Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 6, 1980

УДК 532.526

О НЕСТАЦИОНАРНОМ ПРОСТРАНСТВЕННОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ, СВОБОДНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕМ С ВНЕШНИМ ПОТОКОМ

О. С. Рыжов

(Москва)

Выводятся асимптотические уравнения, которым подчиняются нестационарные процессы в трехмерном пограничном слое с самоиндуцированным давлением. Как обычно, градиент давления в режиме свободного взаимодействия вычисляется не по решению внешней задачи обтекания, а полагается обусловленным ростом толщины вытеснения струек, расположенных вблизи поверхности тела. Наряду с главными членами в асимптотических последовательностях удерживаются члены второго порядка малости. Если характерные размеры области свободного взаимодействия одинаковы во всех направлениях, лежащих в касательной плоскости к обтекаемой поверхности, то система уравнений для тонкого пристеночного слоя должна интегрироваться совместно с системой, описывающей невязкий поток.

1. Внешний поток. Будем считать, что при свободном взаимодействии нестационарного пространственного пограничного слоя с внешним потоком образуются три области с существенно различными свойствами, как это имеет место в плоскопараллельных течениях. В основу математического анализа положим представления нелинейной теории возмущений, которая впервые была сформулирована в связи с изучением установившегося срыва [1–6] и затем развита применительно к процессам с зависящими от времени параметрами [7–11]. Согласно этой теории, в верхней области 1 эффекты вязкости и теплопроводности малы, вихри в течении отсутствуют. В средней области 2 влиянием диссипативных факторов также можно пренебречь, но поле скоростей является существенно вихревым. В формировании потока в тонкой пристеночной области 3 вязкость всегда играет определяющую роль; роль теплопроводности второстепенна, если температура газа варьируется в достаточно узких пределах, и следовательно, его сжимаемость практически не проявляется.

Обозначим t — время, x, y и z — декартовы координаты, v_x, v_y и v_z — составляющие скорости вдоль этих осей, ρ — плотность, p — давление, $\lambda^{(g)}$ — первый коэффициент вязкости. Параметры газа в невозмущенном стационарном состоянии отметим индексом ∞. Для простоты примем, что газ течет вдоль пластинки со скоростью U_∞, а число Маха M_∞ отлично от единицы на конечную величину. Введем малый параметр $\varepsilon = \mathrm{Re}^{-1/8}$, причем число Рейнольдса Re будем вычислять по первому коэффициенту вязкости и расстоянию L от носка пластинки. Поместим оси x и z на обтекаемой плоскости, причем первую из названных осей направим по вектору скорости набегающего из бесконечности потока.

Начнем анализ с внешней области 1, в которой течение безвихревое. Считая роли всех декартовых координат равноправными, положим здесь

$$t = L/U_\infty\,(t_0 + \varepsilon^2 t_1),\ x = L\,(1 + \varepsilon^3 x_1),\ y = \varepsilon^3 L y_1,\ z = \varepsilon^3 L z_1 \tag{1.1}$$

а искомые функции разложим в асимптотические ряды

$$\begin{gathered} v_x = U_\infty\,(1 + \varepsilon^2 u_{11} + \varepsilon^3 u_{12} + \ldots),\ v_y = U_\infty\,(\varepsilon^2 v_{11} + \varepsilon^3 v_{12} + \ldots), \\ v_z = U_\infty\,(\varepsilon^2 w_{11} + \varepsilon^3 w_{12} + \ldots),\ \rho = \rho_\infty\,(1 + \varepsilon^2 \rho_{11} + \varepsilon^3 \rho_{12} + \ldots), \\ p = p_\infty + \rho_\infty U_\infty^2 (\varepsilon^2 p_{11} + \varepsilon^3 p_{12} + \ldots) \end{gathered} \tag{1.2}$$

Аргументами функций $u_{1i}, v_{1i}, w_{1i}, \rho_{1i}, p_{1i}$ $(i = 1.\ 2,\ \ldots)$ служат t_1, x_1, y_1, z_1.

Подставим формулы (1.1) и разложения (1.2) в систему уравнений Навье — Стокса и соберем члены при одинаковых степенях ε. Для функций первого приближения находим

$$\begin{gathered} \frac{\partial \rho_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial w_{11}}{\partial z_1} = 0 \\ \frac{\partial u_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} = 0,\quad \frac{\partial v_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{11}}{\partial y_1} = 0 \\ \frac{\partial w_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{11}}{\partial z_1} = 0,\quad M_\infty^2 \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial \rho_{11}}{\partial x_1} = 0 \end{gathered} \tag{1.3}$$

Существенно, что все уравнения, образующие систему (1.3), не содержат производных по времени. Это означает, что внешний невязкий поток ведет себя инертно, успевая мгновенно подстраиваться под те возмущения, которые возникают, как обычно в задачах на свободное взаимодействие, в пристеночной области 3. Функции второго приближения удовлетворяют неоднородной системе линейных уравнений

$$\begin{gathered} \frac{\partial \rho_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{12}}{\partial y_1} + \frac{\partial w_{12}}{\partial z_1} = -\frac{\partial \rho_{11}}{\partial t_1} \\ \frac{\partial u_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_1} = -\frac{\partial u_{11}}{\partial t_1},\quad \frac{\partial v_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial y_1} = -\frac{\partial v_{11}}{\partial t_1} \\ \frac{\partial w_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial z_1} = -\frac{\partial w_{11}}{\partial t_1},\quad M_\infty^2 \frac{\partial p_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \rho_{12}}{\partial x_1} = 0 \end{gathered} \tag{1.4}$$

Соответствующая ей однородная система совпадает с системой (1.3). Время входит лишь в правые части уравнений (1.4), в их решениях оно будет содержаться также в качестве параметра.

Произведем частичное интегрирование систем уравнений (1.3) и (1.4) при условии, что значения всех искомых функций стремятся к нулю при $x_1 \to -\infty$, $t_1, y_1, z_1 = \mathrm{const}$ и $y_1 \to +\infty$, $t_1, x_1, z_1 = \mathrm{const}$. Первая из указанных систем дает

$$\begin{gathered} (1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 p_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p_{11}}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 p_{11}}{\partial z_1^2} = 0,\quad u_{11} = -p_{11},\quad \rho_{11} = M_\infty^2 p_{11} \\ v_{11} = -\frac{\partial}{\partial y_1} \int_{-\infty}^{x_1} p_{11}(t_1, \xi, y_1, z_1)\, d\xi \\ w_{11} = -\frac{\partial}{\partial z_1} \int_{-\infty}^{x_1} p_{11}(t_1, \xi, y_1, z_1)\, d\xi \end{gathered} \tag{1.5}$$

Для плоскопараллельного сверхзвукового потока с $\partial/\partial z_1 = 0$ и $M_\infty > 1$ общее решение волнового уравнения определяется формулой Деламбера. Отсюда следует связь

$$p_{11}(t_1, x_1, 0) = (M_\infty^2 - 1)^{-1/2} v_{11}(t_1, x_1, 0) \tag{1.6}$$

между возмущенным давлением и поперечной составляющей вектора скорости при $y_1 = 0$. Для плоскопараллельного дозвукового потока с $\partial/\partial z_1 = 0$ и $M_\infty < 1$ получается задача Неймана для уравнения Лапласа, решение которой ищется в полуплоскости $y_1 > 0$. В этом случае имеем

$$p_{11}(t_1, x_1, 0) = -\frac{1}{\pi}(1 - M_\infty^2)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_{11}(t_1, \xi, 0)}{x_1 - \xi} d\xi \tag{1.7}$$

Если термодинамические функции и поле скоростей зависят от всех трех пространственных переменных x, y и z, то соотношения (1.6) и (1.7) теряют силу. Как будет видно в дальнейшем, отсутствие простых выражений для параметров газа во внешнем потоке не позволяет сформулировать краевую задачу отдельно для пристеночной области трехмерного пограничного слоя.

Результат частичного интегрирования системы уравнений для функций второго приближения гласит:

$$(1 - M_\infty^2)\frac{\partial^2 p_{12}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p_{12}}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 p_{12}}{\partial z_1^2} = 2M_\infty^2 \frac{\partial^2 p_{11}}{\partial t_1 \partial x_1} \tag{1.8}$$

$$\rho_{12} = M_\infty^2 p_{12}, \quad u_{12} = -p_{12} + \frac{\partial}{\partial t_1}\int_{-\infty}^{x_1} p_{11}\, d\xi$$

$$v_{12} = -\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{-\infty}^{x_1} p_{12}\, d\xi + \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial y_1}\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{\zeta} p_{11}\, d\xi\, d\zeta$$

$$w_{12} = -\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{-\infty}^{x_1} p_{12}\, d\xi + \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial z_1}\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{\zeta} p_{11}\, d\xi\, d\zeta$$

Аргументами функций p_{11}, p_{12} под знаками интеграла служат t_1, ξ, y_1, z_1.

