Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 6, 1980

УДК 532.516:536.25

О КОНВЕКЦИИ В ЖИДКОСТИ, ЗАПОЛНЯЮЩЕЙ ПОЛОСТЬ ПОДВИЖНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

А. Г. Зарубин, Нго Зуй Кан

(Хабаровск, Воронеж)

В линейной постановке рассматривается задача о совместном движении вокруг неподвижной точки O твердого тела и неравномерно нагретой вязкой несжимаемой жидкости, целиком заполняющей ограниченную полость тела. Предполагается, что в состоянии механического равновесия центр масс системы тело плюс жидкость совпадает с точкой O. Доказывается теорема о разрешимости задачи Коши для малых нестационарных возмущений равновесия. Изучаются нормальные возмущения и спектр задачи, возникающей при рассмотрении нормальных возмущений. Показано, что весь спектр состоит из нормальных собственных чисел и расположен в некоторой полуполосе, содержащей вещественную полуось. Доказано, что соответствующая система корневых векторов полна. Исследуется характер спектра в зависимости от числа Релея.

При подогреве жидкости снизу и сверху оценены числа Релея, при которых вещественная часть собственных чисел положительна, т. е. возникающие осциллирующие нормальные возмущения затухают с изменением времени.

1. Постановка задачи. Пусть твердое тело с полостью, целиком заполненной неравномерно нагретой вязкой несжимаемой жидкостью, движется вокруг неподвижной точки O. Пусть система тело плюс жидкость подогревается так, чтобы установилось механическое равновесие и центр масс системы совпадал с неподвижной точкой O.

Введем неподвижную прямоугольную систему координат $Oy_1y_2y_3$ (ось y_3 направим вверх) и подвижную, жестко связанную с телом прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$.

В системе координат $Ox_1x_2x_3$ уравнения тепловой конвекции, описывающие движения жидкости в приближении Буссинеска, имеют

$$\begin{gathered}\mathbf{u}' + (\mathbf{u}, \nabla)\ \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = \\ = -\rho_0^{-1}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} + g\beta\mathbf{k}_3T,\ T' + (\mathbf{u}, \nabla T) = \chi\Delta T,\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \\ (x \in \Omega)\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор относительной скорости жидкости, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — угловая скорость и угловое ускорение тела, T — температура, отсчитываемая от среднего постоянного значения T_1, давление p есть отклонение от гидростатического давления p_1, соответствующего постоянной температуре T_1, $\rho = \rho_0(1 - \beta T)$ — плотность жидкости, ν, β, χ — коэффициенты кинематической вязкости, теплового расширения и теплопроводности соответственно, $\mathbf{k}_3$ — единичный вектор оси Oy_3, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор относительно точки O, Ω — ограниченная область, заполненная жидкостью.

Выясним условия, при которых возможно механическое равновесие, т. е. тело с жидкостью неподвижно. Положим в уравнениях (1.1) относительную и угловую скорости равными нулю и будем искать стационарные распределения температуры и давления в состоянии механического равновесия. Если обозначить через T_0 и p_0 равновесные распределения температуры и давления, тогда из (1.1) получаем

$$-\rho_0^{-1}\nabla p_0 + g\beta\,\mathbf{k}_3 T = 0, \qquad \nabla T_0 = 0$$

Как показано в [1], температура T_0 меняется с высотой линейно

$$T_0 = -ay_3 + 8 \tag{1.2}$$

где a, b — постоянные величины.

Систему (1.1) линеаризуем около положения равновесия

$$\mathbf{u}_0 = 0, \quad \boldsymbol{\omega}_0 = 0, \quad T_0 = -ay_3 + b, \quad -\rho_0^{-1}\nabla p_0 + g\beta\mathbf{k}_3 T_0 = 0$$

тогда получаем

$$\mathbf{u}' + P(\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r}) = -\nabla p + \Delta\mathbf{u} + RT\mathbf{k}_3, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \tag{1.3}$$

$$T' \mp P^{-1}\Delta T + P^{-1}(\mathbf{k}_3, \mathbf{u}), \quad P = \frac{\nu}{\chi}, \quad R = \frac{g\beta aL^4}{\nu\chi}$$

Уравнения (1.3) записаны в безразмерной форме. Здесь P — число Прандтля, R — число Релея, L — характерный линейный размер области Ω.

