_n) + \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*), \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_n) + \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)))_{0,S} =$$
$$= (\mathbf{T}\varphi_n, \varphi_n)_{0,S} - 2\langle \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*), \varphi_n\rangle + {}^1/_4(2\mathbf{T}\varphi_n, \mathbf{T}^{-1}(2\mathbf{T}\varphi_n))_{0,S} =$$
$$= (\mathbf{T}\varphi_n, \varphi_n)_{0,S} - 2\langle \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*), \varphi_n\rangle + \langle \mathbf{T}\varphi_n, \varphi_n\rangle_{0,S} =$$
$$= 2(\mathbf{T}\varphi_n, \varphi_n)_{0,S} - 2\langle \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*), \varphi_n\rangle = 2\int_S \varphi_n[\mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_n) - \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)]\,ds$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\lim_{n\to\infty} 2\int_S \varphi_n[\mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_n) - \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)]\,ds =$$
$$= 2\int_S \varphi_0[\mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_0) - \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)]\,ds = 0$$

так как (см. (1.2)) $\mathbf{t}^{\mu}(\varphi_0)|_S = \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)|_S$.

Отметим, что аналогично скалярному произведению $[\mathbf{u}'', \mathbf{v}'']_{1/2,\,S}$ элементов $\mathbf{u}', \mathbf{v}'' \in W_2^{*1/2}(S)$ (см. (1.5)) можно определить скалярное произведение элементов $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'')$ и $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v}'')$ из $W_2^{-1/2}(S)$ согласно теореме Рисса (см. примечание) следующим образом:

$$[\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}''),\ \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v}'')]_{-1/2,\,S} = (\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}''),\ \mathrm{T}^{-1}(\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v}'')))_{0,\,S}$$

с соответствующей нормой

$$|\,\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'')\,|_{-1/2,\,S} = \{[\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}''),\ \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'')]_{-1/2 S}\}^{1/2}$$

Тогда задача максимизации $\max \Phi(\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}''))$ $(\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'') \in P^{\perp})$ эквивалентна задаче минимизации

$$\max \Phi_{\perp}(\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'')) = \max\left[-\frac{1}{4}\,|\,\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'') + \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\,|^2_{-1/2,\,S}\right] =$$
$$= \min {}^1/_4\,|\,\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'') + \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\,|^2_{-1/2,\,S}$$

решение которой есть проекция элемента $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*) \in W_2^{-1/2}(S)$ на $P^{\perp}$

$$\min {}^1/_4\,|\,\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'') + \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\,|^2_{-1/2,\,S} = {}^1/_4\,|\,\mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_0) + \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\,|^2_{-1/2,\,S}, \quad (\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'') \in P^{\perp})$$

Другой подход к исследованию вариационных задач для выпуклых функционалов теории упругости, использующий идеи двойственности, рассматривался автором в работе [5].

Поступила 31 X 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Терещенко В. Я.* Метод ортогональных разложений на границе области в трехмерных задачах линейной теории упругости. ПММ, 1979, т. 43, вып. 4.
2. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
3. *Терещенко В. Я.* Обобщение метода Трефтца для пространственных задач теории упругости. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, т. 16, № 4.
4. *Гаевский X., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М., «Мир», 1978.
5. *Терещенко В. Я.* О выпуклых функционалах в вариационных задачах теории упругости, аналогичных обобщенным функционалам Трефтца. ПММ, 1980, т. 44, вып. 1.