Если поток плоскопараллельный сверхзвуковой, то обе функции p_{12} и v_{12} являются решениями волнового уравнения с правой частью. Для плоскопараллельного дозвукового потока можно сформулировать задачу Неймана для уравнения Пуассона, решение которой подлежит определению в верхней полуплоскости $y_1 > 0$. В обоих случаях существуют зависимости [11], связывающие $p_{12}(t_1, x_1, 0)$ с $v_{12}(t_1, x_1, 0)$ и функциями первого приближения на линии $y_1 = 0$. Для трехмерного пограничного слоя такого рода зависимости отсутствуют.

2. Промежуточная область. Перейдем к изучению области 2, занимающей основную толщу пограничного слоя. Несмотря на возможность пренебречь вязкими напряжениями и потоком тепла, поле скоростей в этой области уже в первом приближении содержит вихри. Масштабы времени и координат задаются формулами

$$t = L/U_\infty (t_0 + \varepsilon^2 t_2), \quad x = L(1 + \varepsilon^3 x_2), \quad y = \varepsilon^4 L y_2, \quad z = \varepsilon^3 L z_2 \tag{2.1}$$

Для параметров газа верны разложения

$$v_x = U_\infty (U_0 (y_2) + \varepsilon u_{21} + \varepsilon^2 u_{22} + \ldots) \tag{2.2}$$
$$v_y = U_\infty (\varepsilon^2 v_{21} + \varepsilon^3 v_{22} + \ldots)$$
$$v_z = U_\infty (\varepsilon^2 w_{21} + \varepsilon^3 w_{22} + \ldots),\ \rho = \rho_\infty (R_0 (y_2) + \varepsilon \rho_{21} + \varepsilon^2 \rho_{22} + \ldots)$$
$$p = p_\infty + \rho_\infty U_\infty^2 (\varepsilon^2 p_{21} + \varepsilon^3 p_{22} + \ldots)$$

Аргументами функций $u_{2i}, v_{2i}, w_{2i}, \rho_{2i}, p_{2i}$ $(i = 1, 2\ldots)$ служат t_2, x_2, y_2, z_2.

Сравнение формул (1.1) и (2.1) показывает, прежде всего, что $t_1 = t_2$, $x_1 = x_2$ и $z_1 = z_2$, но $y_1 \neq y_2$. Роли декартовых координат в области 2 становятся неравноправными, поскольку характерная длина в перпендикулярном к обтекаемой пластинке направлении выбрана равной толщине невозмущенного пограничного слоя. Структура последнего находится из решения Блазиуса [12], сращивание с которым при $x_2 \to -\infty$, t_2, y_2, $z_2 = \text{const}$ позволяет установить вид функций $U_0 (y_2)$ и $R_0 (y_2)$. Отметим, что поперечная v_y и боковая v_z составляющие вектора скорости сравнимы по величине, возмущения продольной составляющей скорости значительно превосходят их по порядку своей амплитуды.

В результате подстановки формул (2.1) вместе с разложениями (2.2) в систему уравнений Навье — Стокса имеем для главных членов

$$R_0 \frac{\partial u_{21}}{\partial x_2} + U_0 \frac{\partial \rho_{21}}{\partial x_2} + R_0 \frac{\partial v_{21}}{\partial y_2} + v_{21} \frac{dR_0}{dy_2} = 0 \tag{2.3}$$
$$U_0 \frac{\partial u_{21}}{\partial x_2} + v_{21} \frac{dU_0}{dy_2} = 0, \quad \frac{\partial p_{21}}{\partial y_2} = 0$$
$$R_0 U_0 \frac{\partial w_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{21}}{\partial z_2} = 0, \quad U_0 \frac{\partial \rho_{21}}{\partial x_2} + v_{21} \frac{dR_0}{dy_2} = 0$$

Снова во всех уравнениях системы (2.3) отсутствуют производные по времени. В первом приближении колебания в основной части пограничного слоя передаются мгновенно от точки к точке. Существенно нестационарный характер течение может иметь только в тонкой пристеночной области.

Четвертое уравнение из системы (2.3) отщепляется от остальных, которые интегрируются независимо от него. Интеграл четвертого уравнения (2.3) находится после того, как найдено решение для функций u_{21}, v_{21}, ρ_{21} и p_{21}. Это решение определяет структуру плоскопараллельного потока. Отсюда заключаем, что на любой двумерный пограничный слой можно наложить возмущения в боковом направлении, лежащем в касательной к обтекаемой поверхности плоскости, без каких-либо нарушений в полях других параметров газа. В области 2 трехмерный пограничный слой в первом приближении отличается от двумерного только наличием компонента вектора скорости в направлении оси z, который находится по распределению давления.

Для поправочных членов из разложений (2.2) система уравнений получается неоднородной

$$R_0 \frac{\partial u_{22}}{\partial x_2} + U_0 \frac{\partial \rho_{22}}{\partial x_2} + R_0 \frac{\partial v_{22}}{\partial y_2} + v_{22} \frac{dR_0}{dy_2} = \tag{2.4}$$
$$= -\frac{\partial \rho_{21}}{\partial t_2} - \frac{\partial \rho_{21} u_{21}}{\partial x_2} - \frac{\partial \rho_{21} v_{21}}{\partial y_2} - R_0 \frac{\partial w_{21}}{\partial z_2}$$

$$R_0U_0\frac{\partial u_{22}}{\partial x_2}+R_0v_{22}\frac{dU_0}{dy_2}=-R_0\frac{\partial u_{21}}{\partial t_2}-\frac{\partial p_{21}}{\partial x_2}-R_0u_{21}\frac{\partial u_{21}}{\partial x_2}-$$
$$-R_0v_{21}\frac{\partial u_{21}}{\partial y_2},\quad \frac{\partial p_{22}}{\partial y_2}=-R_0U_0\frac{\partial v_{21}}{\partial x_2}$$
$$R_0U_0\frac{\partial w_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial p_{22}}{\partial z_2}=-R_0\frac{\partial w_{21}}{\partial t_2}-$$
$$-(R_0u_{21}+U_0\rho_{21})\frac{\partial w_{21}}{\partial x_2}-R_0v_{21}\frac{\partial w_{21}}{\partial y_2}$$
$$U_0\frac{\partial \rho_{22}}{\partial x_2}+v_{22}\frac{dR_0}{dy_2}=-\frac{\partial \rho_{21}}{\partial t_2}-u_{21}\frac{\partial \rho_{21}}{\partial x_2}+$$
$$+M_\infty^2R_0U_0\frac{\partial p_{21}}{\partial x_2}-v_{21}\frac{\partial \rho_{21}}{\partial y_2}$$

Соответствующая ей однородная система по форме совпадает с системой (2.3), но является линейной. Время входит только в члены, стоящие в правых частях уравнений (2.4), поэтому оно будет содержаться в их решениях как параметр. Таким образом, параметрическая зависимость от времени служит отличительной чертой разложений, задающих поле возмущенного потока как в верхней области 1, так и в промежуточной области 2.

Четвертое уравнение (2.4) можно отделить от остальных, которые образуют замкнутую систему. Эта система отличается от системы, отвечающей двумерному пограничному слою, только членом $-R_0\partial w_{21}/\partial z_2$ в правой части первого из входящих в нее уравнений.

Приступая к интегрированию двух последних систем уравнений, потребуем, чтобы возмущения в области 2 затухали на бесконечности вверх по потоку. Для главных членов справедливы явные выражения

$$u_{21}=A_1\frac{dU_0}{dy_2},\quad v_{21}=-\frac{\partial A_1}{\partial x_2}U_0(y_2),\quad \rho_{21}=A_1\frac{dR_0}{dy_2}, \tag{2.5}$$
$$p_{21}=p_{21}(t_2,x_2,z_2),\quad w_{21}=-\frac{1}{R_0(y_2)U_0(y_2)}\frac{\partial}{\partial z_2}\int_{-\infty}^{x_2}p_{21}(t_2,\xi,z_2)\,d\xi$$

Произвольная функция $A_1(t_2,x_2,z_2)$ удовлетворяет условию $A_1\to 0$ при $x_2\to-\infty$, t_2, $z_2=\mathrm{const}$. Смысл этого простого решения состоит в том, что линии тока в пограничном слое оказываются смещенными, причем в каждом сечении $z_2=\mathrm{const}$ величина мгновенного смещения для двумерного потока, который служит основой при построении пространственного поля скоростей, устанавливается заменой y_2 на $y_2+\varepsilon A_1(t_2,x_2,z_2)$ в решении Блазиуса.