Предполагается, что теплопроводность стенки сосуда гораздо больше теплопроводности жидкости, и поэтому можно считать, что на стенке полости поддерживается неизменное равновесное распределение температуры, а ее возмущение исчезает. Тогда на стенке сосуда выполнены условия

$$\mathbf{u} = 0, \quad T = 0 \text{ на } S \tag{1.4}$$

Через M_0, M_1 обозначим массы тела и жидкости, а через $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_1$ — радиус-векторы их центров инерции в невозмущенном состоянии относительно точки O. С точностью до членов второго порядка малости имеем

$$M_0\mathbf{r}_0 + M_1\mathbf{r}_1 = M_0\mathbf{r}_0 + \rho_0\int_\Omega \mathbf{r}(1 - \beta T_0 - \beta T)\,d\Omega = \tag{1.5}$$

$$= M_2\mathbf{r}_2 - \rho_0\beta\int_\Omega \mathbf{r}T\,d\Omega = -\rho_0\beta\int_\Omega \mathbf{r}T\,d\Omega$$

Здесь $M_2 = M_0 + M_1$ — масса всей системы, а $\mathbf{r}_2$ — радиус-вектор центра системы тело плюс жидкость в невозмущенном состоянии, который по предположению равен нулю.

В рассмотренном случае на систему тело плюс жидкость действует только момент силы тяжести. Он возникает в результате перемещения центра инерции системы в силу неравномерности нагрева жидкости при возмущенном движении. Тогда линеаризованное уравнение движения тела с нагретой жидкостью в безразмерной форме имеет, по аналогии с [2,3] и с учетом (1.5), следующий вид:

$$J\boldsymbol{\varepsilon} + PG\frac{d}{dt}\int_\Omega \mathbf{r}\times\mathbf{u}\,d\Omega + RP^{-1}G\Big(\mathbf{k}_3 \times \int_\Omega \mathbf{r}T\,d\Omega\Big) = 0, \quad G = \frac{\rho_0}{\rho_1} \tag{1.6}$$

где G — безразмерная величина, ρ_1 — средняя плотность системы тело плюс жидкость, J — ее безразмерный момент инерции в состоянии механического равновесия.

Исследуем задачу об определении движения тела с нагретой жидкостью (1.3), (1.4), (1.6) по начальным условиям

$$\mathbf{u}|_{t=0}=\mathbf{u}_0,\quad T|_{t=0}=T^\circ,\quad \omega|_{t=0}=\omega_0 \tag{1.7}$$

2. Теорема существования. Обозначим через $L_{2,0}(\Omega)$ замыкание в L_2-норме множества всех гладких соленоидальных вектор-функций $\mathbf{v}$ и удовлетворяющих условию $\mathbf{v}_n=0$ на S. Известно [4], что ортогональное дополнение $L_{2,0}(\Omega)$ в L_2 будет замыкание в L_2-норме градиентов всех гладких в Ω функций.

Введем пространство $W^1_{2,0}(\Omega)$, которое получается как пополнение множества бесконечных дифференцируемых финитных в Ω соленоидальных векторов в метрике, соответствующей скалярному произведению

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})=\int_\Omega \nabla\mathbf{u}\nabla\mathbf{v}\,d\Omega$$

Обозначим через $H_2(\Omega)$ гильбертово пространство, состоящее из всех функций, суммируемых с квадратом по области Ω, через $H_2{}^1(\Omega)$ — пространство С. Л. Соболева с нормой

$$\|T\|^2=\int_\Omega|\operatorname{grad}T|^2d\Omega+\int_S|T|^2dS$$

Пусть $H^1_{2,0}(\Omega)$ — подпространство $H_2{}^1(\Omega)$, состоящее из функций, аннулирующихся на S.

Пусть Π — ортогональный проектор из $L_2(\Omega)$ в $L_{2,0}(\Omega)$. В работах [5, 6] показано, что оператор $-\Pi\Delta$ в $W^1_{2,0}(\Omega)$ можно расширить до самосопряженного положительно-определенного оператора A. Известно [7], что оператор $-\Delta$ можно расширить по Фридрихсу до самосопряженного положительно-определенного оператора G.