Система уравнений (2.4) допускает частичное интегрирование. Учитывая явный вид решения для функций первого приближения, находим

$$p_{22}=p_{22}(t_2,x_2,0,z_2)+\left[y_2-\int_0^{y_2}\frac{M_\infty^2-M_0^2(\eta)}{M_\infty^2}\,d\eta\right]\frac{\partial^2A_1}{\partial x_2^2} \tag{2.6}$$
$$M_0^2(y_2)=M_\infty^2R_0(y_2)\,U_0^2(y_2)$$
$$v_{22}=-\frac{\partial A_1}{\partial t_2}-U_0\frac{\partial A_2}{\partial x_2}-A_1\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\frac{dU_0}{dy_2}-$$
$$-y_2U_0\left[(M_\infty^2-1)\frac{\partial p_{21}}{\partial x_2}-\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\int_{-\infty}^{x_2}p_{21}\,d\xi\right]-$$

$$-M_\infty^2 U_0\left[\frac{\partial p_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\int\limits_{-\infty}^{x_2} p_{21}d\xi\right]\int\limits_{y_2}^{\infty}\left[\frac{1}{M_0^2(\eta)}-\frac{1}{M_\infty^2}\right]d\eta$$

$$\frac{\partial u_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial v_{22}}{\partial y_2}=-M_\infty^2 U_0\frac{\partial p_{21}}{\partial x_2}+\frac{1}{R_0U_0}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\int\limits_{-\infty}^{x_2} p_{21}d\xi$$

$$R_0U_0\frac{\partial w_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial p_{22}(t_2,x_2,0,z_2)}{\partial z_2}=\frac{1}{U_0}\frac{\partial^2}{\partial t_2\partial z_2}\int\limits_{-\infty}^{x_2} p_{21}d\xi+$$

$$+\left(\frac{1}{U_0}\frac{dU_0}{dy_2}+\frac{1}{R_0}\frac{dR_0}{dy_2}\right)\left[A_1\frac{\partial p_{21}}{\partial z_2}+\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\int\limits_{-\infty}^{x_2} p_{21}d\xi\right]-$$

$$-\frac{\partial^3 A_1}{\partial x_2^2\partial z_2}\left[y_2-\int\limits_0^{y_2}\frac{M_\infty^2-M_0^2(\eta)}{M_\infty^2}d\eta\right]$$

$$U_0\frac{\partial\rho_{22}}{\partial x_2}+v_{22}\frac{dR_0}{dy_2}=-\frac{\partial A_1}{\partial t_2}\frac{dR_0}{dy_2}+M_\infty^2R_0U_0\frac{\partial p_{21}}{\partial x_2}+$$

$$+A_1\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\left(U_0\frac{d^2R_0}{dy_2^2}-\frac{dU_0}{dy_2}\frac{dR_0}{dy_2}\right)$$

Здесь аргументами функции p_{21}, стоящей под знаками интеграла, служат t_2, ξ, z_2, а произвольная функция A_2 (t_2, x_2, z_2) подчиняется условию $A_2\to 0$ при $x_2\to-\infty$, $t_2, z_2 = \text{const}$.

3. Пристеночный слой. Приступим к анализу области 3, где вязкость оказывает преобладающее влияние на структуру поля скоростей. В этой области следует положить

$$t = L/U_\infty\,(t_0+\varepsilon^2t_3),\quad x = L\,(1+\varepsilon^3x_3),\quad y=\varepsilon^5Ly_3,\quad z=\varepsilon^3Lz_3 \tag{3.1}$$

и записать разложения для параметров газа в виде

$$\begin{aligned} v_x &= U_\infty\,(\varepsilon u_{31}+\varepsilon^2u_{32}+\ldots),\quad v_y=U_\infty\,(\varepsilon^3v_{31}+\varepsilon^4v_{32}+\ldots)\\ v_z &= U_\infty\,(\varepsilon w_{31}+\varepsilon^2w_{32}+\ldots),\quad \rho=\rho_\infty\,(\rho_{31}+\varepsilon\rho_{32}+\ldots)\\ p &= p_\infty+\rho_\infty U_\infty^2\,(\varepsilon^2p_{31}+\varepsilon^3p_{32}+\ldots)\end{aligned}\tag{3.2}$$

Аргументами функций u_{3i}, v_{3i}, w_{3i}, ρ_{3i}, p_{3i} $(i = 1, 2, \ldots)$ служат t_3, x_3, y_3, z_3.

Как видно из сравнения формул (1.1), (2.1) и (3.1), $t_1 = t_2 = t_3$, $x_1 = x_2 = x_3$ и $z_1 = z_2 = z_3$, однако $y_1 \neq y_2 \neq y_3$. Это естественно, поскольку характерные размеры всех трех областей в направлениях, лежащих в обтекаемой плоскости, одинаковы и отсчет времени во всех трех областях также производится одинаковым образом. Что касается масштабов в поперечном к пластинке направлении, то они, согласно основным представлениям теории свободного взаимодействия [1-6], выбираются по-разному. Как и в области 2, роли декартовых координат в области 3 существенно неравноправны.

При выводе уравнений в пристеночном слое требуется написать еще разложение для температуры

$$T = T_\infty\,(T_{31}+\varepsilon T_{32}+\ldots),\quad T_{3i}=T_{3i}\,(t_3,x_3,y_3,z_3),\quad i=1,2,\ldots \tag{3.3}$$

Уравнение состояния Клапейрона $p = R^{(g)}\rho T$ (где $R^{(g)}$ — газовая постоянная) позволяет исключить из анализа функции T_{31} и T_{32}, выразив их через величины, входящие только в разложения плотности. Эти выражения можно использовать, обращаясь к рассмотрению удельной теплоемкости при постоянном давлении c_p и коэффициентов первой вязкости $\lambda^{(g)}$ и теплопроводности k, которые обычно задаются зависящими от одной температуры. Для сокращения выкладок удобно ввести отношения $q = \rho / c_p$ и $\chi = k / \rho^2$. Для названных термодинамических функций верны разложения

$$\lambda^{(g)} = \lambda_\infty^{(g)} (\lambda_{31}^{(g)} + \varepsilon\lambda_{32}^{(g)} + \ldots), \quad q = \frac{\rho_\infty}{c_{p_\infty}} (q_{31} + \varepsilon q_{32} + \ldots) \tag{3.4}$$

$$\chi = \frac{k_\infty}{\rho_\infty^2} (\chi_{31} + \varepsilon\chi_{32} + \ldots)$$

Аргументами функций $\lambda^{(g)}{}_{3i}$, q_{3i}, χ_{3i} $(i = 1, 2, \ldots)$ служат t_3, x_3, y_3, z_3.

Внося формулы (3.1) вместе с асимптотическими последовательностями (3.2) — (3.4) в систему уравнений Навье — Стокса, приходим к обычным уравнениям Прандтля

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \rho_{31}}{\partial t_3} + \frac{\partial \rho_{31} u_{31}}{\partial x_3} + \frac{\partial \rho_{31} v_{31}}{\partial y_3} + \frac{\partial \rho_{31} w_{31}}{\partial z_3} = 0 \\
\rho_{31}\left(\frac{\partial u_{31}}{\partial t_3} + u_{31}\frac{\partial u_{31}}{\partial x_3} + v_{31}\frac{\partial u_{31}}{\partial y_3} + w_{31}\frac{\partial u_{31}}{\partial z_3}\right) = \\
= -\frac{\partial p_{31}}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial y_3}\left(\lambda_{31}^{(g)}\frac{\partial u_{31}}{\partial y_3}\right) \\
\frac{\partial p_{31}}{\partial y_3} = 0 \\
\rho_{31}\left(\frac{\partial w_{31}}{\partial t_3} + u_{31}\frac{\partial w_{31}}{\partial x_3} + v_{31}\frac{\partial w_{31}}{\partial y_3} + w_{31}\frac{\partial w_{31}}{\partial z_3}\right) = -\frac{\partial p_{31}}{\partial z_3} + \\
+ \frac{\partial}{\partial y_3}\left(\lambda_{31}^{(g)}\frac{\partial w_{31}}{\partial y_3}\right) \\
\frac{\partial \rho_{31}}{\partial t_3} + u_{31}\frac{\partial \rho_{31}}{\partial x_3} + v_{31}\frac{\partial \rho_{31}}{\partial y_3} + w_{31}\frac{\partial \rho_{31}}{\partial z_3} = \frac{1}{\mathrm{Pr}} q_{31}\frac{\partial}{\partial y_3}\left(\chi_{31}\frac{\partial \rho_{31}}{\partial y_3}\right)
\end{gathered} \tag{3.5}$$

для нестационарного трехмерного пограничного слоя в сжимаемом газе, которым удовлетворяют главные члены. Разница состоит, однако, в том, что возмущенное давление нельзя брать из решения внешней задачи обтекания. В частности, для рассматриваемого пограничного слоя на пластинке обе производные $\partial p_{31}/\partial x_3$ и $\partial p_{31}/\partial z_3$ отличны от нуля. К уравнениям (3.5) нужно присоединить конечные связи термодинамических коэффициентов $\lambda_{31}{}^{(g)}$, q_{31} и χ_{31} с возмущениями плотности ρ_{31} и давления p_{31}. Число Прандтля Pr равно, как обычно, отношению числа Пекле к числу Рейнольдса, т. е. $\mathrm{Pr} = c_{p_\infty}\lambda_\infty{}^{(g)}/k_\infty$.