Преобразуем систему уравнений (1.3), (1.6). Для этого из (1.6) найдем значение углового ускорения ε и подставим ε в первое уравнение системы (1.3). Затем на полученное уравнение воздействуем оператором Π. Тогда

$$(I+B)\,\mathbf{u}'=-A\mathbf{u}+R\,(S_1+B_1)\,T \tag{2.1}$$

$$T'=-P^{-1}GT+P^{-1}S_2\mathbf{u},\quad B\mathbf{v}=G\Pi\Big(\mathbf{r}\times J^{-1}\int_\Omega\mathbf{r}\times\mathbf{v}\,d\Omega\Big),$$

$$S_1T=\Pi\mathbf{k}_3T$$

$$B_1v=-G\Pi\,(r\times J^{-1}\,(k_3\times\int_\Omega rTd\Omega)),\quad S_2v=(k_3,v)$$

Систему (2.1) удобно рассматривать как одно обыкновенное дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве $L_{2,0}(\Omega)\times H_2(\Omega)$, а именно, имеем уравнение

$$Q\eta'(t)+M\eta(t)+N\eta(t)=0 \tag{2.2}$$

где операторы Q, M, N задаются матрицами

$$Q=\begin{Vmatrix} I+B & 0 \\ 0 & I \end{Vmatrix}, \quad M=\begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & P^{-1}C \end{Vmatrix}$$

$$N=\begin{Vmatrix} 0 & -R(S_1+B_1) \\ -P^{-1}S_2 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \eta(t)=\begin{Vmatrix} u \\ T \end{Vmatrix}$$

Присоединим к уравнению (2.2) начальное условие

(2.3) $$\eta(0)=\eta_0=\operatorname{col}(u_0,\ T^0)$$

Обозначим через $B_2=B_2([0,\ \bar{T}],\ L_{2,0}\times H_2)$ пространство всех сильно измеримых со значениями в $L_{2,0}\times H_2$ функций $\eta(t)=\operatorname{col}(u,\ T)$, для которых конечна норма

$$\|\eta(t)\|_{B_2}=\Bigl(\int_0^T(\|u\|_{L_2}^2+\|T\|_{H_2}^2)\,dt\Bigr)^{1/2}$$

Известно [3, 8], что оператор B самосопряжен и отрицателен в $L_{2,0}(\Omega)$ причем $\|B\|<1$. Видно, что

$$((I+B)\ u,\ u)\geqslant\|u\|^2-|(Bu,\ u)|\geqslant(1-\|B\|)\|u\|^2$$

Тогда оператор Q будет самосопряженным положительно-определенным оператором

(2.4) $$(Q\eta,\ \eta)\geqslant(1-\|B\|)\|\eta\|^2$$

Далее, оператор B ограничен в $L_{2,0}(\Omega)$, поэтому

(2.5) $$\|Q\eta\|\leqslant(1+\|B\|)\|\eta\|$$

В силу сказанного можно в пространстве $L_{2,0}\times H_2$ рассматривать операторы $Q^{1/2}$ и $Q^{-1/2}$. В уравнении (2.2) сделаем замену $\eta(t)=Q^{-1/2}\xi$, тогда задача (2.2), (2.3) преобразуется к виду

(2.6) $$\xi'+\Phi\xi+F\xi=0,\ \ \xi(0)=\xi_0=Q^{1/2}\eta_0$$
$$\Phi=Q^{-1/2}MQ^{-1/2},\ \ F=Q^{-1/2}NQ^{-1/2}$$

Под решением в B_2 задачи (2.6) будем понимать абсолютно непрерывную функцию $\xi(t)$, которая почти при всех t удовлетворяет уравнению и начальному условию (2.5), и такую, что $\xi'(t)$, $\Phi\xi+F\xi$ принадлежат B_2.

Теорема 1. Пусть ξ_0 принадлежит области определения оператора Φ, тогда задача (2.6) имеет единственное решение из B_2.