Для функций второго приближения находим

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \rho_{32}}{\partial t_3} + \frac{\partial(\rho_{31}u_{32} + \rho_{32}u_{31})}{\partial x_3} + \frac{\partial(\rho_{31}v_{32} + \rho_{32}v_{31})}{\partial y_3} + \\
+ \frac{\partial(\rho_{31}w_{32} + \rho_{32}w_{31})}{\partial z_3} = 0 \\
\rho_{31}\frac{\partial u_{32}}{\partial t_3} + \rho_{32}\frac{\partial u_{31}}{\partial t_3} + \rho_{31}u_{31}\frac{\partial u_{32}}{\partial x_3} + (\rho_{31}u_{32} + \rho_{32}u_{31})\frac{\partial u_{31}}{\partial x_3} + \\
+ \rho_{31}v_{31}\frac{\partial u_{32}}{\partial y_3} + (\rho_{31}v_{32} + \rho_{32}v_{31})\frac{\partial u_{31}}{\partial y_3} + \rho_{31}w_{31}\frac{\partial u_{32}}{\partial z_3} + \\
+ (\rho_{31}w_{32} + \rho_{32}w_{31})\frac{\partial u_{31}}{\partial z_3} = -\frac{\partial p_{32}}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial y_3}\left(\lambda_{31}^{(g)}\frac{\partial u_{32}}{\partial y_3} + \lambda_{32}^{(g)}\frac{\partial u_{31}}{\partial y_3}\right)
\end{gathered} \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial p_{32}}{\partial y_3}=0$$

$$\rho_{31}\frac{\partial w_{32}}{\partial t_3}+\rho_{32}\frac{\partial w_{31}}{\partial t_3}+\rho_{31}u_{31}\frac{\partial w_{32}}{\partial x_3}+(\rho_{31}u_{32}+\rho_{32}u_{31})\frac{\partial w_{31}}{\partial x_3}+$$
$$+\rho_{31}v_{31}\frac{\partial w_{32}}{\partial y_3}+(\rho_{31}v_{32}+\rho_{32}v_{31})\frac{\partial w_{31}}{\partial y_3}+\rho_{31}w_{31}\frac{\partial w_{32}}{\partial z_3}+$$
$$+(\rho_{31}w_{32}+\rho_{32}w_{31})\frac{\partial w_{31}}{\partial z_3}=-\frac{\partial p_{32}}{\partial z_3}+\frac{\partial}{\partial y_3}\left(\lambda_{31}^{(g)}\frac{\partial w_{32}}{\partial y_3}+\lambda_{32}^{(g)}\frac{\partial w_{31}}{\partial y_3}\right)$$

$$\frac{\partial \rho_{32}}{\partial t_3}+u_{32}\frac{\partial \rho_{31}}{\partial x_3}+u_{31}\frac{\partial \rho_{32}}{\partial x_3}+v_{32}\frac{\partial \rho_{31}}{\partial y_3}+v_{31}\frac{\partial \rho_{32}}{\partial y_3}+w_{32}\frac{\partial \rho_{31}}{\partial z_3}+$$
$$+w_{31}\frac{\partial \rho_{32}}{\partial z_3}=\frac{1}{\Pr}\left[q_{31}\frac{\partial}{\partial y_3}\left(\chi_{31}\frac{\partial \rho_{32}}{\partial y_3}+\chi_{32}\frac{\partial \rho_{31}}{\partial y_3}\right)+\right.$$
$$\left.+q_{32}\frac{\partial}{\partial y_3}\left(\chi_{31}\frac{\partial \rho_{31}}{\partial y_3}\right)\right]$$

Это не что иное, как линеаризованные уравнения Прандтля для нестационарных пространственных течений сжимаемого газа. Остальные члены, входящие в исходную систему уравнений Навье — Стокса, будут влиять только на построение высших приближений. С последним обстоятельством связана также однородность всех уравнений, образующих систему (3.6). В ней термодинамические величины $\lambda_{31}^{(g)}$, $\lambda_{32}^{(g)}$, q_{31}, q_{32}, χ_{31} и χ_{32} подлежат выражению через возмущения плотности ρ_{31}, ρ_{32} и давления p_{31}, p_{32}, что достигается при помощи предварительной подстановки формулы (3.3) для температуры в уравнение состояния Клапейрона.

4. Сращивание асимптотических разложений. Чтобы произвести сращивание рассматриваемых асимптотических последовательностей, необходимо знать поведение решения при приближении изнутри к верхней и нижней границам области 2. Поскольку $R_0(y_2)\to 1$ и $U_0'(y_2)\to 1$ при $y_2\to\infty$, соотношения (2.6) дают

(4.1)
$$p_{22}-y_2\frac{\partial^2 A_1}{\partial x_2^2}\to p_{22}(t_2,x_2,0,z_2)-\frac{\partial^2 A_1}{\partial x_2^2}\int_0^\infty\frac{M_\infty^2-M_0^2(\eta)}{M_\infty^2}d\eta$$

$$v_{22}+y_2\left[(M_\infty^2-1)\frac{\partial p_{21}}{\partial x_2}-\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\int_{-\infty}^{x_2}p_{21}(t_2,\xi,z_2)\,d\xi\right]\to-\frac{\partial A_1}{\partial t_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_2}$$

$$w_{22}+y_2\frac{\partial^2 A_1}{\partial x_2\partial z_2}\to\frac{\partial^2}{\partial t_2\partial z_2}\int_{-\infty}^{x_2}p_{21}(t_2,\xi,z_2)\,d\xi-$$
$$-\frac{\partial}{\partial z_2}\int_{-\infty}^{x_2}p_{22}(t_2,\xi,0,z_2)\,d\xi+\frac{\partial^2 A_1}{\partial x_2\partial z_2}\int_0^\infty\frac{M_\infty^2-M_0^2(\eta)}{M_\infty^2}d\eta$$

$$u_{22}\to-p_{21}(t_2,x_2,z_2),\quad \rho_{22}\to M_\infty^2 p_{21}(t_2,x_2,z_2)$$

Эти формулы верны при любых условиях на пластинке. Поведение решения вблизи нижней границы области 2 зависит от того, какой тепловой режим поддерживается на обтекаемой поверхности. Будем считать для простоты, что пластинка термически изолирована. Пусть буква $\varkappa$ обозначает отношение удельных теплоемкостей, тогда на ее поверхности будут иметь место соотношения

$$\frac{dR_0^\circ}{dy_2}=0,\quad \frac{d^2R_0^\circ}{dy_2^2}=(\varkappa-1)M_\infty^2\Pr\left[R_0^\circ\frac{dU_0^\circ}{dy_2}\right]^2,\quad \frac{d^2U_0^\circ}{dy_2^2}=0$$
$$(R_0^\circ=R_0(0),\ U_0^\circ=U_0(0))$$

следующие из решения Блазиуса [12]. Учитывая их, можно показать, что при $y_2 \to 0$ функции

(4.2) $$p_{22} \to p_{22}(t_2, x_2, 0, z_2)$$

$$v_{22} \to -\frac{\partial A_1}{\partial t_2} - A_1\frac{\partial A_1}{\partial x_2} - \left[R_0{}^\circ \frac{dU_0{}^\circ}{dy_2}\right]^{-1}\left[\frac{\partial p_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2{}^2}\int\limits_{-\infty}^{x_2} p_{21}\,d\xi\right]$$

$$u_{22} \to \frac{dU_0{}^\circ}{dy_2}A_2 + \left[y_2R_0{}^\circ \frac{dU_0{}^\circ}{dy_2}\right]^{-1}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\int\limits_{-\infty}^{x_2}\int\limits_{-\infty}^{\zeta} p_{21}\,d\xi\,d\zeta +$$
$$+ M_\infty^2\frac{dU_0{}^\circ}{dy_2}\left[p_{21} + \frac{\partial^2}{\partial z_2{}^2}\int\limits_{-\infty}^{x_2}\int\limits_{-\infty}^{\zeta} p_{21}\,d\xi\,d\zeta\right] \times$$
$$\times \int\limits_0^\infty\left\{\frac{1}{M_0{}^2(\eta)} - \left[\eta\frac{dM_0{}^\circ}{dy_2}\right]^{-2} - \frac{1}{M_\infty^2}\right\}d\eta$$

$$w_{22} \to \left[y_2{}^2R_0{}^\circ \frac{dU_0{}^\circ}{dy_2}\right]^{-1}\int\limits_{-\infty}^{x_2}\left\{A_1\frac{\partial p_{21}}{\partial z_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \zeta}\frac{\partial}{\partial z_2}\int\limits_{-\infty}^{\zeta} p_{21}\,d\xi +\right.$$
$$\left. + \left[\frac{dU_0{}^\circ}{dy_2}\right]^{-1}\frac{\partial^2}{\partial t_2\partial z_2}\int\limits_{-\infty}^{\zeta} p_{21}\,d\xi\right\}d\zeta -$$
$$-\left[y_2R_0{}^\circ\frac{dU_0{}^\circ}{dy_2}\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial z_2}\int\limits_{-\infty}^{x_2} p_{22}(t_2, \xi, 0, z_2)\,d\xi +$$
$$+\left[(R_0{}^\circ)^2\frac{dU_0{}^\circ}{dy_2}\right]^{-1}\frac{d^2R_0{}^\circ}{dy_2{}^2}\int\limits_{-\infty}^{x_2}\left[A_1\frac{\partial p_{21}}{\partial z_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \zeta}\frac{\partial}{\partial z_2}\int\limits_{-\infty}^{\zeta} p_{21}\,d\xi\right]d\zeta$$

$$\rho_{22} \to M_\infty^2R_0{}^\circ p_{21} + \frac{d^2R_0{}^\circ}{dy_2{}^2}\left\{\frac{1}{2}A_1{}^2 + \frac{1}{R_0{}^\circ}\left[\frac{dU_0{}^\circ}{dy_2}\right]^{-2} \times\right.$$
$$\left.\times\left[p_{21} + \frac{\partial^2}{\partial z_2{}^2}\int\limits_{-\infty}^{x_2}\int\limits_{-\infty}^{\zeta} p_{21}\,d\xi\,d\zeta\right]\right\},\quad M_0{}^\circ = M_0(0)$$

Аргументами функций p_{21} и A_1, стоящих под знаками интеграла, служат t_2, ξ, z_2 и t_2, ζ, z_2 соответственно.

Следует обратить внимание на тот факт, что в выражении для u_{22} содержится особенность вида $y_2{}^{-1}$, а в асимптотической формуле для w_{22} наряду с особенностью порядка $y_2{}^{-1}$ возникает более сильная особенность вида $y_2{}^{-2}$. Указанные сингулярности присущи пространственным течениям, в соответствующих разложениях для плоскопараллельного пограничного слоя с $\partial/\partial z_2 = 0$ они отсутствуют.

Воспользуемся формулами (2.5) для главных членов последовательностей и асимптотическими выражениями (4.1) для функций второго приближения, чтобы получить граничные условия, которым необходимо удовлетворить при построении решения в области 1. Когда $y_2 \to \infty$, внешняя переменная $y_1 \to 0$. Отсюда вытекает, что

(4.3) $$p_{11}(t_1, x_1, 0, z_1) = p_{21}(t_2, x_2, z_2),\quad v_{11}(t_1, x_1, 0, z_1) = -\frac{\partial A_1}{\partial x_2}$$

$$u_{11}(t_1, x_1, 0, z_1) = -p_{21}(t_2, x_2, z_2), \quad w_{11}(t_1, x_1, 0, z_1) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial z_2}\int\limits_{-\infty}^{x_2} p_{21}(t_2, \xi, z_2)\,d\xi$$

$$\rho_{11}(t_1, x_1, 0, z_1) = M_\infty{}^2 p_{21}(t_2, x_2, z_2)$$

Только первые два условия здесь являются независимыми, остальные в точности совпадают со вторым, третьим и пятым уравнениями системы (1.5), которые следует записать на плоскости $y_1 = 0$.

Кроме того, для возмущений давления, поперечной и боковой составляющих вектора скорости во втором приближении справедливы соотношения

$$p_{12}(t_1, x_1, 0, z_1) = p_{22}(t_2, x_2, 0, z_2) - \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_2{}^2}\int\limits_0^\infty \frac{M_\infty^2 - M_0{}^2(\eta)}{M_\infty^2}\,d\eta \tag{4.4}$$

$$v_{12}(t_1, x_1, 0, z_1) = -\frac{\partial A_1}{\partial t_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_2}$$

$$w_{12}(t_1, x_1, 0, z_1) = -\frac{\partial}{\partial z_2}\int\limits_{-\infty}^{x_2} p_{22}(t_2, \xi, 0, z_2)\,d\xi +$$

$$+\frac{\partial^2 A_1}{\partial x_2 \partial z_2}\int\limits_0^\infty \frac{M_\infty^2 - M_0{}^2(\eta)}{M_\infty^2}\,d\eta + \frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial z_2}\int\limits_{-\infty}^{x_2}\int\limits_{-\infty}^{\zeta} p_{21}(t_2, \xi, z_2)\,d\xi\,d\zeta$$

из которых снова только первые два независимы. Последнее условие (4.4) легко преобразовать к виду

$$w_{12}(t_1, x_1, 0, z_1) = -\frac{\partial}{\partial z_1}\int\limits_{-\infty}^{x_1} p_{12}(t_1, \xi, 0, z_1)\,d\xi -$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial z_1}\int\limits_{-\infty}^{x_1}\int\limits_{-\infty}^{\zeta} p_{11}(t_1, \xi, 0, z_1)\,d\xi\,d\zeta$$

вытекающему из пятого уравнения (1.8), рассматриваемого на плоскости $y_1 = 0$. Что касается возмущений плотности и продольной составляющей вектора скорости, то во втором приближении граничные условия для них при $y_1 = 0$ нельзя вывести при помощи асимптотических выражений (4.1). Для этой цели требуется знать члены третьего приближения в решении для области 2, не рассматриваемые в данном анализе.

Для плоскопараллельных движений газа в плоскости $y_1 = 0$ имеют место связи (1.6) или (1.7) в зависимости от того, превышает ли число Маха на бесконечности единицу или остается меньше нее. Принимая во внимание названные связи, приходим сразу к заключению, что граничные условия при $y_1 = 0$ для главных членов решения в области 1 могут быть записаны через функцию $A_1(t_2, x_2) = A_1(t_1, x_1)$, если $\partial/\partial z_1 = \partial/\partial z_2 = 0$. В этом случае в граничные условия для членов второго приближения войдет также функция $A_2(t_2, x_2) = A_2(t_1, x_1)$. Если же поле скоростей в пограничном слое обладает пространственной структурой, то в соотношении

$$v_{11}(t_1, x_1, 0, z_1) = -\int\limits_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial p_{11}(t_1, \xi, 0, z_1)}{\partial y_1}\,d\xi$$

нельзя избавиться от нормальной производной, от избыточного давления, заменив ее на саму эту функцию.

Произведем теперь сращивание разложений, которые представляют асимптотический вид решений в областях 2 и 3. Обращаясь к формулам (2.5) и выражениям (4.2), получим предельные условия, которым должны удовлетворять параметры газа в тонком пристеночном слое. Если $y_2 \to 0$, то внутренняя переменная $y_3 \to \infty$, а искомые величины

(4.5) $$p_{31}(t_3, x_3, z_3) \to p_{21}(t_2, x_2, z_2), \ \rho_{31} \to R_0^\circ$$

$$u_{31} - y_3 \frac{dU_0^\circ}{dy_2} \to \frac{dU_0^\circ}{dy_2} A_1 + \left[y_3 R_0^\circ \frac{dU_0^\circ}{dy_2}\right]^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \int\limits_{-\infty}^{x_2} \int\limits_{-\infty}^{\zeta} p_{21}\, d\xi\, d\zeta$$

$$w_{31} \to -\left[y_3 R_0^\circ \frac{dU_0^\circ}{dy_2}\right]^{-1} \frac{\partial}{\partial z_2} \int\limits_{-\infty}^{x_2} p_{21}\, d\xi +$$

$$+ \left[y_3^2 R_0^\circ \frac{dU_0^\circ}{dy_2}\right]^{-1} \int\limits_{-\infty}^{x_2} \left\{A_1(t_2, \zeta, z_2) \frac{\partial p_{21}}{\partial z_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial z_2} \int\limits_{-\infty}^{\zeta} p_{21}\, d\xi + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{dU_0^\circ}{dy_2}\right]^{-1} \frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial z_2} \int\limits_{-\infty}^{\zeta} p_{21}\, d\xi \right\} d\zeta$$

Аргументами функции p_{21}, стоящей под знаками интеграла, служат t_2, ξ, z_2.

Предельное условие для составляющей вектора скорости по нормали к обтекаемой поверхности обычно опускается. В рассматриваемом случае оно может быть записано как

$$v_{31} + y_3 \frac{dU_0^\circ}{dy_2} \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \to -\frac{\partial A_1}{\partial t_2} - A_1 \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \frac{dU_0^\circ}{dy_2} -$$

$$- \left[R_0^\circ \frac{dU_0^\circ}{dy_2}\right]^{-1} \left[\frac{\partial p_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \int\limits_{-\infty}^{x_2} p_{21}(t_2, \xi, z_2)\, d\xi\right]$$

и выполняется автоматически, если удовлетворены условия (4.5) для возмущений давления, плотности и составляющих вектора скорости, лежащих в касательной плоскости к поверхности тела. Действительно, подставляя асимптотики всех функций первого приближения, определяющих структуру вязкого пристеночного слоя, в уравнения (3.5), убеждаемся в справедливости сделанного утверждения, поскольку в результате получается система тождеств.