Доказательство. Пусть $\zeta(t)$ — произвольная функция из B_2. Тогда из (2.5) получаем

$$\|\zeta(t)\|\leqslant(1+\|B\|)\|Q^{-1}\zeta(t)\|$$

Положим здесь $\zeta=Q^{1/2}\mu$, тогда, учитывая (2.4), имеем

(2.7) $$\|Q^{-1/2}\mu\|(1+\|B\|)\geqslant\|Q^{1/2}\mu\|=(Q^{1/2}\mu,\ Q^{1/2}\mu)^{1/2}=$$
$$=(Q\mu,\ \mu)^{1/2}\geqslant(1-\|B\|)^{1/2}\|\mu\|$$

Оператор Φ, по построению, самосопряжен в $L_{2,0}\times H_2$. Покажем его положительную определенность, используя (2.7) и положительную определенность оператора M. Имеем

$$(\Phi\mu,\ \mu)=(MQ^{-1/2}\mu,\ Q^{-1/2}\mu)\geqslant\gamma\|Q^{-1/2}\mu\|^2\geqslant$$
$$\geqslant\gamma(1-\|B\|)(1+\|B\|)^{-2}\|\mu\|^2$$

Оператор F вполне подчинен [9] оператору Φ. Действительно, оператор F представим в виде $F = Q^{-1/2}NM^{-1}Q^{1/2}\Phi$, где оператор $Q^{-1/2}NM^{-1}Q^{1/2}$ вполне непрерывен в $L_{2,0}(\Omega) \times H_2(\Omega)$ как произведение вполне непрерывного оператора M^{-1} и ограниченных операторов.

Из результатов [9] следует, что полугруппа, порожденная оператором $\Phi + F$, аналитическая. Тогда из работы [10] вытекает доказательство теоремы.

Пусть $\xi(t)$ — решение задачи (2.6), тогда функцию $\eta(t) = Q^{-1/2}\xi(t)$ назовем обобщенным решением задачи (1.3), (1.4), (1.6), (1.7).

3. Нормальные возмущения. Рассмотрим нормальные возмущения неравномерно нагретой жидкости при совместном движении системы тело плюс жидкость, т. е. будем изучать частные решения задачи, зависящие от времени по экспоненциальному закону

$$(u, p, T) = \exp(-\lambda t)(u_1, p_1, T_1)$$

Здесь u_1, p_1, T_1 — функции только координат. Для этих функций получаем из (2.1) систему уравнений

$$-\lambda(I + B)u_1 = -Au_1 + R(S_1 + B_1)T_1 \tag{3.1}$$
$$-\lambda T_1 = -P^{-1}CT_1 + P^{-1}S_2u_1$$

Систему (3.1) можно записать в виде одного уравнения в декартовом произведении гильбертовых пространств $L_{2,0}(\Omega)$ и $H_2(\Omega)$, а именно

$$-\lambda Q\eta + M\eta + N\eta = 0, \quad \eta = \mathrm{col}(u_1, T_1)$$

Если положить $\eta = Q^{-1/2}\xi$, то получаем

$$-\lambda\xi + \Phi\xi + F\xi = 0 \tag{3.2}$$

Из построения ясно, что спектры уравнений (3.1) и (3.2) совпадают. Исследуем расположение спектра на плоскости и его зависимость от числа Релея.

Теорема 2. Весь спектр задачи (3.1) состоит из нормальных собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ и расположен в области

$$\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \lambda_{\max}Q)\,\lambda_{\min}(M) - \|N\|\,\lambda_{\min}(Q) \tag{3.3}$$
$$|\mathrm{Im}\,\lambda| \leqslant \|N\|\,\lambda_{\min}(Q)$$

Существует не более конечного числа собственных значений

$$\lambda_k \text{ с } \mathrm{Re}\,\lambda_k < 0, \text{ при } k \to \infty, \ \mathrm{Re}\,\lambda_k \to +\infty$$

Система корневых векторов задачи (3.1) полна в пространстве $W_{2,0}^1(\Omega) \times \times H_{2,0}^1(\Omega)$.

Доказательство. Оператор Φ — самосопряженный оператор с дискретным спектром [11], так как $\Phi^{-1} = Q^{1/2}M^{-1}Q^{1/2}$ является самосопряженным вполне непрерывным оператором в $L_{2,0} \times H_2$. Далее, $F\Phi^{-1} = Q^{-1/2}NM^{-1}Q^{1/2}$ — вполне непрерывный оператор, т. е. F является вполне непрерывным оператором Φ [11].