Предельные условия для функций второго приближения гласят:

(4.6) $$p_{32}(t_3, x_3, z_3) \to p_{22}(t_2, x_2, 0, z_2), \ \rho_{32} \to 0$$

$$u_{32} \to \frac{dU_0^0}{dy_2} \left\{A_2 + M_\infty^2 \left[p_{21} + \frac{\partial}{\partial z_2^2} \int\limits_{-\infty}^{x_2} \int\limits_{-\infty}^{\zeta} p_{21}(t_2, \xi, z_2)\, d\xi\, d\zeta\right] \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_0^\infty \left[\frac{1}{M_0^2(\eta)} - \left[\eta \frac{dM_0(0)}{dy_2}\right]^{-2} - \frac{1}{M_\infty^2}\right] d\eta \right\}$$

$$w_{32} \to -\left[y_2 R_0^\circ \frac{dU_0^\circ}{dy_2}\right]^{-1} \frac{\partial}{\partial z_2} \int\limits_{-\infty}^{x_2} p_{22}(t_2, \xi, 0, z_2)\, d\xi$$

Внося во второе равенство (4.2) для v_{22} дополнительный член, пропорциональный y_2, имеем предельное условие

$$v_{32} \to -y_3 \frac{dU_0^\circ}{dy_2} \left\{ \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + M_\infty^2 \left[\frac{\partial p_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \int_{-\infty}^{x_2} p_{21}(t_2, \xi, z_2)\, d\xi \right] \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^\infty \left[\frac{1}{M_0^2(\eta)} - \left[\eta \frac{dM_0^\circ}{dy_2} \right]^{-2} - \frac{1}{M_\infty^2} \right] d\eta \right\}$$

для поперечной составляющей вектора скорости. Как и в первом приближении, оно выполняется автоматически, если полагаются удовлетворенными условия для возмущений давления, плотности и составляющих вектора скорости в касательной к обтекаемой поверхности плоскости. В этом легко убедиться, подставив асимптотические значения величин p_{32}, ρ_{32}, u_{32}, v_{32} и w_{32} вместе с аналогичными значениями функций p_{31}, ρ_{31}, u_{31}, v_{31} и w_{31} в линейные уравнения (3.6), поскольку каждое из них обращается в тождество.

Таким образом, граничное условие для нормального к пластинке компонента вектора скорости при интегрировании систем уравнений для вязкого пристеночного слоя можно отбросить. С чисто формальной точки зрения ситуация выглядит точно так же, как в классической теории Прандтля. Однако причины, служащие основанием опустить названное граничное условие в обоих случаях, прямо противоположны: при учете самоиндуцированного давления оно вытекает из остальных предельных соотношений, которые ставятся при $y_3 \to \infty$, а в обычной теории пограничного слоя является лишним, делая неразрешимой соответствующую краевую задачу.

Отметим, что в процессе сращивания решений для областей 2 и 3 член с ρ_{22} в разложении для плотности вообще не принимался во внимание. Это естественно, так как при $y_2 \to 0$ обусловленный им вклад пропорционален ε^2, в то время как во всем тонком пристеночном слое плотность газа достаточно задать с точностью до слагаемых порядка ε. Что касается члена с w_{22} из разложения для боковой составляющей вектора скорости, то при сращивании с решением в области 3 использовались его сингулярные части, пропорциональные y_2^{-2} и y_2^{-1}, не учитывался лишь регулярный остаток, дающий вклад порядка ε^3.

5. Краевые задачи. Будем считать далее, что удельная теплоемкость при постоянном давлении постоянна, а коэффициенты вязкости и теплопроводности подчиняются линейным законам Чепмена

$$\lambda^{(g)}/\lambda_\infty^{(g)} = cT/T_\infty, \quad k/k_\infty = cT/T_\infty, \quad c = \text{const}$$

Пусть, кроме того, число Прандтля равно единице. Тогда отношение T_w/T_∞ температуры стенки к температуре набегающего потока следует соотношению Крокко [12]

$$T_w/T_\infty = 1 + (\varkappa - 1)\, M_\infty^2/2$$

Как уже отмечалось выше, для теплоизолированной пластинки производная $dR_0^\circ/dy_2 = 0$. Отсюда заключаем, что не только в первом, но и во втором приближениях $\rho/\rho_\infty \to R_0^\circ$ при $x \to -\infty$. Аналогичный результат $\rho/\rho_\infty \to R_0^\circ$ при $y_3 \to +\infty$ содержится во вторых формулах (4.5) и (4.6), полученных при помощи сращивания решений для областей 2 и 3. Положим поэтому в качестве решения

$$\rho_{31}(t_3, x_3, y_3, z_3) = R_0^\circ, \quad \rho_{32}(t_3, x_3, y_3, z_3) = 0$$

$$p_{31}(t_3, x_3, z_3) = p_{21}(t_2, x_2, z_2), \quad p_{32}(t_3, x_3, z_3) = p_{22}(t_2, x_2, 0, z_2)$$

В рассматриваемом случае последние из уравнений, входящие в системы (3.5) и (3.6), обращаются в тождества. Далее для функций первого приближения в области 3 имеем

(5.1)
$$\frac{\partial u_{31}}{\partial x_3} + \frac{\partial v_{31}}{\partial y_3} + \frac{\partial w_{31}}{\partial z_3} = 0, \quad \frac{\partial p_{31}}{\partial y_3} = 0$$

$$R_0^\circ\left(\frac{\partial u_{31}}{\partial t_3} + u_{31}\frac{\partial u_{31}}{\partial x_3} + v_{31}\frac{\partial u_{31}}{\partial y_3} + w_{31}\frac{\partial u_{31}}{\partial z_3}\right) = -\frac{\partial p_{31}}{\partial x_3} + \frac{c}{R_0^\circ}\frac{\partial^2 u_{31}}{\partial y_3^2}$$

$$R_0^\circ\left(\frac{\partial w_{31}}{\partial t_3} + u_{31}\frac{\partial w_{31}}{\partial x_3} + v_{31}\frac{\partial w_{31}}{\partial y_3} + w_{31}\frac{\partial w_{31}}{\partial z_3}\right) = -\frac{\partial p_{31}}{\partial z_3} + \frac{c}{R_0^\circ}\frac{\partial^2 w_{31}}{\partial y_3^2}$$

а функции второго приближения определяются из системы

(5.2)
$$\frac{\partial u_{32}}{\partial x_3} + \frac{\partial v_{32}}{\partial y_3} + \frac{\partial w_{32}}{\partial z_3} = 0, \quad \frac{\partial p_{32}}{\partial y_3} = 0$$

$$R_0^\circ\left(\frac{\partial u_{32}}{\partial t_3} + u_{31}\frac{\partial u_{32}}{\partial x_3} + u_{32}\frac{\partial u_{31}}{\partial x_3} + v_{31}\frac{\partial u_{32}}{\partial y_3} + v_{32}\frac{\partial u_{31}}{\partial y_3} + \right.$$
$$\left. + w_{31}\frac{\partial u_{32}}{\partial z_3} + w_{32}\frac{\partial u_{31}}{\partial z_3}\right) = -\frac{\partial p_{32}}{\partial x_3} + \frac{c}{R_0^\circ}\frac{\partial^2 u_{32}}{\partial y_3^2}$$

$$R_0^\circ\left(\frac{\partial w_{32}}{\partial t_3} + u_{31}\frac{\partial w_{32}}{\partial x_3} + u_{32}\frac{\partial w_{31}}{\partial x_3} + v_{31}\frac{\partial w_{32}}{\partial y_3} + v_{32}\frac{\partial w_{31}}{\partial y_3} + \right.$$
$$\left. + w_{31}\frac{\partial w_{32}}{\partial z_3} + w_{32}\frac{\partial w_{31}}{\partial z_3}\right) = -\frac{\partial p_{32}}{\partial z_3} + \frac{c}{R_0^\circ}\frac{\partial^2 w_{32}}{\partial y_3^2}$$

Система (5.1) образована из обычных уравнений Прандтля для нестационарного трехмерного пограничного слоя в несжимаемой жидкости. Что касается системы (5.2), то она состоит из линеаризованных уравнений Прандтля, описывающих нестационарные пространственные несжимаемые течения. В обеих этих системах возмущения p_{31} и p_{32} давления подлежат определению, а не вычисляются из решения внешней задачи обтекания, отсюда для пластинки $p_{31} \neq 0$ и $p_{32} \neq 0$.