Рассмотрим тождество

$$\Phi^{-1}F\Phi^{-1} = (Q^{1/2}M^{-1}Q^{1/2})(Q^{-1/2}NQ^{-1/2})(Q^{1/2}M^{-1}Q^{1/2}) =$$
$$= Q^{1/2}M^{-1}NM^{-1}Q^{1/2}$$

Тогда по свойству s-чисел имеем

$$s_n(\Phi^{-1}F\Phi^{-1}) = s_n(Q^{1/2}M^{-1}NM^{-1}Q^{1/2}) \leqslant \| Q^{1/2}M^{-1}N \| \, \| Q^{1/2} \| \times \times s_n(M^{-1}) \tag{3.4}$$

Так как M^{-1} действует из $L_{2,0} \times H_2$ в $W^1_{2,0} \times H^1_{2,0}$, то из [12] следует, что

$$c_1 n^{-1/2} \leqslant s_n(M^{-1}) \leqslant c_2 n^{-1/2} \tag{3.5}$$

Из неравенств (3.4) и (3.5) вытекает, что оператор $\Phi^{-1}F\Phi^{-1}$ имеет конечный порядок. Тогда из теоремы 10.1 [11] следует, что спектр состоит из нормальных собственных чисел и система корневых векторов задачи (3.1) полна в пространстве $W^1_{2,0}(\Omega) \times H^1_{2,0}(\Omega)$.

Представим ограниченный оператор F в виде

$$F = \operatorname{Re} F + i \operatorname{Im} F, \quad \operatorname{Re} F = \frac{F + F^*}{2}, \quad \operatorname{Im} F = \frac{F - F^*}{2i}$$

Тогда из (3.2) будем иметь

$$(\operatorname{Re}\lambda + i \operatorname{Im}\lambda) \| \xi \|^2 = (\Phi\xi, \xi) + (\operatorname{Re} F\xi, \xi) + i(\operatorname{Im} F\xi, \xi)$$

Отсюда

$$\operatorname{Re}\lambda \| \xi \|^2 = (\Phi\xi, \xi) + (\operatorname{Re} F\xi, \xi), \quad \operatorname{Im}\lambda \| \xi \|^2 = (\operatorname{Im} F\xi, \xi)$$

Тогда

$$\operatorname{Re}\lambda = \frac{(\Phi\xi, \xi)}{\| \xi \|^2} + \frac{(\operatorname{Re} F\xi, \xi)}{\| \xi \|^2} \geqslant \frac{(MQ^{-1/2}\xi, Q^{-1/2}\xi)}{\| \xi \|^2} - \frac{|(\operatorname{Re} F\xi, \xi)|}{\| \xi \|^2} \tag{3.6}$$

Далее, если положить $\mu = Q^{-1/2}\xi$, то

$$\frac{(MQ^{-1/2}\xi, Q^{-1/2}\xi)}{\| \xi \|^2} = \frac{(M\mu, \mu)}{\| Q^{1/2}\mu \|^2} \geqslant \frac{\| \mu \|^2}{\| Q^{1/2}\mu \|^2} \inf_\mu \frac{(M\mu, \mu)}{\| \mu \|^2} = \tag{3.7}$$

$$= \lambda_{\min}(M) \frac{\| \mu \|^2}{\| Q^{1/2}\mu \|^2} \geqslant \lambda_{\min}(M) \sup_\mu \frac{\| Q^{1/2}\mu \|^2}{\| \mu \|^2} = \lambda_{\min}(M)\lambda_{\max}(Q)$$

Оценим второе слагаемое по аналогии с (3.7)

$$\frac{|(\operatorname{Re} F\xi, \xi)|}{\| \xi \|^2} \leqslant \frac{|(F\xi, \xi)|}{\| \xi \|^2} = \frac{|(NQ^{-1/2}\xi, Q^{-1/2}\xi)|}{\| \xi \|^2} \leqslant \| N \| \lambda_{\min}(Q) \tag{3.8}$$

Тогда из неравенств (3.6)—(3.8) получаем первое неравенство из (3.5). Аналогично доказывается второе неравенство из (3.5). Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть жидкость подогревается снизу, т. е. число Релея R положительно. Если оно удовлетворяет неравенству

$$R \leqslant 4\lambda_{\min}(A)\lambda_{\min}(C)(2 + GJ_0J_{33}{}^{-1})^{-2}, \quad J_0 = \int_\Omega \mathbf{r}^2 d\Omega \tag{3.9}$$