Совершим теперь преобразование подобия

(5.3)
$$|M_\infty^2 - 1| = \delta, \quad T_w / T_\infty = T_0$$

$$t_1 = t_2 = t_3 = c^{1/4}\lambda^{-3/2}\delta^{-1/4}T_0 t''$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = c^{3/8}\lambda^{-5/4}\delta^{-3/8}T_0^{3/2}x''$$

$$y_1 = c^{3/8}\lambda^{-5/4}\delta^{-7/8}T_0^{3/2}y', \quad y_3 = c^{5/8}\lambda^{-3/4}\delta^{-1/8}T_0^{3/2}y''$$

$$z_1 = z_2 = z_3 = c^{3/8}\lambda^{-5/4}\delta^{-3/8}T_0^{3/2}z''$$

$$u_{31} + \varepsilon u_{32} = c^{1/8}\lambda^{1/4}\delta^{-1/8}T_0^{1/2}(u_{31}'' + \varepsilon u_{32}'')$$

$$v_{11} + \varepsilon v_{12} = c^{1/4}\lambda^{1/2}\delta^{-1/4}(v_{11}' + \varepsilon v_{12}'), \quad v_{31} + \varepsilon v_{32} =$$
$$= c^{3/8}\lambda^{3/4}\delta^{1/8}T_0^{1/2}(v_{31}'' + \varepsilon v_{32}'')$$

$$w_{31} + \varepsilon w_{32} = c^{1/8}\lambda^{1/4}\delta^{-1/8}T_0^{1/2}(w_{31}'' + \varepsilon w_{32}''), \quad p_{11} + \varepsilon p_{12} =$$
$$= c^{1/4}\lambda^{1/2}\delta^{-1/4}(p_{11}' + \varepsilon p_{12}')$$

$$p_{21} + \varepsilon p_{22} = c^{1/4}\lambda^{1/2}\delta^{-1/4}(p_{21}^{(m)} + \varepsilon p_{22}^{(m)}), \quad p_{31} + \varepsilon p_{32} =$$
$$= c^{1/4}\lambda^{1/2}\delta^{-1/4}(p_{31}'' + \varepsilon p_{32}'')$$

$$A_1 + \varepsilon A_2 = c^{5/8}\lambda^{-3/4}\delta^{-1/8}T_0^{3/2}(A_1'' + \varepsilon A_2'')$$

где постоянная $\lambda = 0{,}3321$ определяется при помощи равенства $dU_0^\circ/dy_2 = \lambda c^{-1/2}T_0^{-1}$ и вычисляется по решению Блазиуса для невозмущенного пограничного слоя. Это преобразование позволяет исключить при формулировке задачи зависимость главных членов последовательностей от постоянных c и $R_0^\circ = T_0^{-1}$, а разность $M_\infty^2 - 1$ войдет лишь в соотношения для внешней области потока.

Сформулируем сначала краевую задачу для функций первого приближения. В новых переменных, в которых для простоты записи опущены двойные штрихи, первое и четвертое уравнения из системы (1.5) приобретают канонический вид

$$\mp\frac{\partial^2 p_{11}'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_{11}'}{\partial y'^2} + |M_\infty^2 - 1|^{-1}\frac{\partial^2 p_{11}'}{\partial z^2} = 0 \tag{5.4}$$

$$v_{11}' = -|M_\infty^2 - 1|^{1/2}\frac{\partial}{\partial y'}\int\limits_{-\infty}^{x} p_{11}'(t, \xi, y', z)\,d\xi$$

где верхний знак у производной $\partial^2 p_{11}'/\partial x^2$ следует брать, если набегающий поток сверхзвуковой, а нижний знак соответствует дозвуковому на бесконечности потоку.

Граничные условия при $y' = 0$ получаются из двух первых равенств (4.3)

$$p_{11}' = p_{21}^{(m)}(t, x, z), \quad v_{11}' = -|M_\infty^2 - 1|^{1/2}\frac{\partial A_1}{\partial x} \tag{5.5}$$

которые являются независимыми. Как отмечалось выше, остальные соотношения (4.3) вытекают из соответствующих уравнений системы (1.5), рассматриваемых на плоскости $y' = 0$. Поэтому при формулировке краевой задачи все дополнительные уравнения и граничные условия при $y' = 0$ можно опустить.

Остальные граничные условия ставятся в качестве предельных. Именно, при $x \to -\infty$ и $y' \to +\infty$ имеем

$$p_{11}' \to 0, \quad v_{11}' \to 0 \tag{5.6}$$

Подставляя соотношения (5.3) в систему (5.1) и опуская затем двойные штрихи у вновь введенных переменных, приходим к уравнениям в канонической форме

$$\frac{\partial u_{31}}{\partial x} + \frac{\partial v_{31}}{\partial y} + \frac{\partial w_{31}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial p_{31}}{\partial y} = 0 \tag{5.7}$$

$$\frac{\partial u_{31}}{\partial t} + u_{31}\frac{\partial u_{31}}{\partial x} + v_{31}\frac{\partial u_{31}}{\partial y} + w_{31}\frac{\partial u_{31}}{\partial z} = -\frac{\partial p_{31}}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_{31}}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial w_{31}}{\partial t} + u_{31}\frac{\partial w_{31}}{\partial x} + v_{31}\frac{\partial w_{31}}{\partial y} + w_{31}\frac{\partial w_{31}}{\partial z} = -\frac{\partial p_{31}}{\partial z} + \frac{\partial^2 w_{31}}{\partial y^2}$$

Граничные условия для них при $y = 0$ очевидны

$$u_{31} = 0, \quad v_{31} = 0, \quad w_{31} = 0 \tag{5.8}$$

Остальные граничные условия здесь ставятся так же как предельные. При $x \to -\infty$

$$u_{31} \to y, \quad w_{31} \to 0, \quad p_{31} \to 0 \tag{5.9}$$

Кроме того, на основании формул (4.5) заключаем, что при $y \to \infty$

(5.10) $$p_{31} \to p_{21}^{(m)}(t, x, z), \quad u_{31} - y \to A_1(t, x, z) + \frac{1}{y} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\zeta} p_{21}^{(m)}(t, \xi, z)\, d\xi\, d\zeta$$
$$w_{31} \to -\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{x} p_{21}^{(m)}(t, \xi, z)\, d\xi + \frac{1}{y^2} \int_{-\infty}^{x} \Big[A_1(t, \zeta, z) \frac{\partial p_{21}^{(m)}}{\partial z} +$$
$$+ \frac{\partial A_1}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{\zeta} p_{21}^{(m)}(t, \xi, z)\, d\xi + \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} \int_{-\infty}^{x} p_{21}^{(m)}(t, \xi, z)\, d\xi \Big] d\zeta$$

Обе системы уравнений (5.4) и (5.7) необходимо интегрировать совместно. Связь их решений осуществляется посредством произвольных функций $p_{21}^{(m)}(t, x, z)$ и $A_1(t, x, z)$, которые входят в граничные условия (5.5) и (5.10) и подлежат определению.

Выше уже обращалось внимание на тот факт, что формулировка граничных условий для внешней области трехмерного потока в терминах одной только функции $A_1(t, x, z)$ невозможна. Отсутствие простых выражений для параметров газа в области 1 влечет как неизбежное следствие невозможность разделить в общем случае задачи для внешнего течения газа и вязкого пристеночного слоя. Введение времени в теорию [1–6] стационарного свободного взаимодействия плоскопараллельного пограничного слоя не привело к радикальному усложнению краевых задач благодаря тому, что уравнения, описывающие течение в областях 1 и 2, в первом приближении не содержат производных по t. Наоборот, как показывают приведенные выше рассуждения, при учете третьей пространственной переменной краевые задачи на свободное взаимодействие значительно усложняются. Что касается требований о затухании возмущений вверх по течению и отсутствии каких-либо возбуждающих факторов, то их выполнение обеспечивается условиями (5.6) и (5.9).

Преобразования (5.3) фактически выражают закон подобия для главных членов параметров газа в нестационарном трехмерном пограничном слое, поскольку ни системы уравнений (5.4) и (5.7), ни краевые условия (5.5), (5.6) и (5.8) — (5.10) не содержат величин Re, $\varkappa$, c, λ, T_0. Таким образом, одинаковые режимы течений могут иметь место при различных значениях перечисленных постоянных, характер потока определяется начальными данными задачи. Однако зависимость безразмерных характеристик трехмерного пограничного слоя от числа M_∞ исключить не удается. Это обстоятельство находится в полном согласии с правилом Прандтля — Глауэрта, устанавливающим сжатие масштаба длины в боковом направлении для внешнего потока, если для его изучения используется линейное приближение [13]. Аналогичное сжатие масштаба измерений для пристеночной области производится иным образом. Законы подобия для плоскопараллельного движения газа с $w = \partial/\partial z = 0$ включают в свою формулировку также число Маха на бесконечности [3, 6, 11]. Действительно, множитель $|M_\infty^2 - 1|^{1/2}$ оказывается общим в выражении, которое получается в результате подстановки в левую часть рассматриваемого в плоскости $y' = 0$ второго из уравнений (5.4) вместо функции V_{11}' ее значения, даваемого второй формулой (5.5), поэтому этот множитель можно сократить.

Обратимся к функциям второго приближения. Опуская снова двойные штрихи над преобразованными по формулам (5.3) переменными, запишем первое и четвертое уравнения из системы (1.8) как

(5.11) $$\mp \frac{\partial^2 p_{12}'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_{12}'}{\partial y'^2} + \delta^{-1} \frac{\partial^2 p_{12}'}{\partial z^2} = 2c^{1/8}\lambda^{1/4} M_\infty^2 \delta^{-9/8} T_0^{1/2} \frac{\partial^2 p_{12}'}{\partial t \partial x}$$

$$v_{12}' = -\delta^{1/2}\frac{\partial}{\partial y'}\int\limits_{-\infty}^{x} p_{12}'(t,\xi,y',z)\,d\xi +$$
$$+ c^{1/8}\lambda^{1/4}\delta^{3/8}T_0^{1/2}\frac{\partial^2}{\partial t\partial y'}\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{\zeta} p_{12}'(t,\xi,y',z)\,d\xi\,d\zeta$$

Верхний знак в первом из уравнений (5.11) берется для сверхзвукового набегающего потока, нижний знак соответствует дозвуковому потоку.