где J_0 — безразмерный полярный момент инерции жидкости относительно точки O, J_{33} — наименьшая компонента момента инерции J, то весь спектр задачи (3.1) расположен в области

$$\operatorname{Re}\lambda > 0, \quad |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \| N \| \lambda_{\min}(Q)$$

Доказательство. Систему (3.1) преобразуем к виду

$$-\lambda(I + B)\mathbf{u} + A\mathbf{u} = R(S_1 + B_1)T$$

$$-\lambda PRT + RCT = RS_2\mathbf{u}$$

Пусть λ — собственное число системы (3.1), которому соответствует собственная функция $\eta = \mathrm{col}\,(\mathbf{u}, T)$. Тогда справедливы равенства

$$(3.10)\qquad -\lambda \| (I + B)^{1/2}\mathbf{u} \|^2 + \| A^{1/2}\mathbf{u} \|^2 = R\,[(S_1, T, \mathbf{u}) + (B_1 T, \mathbf{u})]$$

$$-\lambda PR \| T \|^2 + R \| C^{1/2} T \|^2 = R\,(S_2 \mathbf{u}, T)$$

Отсюда следует, что

$$(3.11)\qquad \mathrm{Re}\,\lambda\,(\| (I + B)^{1/2}\mathbf{u} \|^2 + PR \| T \|^2) = \| A^{1/2}\mathbf{u} \|^2 + R \| C^{1/2} T \|^2 - R\,\mathrm{Re}\,[(S_1 T, \mathbf{u}) + (B_1, T, \mathbf{u}) + (S_2, \mathbf{u}, T)]$$

По построению операторов S_1, S_2, B_1 имеем

$$(3.12)\qquad |\,\mathrm{Re}\,(S_1 T, \mathbf{u})\,| \leqslant |\,(S_1 T, \mathbf{u})\,| \leqslant \| T \|\,\| \mathbf{u} \|$$

$$|\,\mathrm{Re}\,(S_2 \mathbf{u}, T)\,| \leqslant |\,(S_2 \mathbf{u}, T)\,| \leqslant \| T \|\,\| \mathbf{u} \|$$

$$|\,\mathrm{Re}\,(B_1 T, \mathbf{u})\,| \leqslant |\,(B_1 T, \mathbf{u})\,| \leqslant G J_0 J_{33}^{-1} \| T \|\,\| \mathbf{u} \|$$

Тогда из (3.12) и (3.11) вытекает, что

$$(3.13)\qquad \mathrm{Re}\,\lambda\,(\| (I + B)^{1/2}\mathbf{u} \|^2 + PR \| T \|^2) \geqslant \| A^{1/2}\mathbf{u} \|^2 + R \| C^{1/2} T \|^2 - R\,(2 + G J_0 J_{33}^{-1})\,\| T \|\,\| \mathbf{u} \|$$

Так как операторы A и C — положительно-определенные самосопряженные операторы, то

$$\| A^{1/2}\mathbf{u} \|^2 = (A\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geqslant \lambda_{\min}(A)\,\| u \|^2,\quad \| C^{1/2} T \|^2 \geqslant \lambda_{\min}(C)\,\| T \|^2$$

Отсюда и из (3.13) получаем неравенство

$$\mathrm{Re}\,\lambda\,(\| (I + B)^{1/2}\mathbf{u} \|^2 + PR \| T \|^2) \geqslant \lambda_{\min}(A)\,\| \mathbf{u} \|^2 + R\lambda_{\min}(C)\,\| T \|^2 - R\,(2 + G J_0 J_{33}^{-1}) \left(\frac{1}{2}\varepsilon_1 \| \mathbf{u} \|^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1} \| T \|^2 \right)$$

Возьмем $\varepsilon_1 = 2\lambda_{\min}(A)\,(2 + G J_0 J_{33}^{-1})^{-1} R^{-1}$, тогда для $\mathrm{Re}\,\lambda$ справедлива оценка

$$\mathrm{Re}\,\lambda(\| (I + B)^{1/2}\mathbf{u} \|^2 + PR \| T \|^2) \geqslant \left(R\lambda_{\min}(C) - \frac{R^2 (2 + G J_0 J_{33}^{-1})^2}{4\lambda_{\min}(A)} \right) \| T \|^2$$

Отсюда и из условий теоремы вытекает доказательство.

Итак, если выполнено условие (3.9) и жидкость подогревается снизу, то осциллирующие нормальные возмущения затухают.