Граничные условия при $y' = 0$ получаются из первых двух равенств (4.4). Прежде чем написать их, полезно вычислить интегралы, фигурирующие в асимптотических формулах (4.1) и (4.2). Согласно решению Блазиуса, для пограничного слоя на теплоизолированной пластинке справедливы равенства [12]

$$\int\limits_0^\infty \frac{M_\infty^2 - M_0^2(\eta)}{M_\infty^2}\,d\eta = (2c)^{1/2}T_0\Delta_1,\quad \Delta_1 = 1.686 \tag{5.12}$$
$$\int\limits_0^\infty\left\{\frac{1}{M_0^2(\eta)} - \left[\eta\frac{dM_0^\circ}{dy_2}\right]^{-2} - \frac{1}{M_\infty^2}\right\}d\eta = \overline{\int\limits_0^\infty}\left[\frac{1}{R_0(\eta)U_0^2(\eta)} - 1\right]d\eta =$$
$$= (2c)^{1/2}[T_0^2\Delta_2 - T_0(T_0 - 1)\Delta_1],\quad \Delta_2 = -3.663$$

где уголком над несобственным расходящимся интегралом обозначена его конечная часть в смысле Адамара [14]. Имеем

$$p_{12}' = p_{22}^{(m)}(t,x,0,z) - 2^{1/2}\Delta_1 c^{1/8}\lambda^{5/4}\delta^{7/8}T_0^{-1/2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial x_2} \tag{5.13}$$
$$v_{12}' = -\delta^{1/2}\frac{\partial A_2}{\partial x} - c^{1/8}\lambda^{1/4}\delta^{3/8}T_0^{1/2}\frac{\partial A_1}{\partial t}$$

Остальные граничные условия (4.4) опускаются, так как они следуют из соответствующих уравнений системы (1.8), если в ней положить $y' = 0$.

Предельные условия при $x \to -\infty$ и $y' \to +\infty$ гласят:

$$p_{12}' \to 0,\quad v_{12}' \to 0 \tag{5.14}$$

Система (5.2) для вязкого течения в пристеночной области состоит из линеаризованных уравнений Прандтля. Отсюда ясно, что в преобразованных переменных с опущенными двойными штрихами она примет канонический вид

$$\frac{\partial u_{32}}{\partial x} + \frac{\partial v_{32}}{\partial y} + \frac{\partial w_{32}}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial p_{32}}{\partial y} = 0 \tag{5.15}$$
$$\frac{\partial u_{32}}{\partial t} + u_{31}\frac{\partial u_{32}}{\partial x} + u_{32}\frac{\partial u_{31}}{\partial x} + v_{31}\frac{\partial u_{32}}{\partial y} + v_{32}\frac{\partial u_{31}}{\partial y} +$$
$$+ w_{31}\frac{\partial u_{32}}{\partial z} + w_{32}\frac{\partial u_{31}}{\partial z} = -\frac{\partial p_{32}}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_{32}}{\partial y^2}$$
$$\frac{\partial w_{32}}{\partial t} + u_{31}\frac{\partial w_{32}}{\partial x} + u_{32}\frac{\partial w_{31}}{\partial x} + v_{31}\frac{\partial w_{32}}{\partial y} + v_{32}\frac{\partial w_{31}}{\partial y} +$$
$$+ w_{31}\frac{\partial w_{32}}{\partial z} + w_{32}\frac{\partial w_{31}}{\partial z} = -\frac{\partial p_{32}}{\partial z} + \frac{\partial^2 w_{32}}{\partial y^2}$$

свободный от каких-либо параметров. В граничные условия обтекания $u_{32} = 0$, $v_{32} = 0$, $w_{32} = 0$ при $y = 0$ и предельные условия $u_{32} \to 0$,

$w_{32} \to 0$, $p_{32} \to 0$ при $x \to -\infty$ никакие параметры также не входят. Иначе дело обстоит с предельными условиями при $y \to \infty$. Учитывая требования о сращивании (4.6), выводим

$$p_{32} \to p_{22}^{(m)}(t, x, 0, z) \tag{5.16}$$

$$u_{32} \to A_2(t, x, z) + 2^{1/2} c^{1/8} \lambda^{5/4} \delta^{-1/8} T_0^{1/2} [\Delta_2 - (1 - T_0^{-1}) \Delta_1] \times$$

$$\times \left[p_{21}^{(m)}(t, x, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{\xi} p_{21}^{(m)}(t, \xi, z)\, d\xi\, d\zeta \right]$$

$$w_{32} \to -\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial z} \int\limits_{-\infty}^{x} p_{22}(t, \xi, 0, z)\, d\xi$$

где коэффициент Δ_2 задается второй из формул (5.12). Системы уравнений (5.11) и (5.15) должны интегрироваться совместно. Их решения связаны через произвольные функции $p_{22}^{(m)}(t, x, 0, z)$ и $A_2(t, x, z)$, которые содержатся в граничных условиях (5.13) и (5.16). К предельным условиям (5.14) необходимо присоединить условия затухания параметров газа в пристеночной области на бесконечности вверх по потоку и условия на пластинке при $y = 0$. Поправочные члены исходных разложений существенно зависят от постоянных M_∞, c, λ и T_0, если даже они относятся к плоскопараллельному пограничному слою.

В заключение сделаем два замечания. Во-первых, в развитой теории свободного взаимодействия нестационарного трехмерного пограничного слоя с внешним потоком характерные размеры во всех направлениях, лежащих на обтекаемой поверхности, сравнимы по величине. Отсюда следует, что срывные зоны локализуются как в продольном, так и в боковом направлениях на расстояниях порядка $\varepsilon^3 L$. При обтекании шероховатой поверхности на дне пограничного слоя могут возникать срывные пузырьки, имеющие указанные масштабы. В этом случае общая картина потока будет подобна той, которая возникает на дне сосуда при закипании налитой в него воды, хотя величина пузырьков, разумеется, иная. При глобальном срыве, захватывающем область порядка характерных размеров обтекаемого тела, линия отрыва способна существенно изменять свою форму на расстояниях порядка $\varepsilon^3 L$.

Второе замечание относится к виду обтекаемой поверхности, под которой выше понималась, строго говоря, просто плоская пластинка. На самом деле, выбор поверхности тела допустим любой, лишь бы характерные линейные размеры сохранялись по порядку равными L. Все рассуждения остаются при этом в силе, за исключением того, что функции $R_0(y)$, $U_0(y)$ и $M_0(y)$ необходимо задавать не по автомодельному решению Блазиуса, а по данным, находимым предварительным интегрированием уравнений Прандтля с соответствующим образом поставленными граничными условиями. Интегрирование уравнений пограничного слоя дает исходный поток на участках порядка $\varepsilon^3 L$, где разыгрывается процесс свободного взаимодействия. По этой причине выше иногда вместо пластинки упоминалась касательная к обтекаемой поверхности плоскость.

Поступила 5 XI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нейланд В. Я.* К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.
2. *Нейланд В. Я.* К асимптотической теории расчета тепловых потоков около угловой точки тела. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.
3. *Нейланд В. Я.* Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений. Тр. ЦАГИ, 1974, вып. 1529.
4. *Stewartson K.* On the flow near the trailing edge of a flat plate. II. Mathematika, 1969, vol. 16, No. 31.

5. *Stewartson K., Williams P. G.* Self-induced separation. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1969, vol. 312, No. 1509.
6. *Stewartson K.* Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies. In: Advances in Applied Mech., vol. 14. New York — San Francisco —London, Acad. press, 1974.
7. *Schneider W.* Upstream propagation of unsteady disturbances in supersonic boundary layers. J. Fluid Mech., 1974, vol. 63, pt. 3.
8. *Brown S. N., Daniels P. G.* On the viscous flow about the trailling edge of a rapidly oscillating plate. J. Fluid Mech., 1975, vol. 67, pt. 4.
9. *Daniels P. G.* The flow about the trailing edge of a supersonic oscillating aerofoil. J. Fluid Mech., 1975, vol. 72, pt. 3.
10. *Рыжов О. С.* Уравнения нестационарного пограничного слоя с самоиндуцированным давлением. Докл. АН СССР, 1977, т. 234, № 4.
11. *Рыжов О. С., Терентьев Е. Д.* О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением. ПММ, 1977, т. 41, вып. 6.
12. *Stewartson K.* The theory of laminar boundary layers in compressible fluids. Oxford, Clarendon Press, 1964.
13. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
14. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М., «Наука», 1978.