В рассматриваемом случае

$$\mathrm{Im}\,\lambda = -\,\mathrm{R}\,\mathrm{Im}\,(B_1 T, \mathbf{u})\,(\| (I + B)^{1/2}\mathbf{u} \|^2 + PR \| T \|^2)^{-1}$$

Последняя формула показывает, что осциллирующие возмущения возникают под действием оператора B_1, связанного с переносной силой. В случае неподвижного тела при подогреве снизу нормальных осциллирующих возмущений нет.

Пусть отсутствует градиент температуры $R = 0$, тогда из (3.1) следует, что весь спектр состоит из вещественных положительных чисел с единственной предельной точкой $+\infty$. В этом случае все возмущения монотонно затухают, т. е. равновесие системы тело плюс жидкость устойчиво.

Теорема 4. Пусть жидкость подогревается сверху, т. е. число Релея R отрицательно. Если оно удовлетворяет неравенству

$$(3.14)\qquad |\,R\,| < 4\lambda_{\min}(A)\,\lambda_{\min}(C) J_{33}^2 G^{-2} J_0^{-2}$$

то весь спектр задачи (3.1) расположен в области

$$\operatorname{Re}\lambda > 0, \quad |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \|N\| \lambda_{\min}(Q)$$

Доказательство. Из (3.10) имеем равенство

$$-\lambda(\|(I+B)^{1/2}u\|^2 - PR\|T\|^2) + \|A^{1/2}\mathbf{u}\|^2 - R\|C^{1/2}T\|^2 = \\ = R[(S_1T, \mathbf{u}) + (B_1T, \mathbf{u}) - (S_2\mathbf{u}, T)]$$

Видно, что

$$(S_1, T, \mathbf{u}) = (\overline{S_2\mathbf{u}, T})$$

Отсюда и из предыдущего равенства получаем

$$\operatorname{Re}\lambda = \frac{\|A^{1/2}\mathbf{u}\|^2 - R\|C^{1/2}T\|^2 - R\operatorname{Im}(B_1T, \mathbf{u})}{\|(I+B)^{1/2}\mathbf{u}\|^2 - PR\|T\|^2} \tag{3.15}$$

Как и при доказательстве теоремы 3, получаем, что

$$\|A^{1/2}\mathbf{u}\| - R\|C^{1/2}T\|^2 - R\operatorname{Im}(B_1T, \mathbf{u}) \geqslant \\ \geqslant |R|(\lambda_{\min}(C) - |R|G^2J_0{}^24^{-1}\lambda_{\min}^{-1}(A)J_{33}^{-2})\|T\|^2 \tag{3.16}$$

Из неравенств (3.14), (3.16) следует доказательство теоремы.

Если тело неподвижно, то оператор $B_1 = 0$. Тогда из (3.15) вытекает, что $\operatorname{Re}\lambda > 0$ и движение жидкости устойчиво. Такой факт известен в теории свободной конвекции (см., например, [1]).

Авторы благодарят С. Г. Крейна и Н. Д. Копачевского за обсуждение результатов работы, а также рецензента за замечания.

Поступила 8 II 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гершуни Г. З., Жуковицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
2. *Черноусько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М., ВЦ АН СССР, 1968.
3. *Нго Зуй Кан.* О движении твердого тела с полостями, наполненными несжимаемой вязкой жидкостью. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1968, т. 8, № 4.
4. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1970.
5. *Крейн С. Г.* О функциональных свойствах операторов векторного анализа и гидродинамики. Докл. АН СССР, 1953, т. 93, № 6.
6. *Крейн С. Г.* Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве и их приложение в гидромеханике. Успехи матем. наук, 1957, т. 12, вып. 1.
7. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М., Гостехиздат, 1952.
8. *Кобрин А. И.* К задаче о движении тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, относительно центра масс в потенциальном поле массовых сил. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
9. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., «Наука», 1967.
10. *Соболевский П. Е.* Теория полугрупп и устойчивость разностных схем. В сб.: Теория операторов в функциональных пространствах. Новосибирск, «Наука», 1977.
11. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М., «Наука», 1965.
12. *Параска В. И.* Об асимптотике собственных и сингулярных чисел линейных операторов, повышающих гладкость. Матем. сб., 1965, т. 68, № 4.