Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 6, 1980

УДК 62—50 : 534

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. Б. Ларин

(Киев)

Для линейной периодической системы рассматривается задача синтеза оптимального по квадратичному критерию качества регулятора на бесконечном временном интервале. Предполагается, что движение объекта управления описывается системой линейных периодических конечно-разностных уравнений. Рассматриваются также управляемые объекты, движение которых описывается дифференциальными и конечно-разностными уравнениями на различных участках периода. Проблема синтеза оптимального регулятора сводится к нахождению периодического решения соответствующего уравнения Риккати. Приводится алгоритм построения такого решения. Отмечается, что этот результат может быть использован в задачах периодической оптимизации [1] и при синтезе системы стабилизации шагающего аппарата.

1. Рассмотрим задачу аналитического конструирования регулятора для дискретной периодической системы. Пусть движение объекта описывается системой конечно-разностных уравнений

$$\mathbf{x}(i+1) = \Psi(i)\,\mathbf{x}(i) + \Gamma(i)\,\mathbf{u}(i), \quad i = 1, 2, \ldots \tag{1.1}$$

Требуется при $x(0) \neq 0$ подходящим выбором стратегии управления (уравнения регулятора)

$$\mathbf{u}(i) = f(\mathbf{x}(i)) \tag{1.2}$$

обеспечить устойчивость системы (1.1) и (1.2) ($\lim_{i\to\infty} \mathbf{x}(i) = 0$) и минимизировать квадратичный критерий качества

$$I = \sum_{i=0}^{\infty} [\mathbf{x}'(i)\,Q(i)\,\mathbf{x}(i) + \mathbf{u}'(i)\,B(i)\,\mathbf{u}(i)] \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{x}(i)$, $\mathbf{u}(i)$ — вектора фазовых координат и управляющих воздействий (штрих означает операцию транспонирования), матрицы $\Psi(i)$, $\Gamma(i)$, $Q(i) = Q'(i) \geqslant 0$, $B(i) = B'(i) > 0$ периодические с периодом p, т. е. $\Psi(i+p) = \Psi(i)$, $\Gamma(i+p) = \Gamma(i)$ и т. д.

Известно (см., например, [2]), что уравнение оптимального регулятора (1.2) для данной задачи имеет следующий вид:

$$\mathbf{u}(i) = -[\Gamma'(i)\,S(i+1)\,\Gamma(i) + B(i)]^{-1}\,\Gamma'(i)\,S(i+1)\times \\ \times\Psi(i)\,\mathbf{x}(i) \tag{1.4}$$

Определяющая закон оптимального управления последовательность симметричных матриц S удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$S(j) = \Psi'(j)\,[S(j+1) - S(j+1)\,\Gamma(j)\,(B(j) + \\ + \Gamma'(j)\,S(j+1)\,\Gamma(j))^{-1}\,\Gamma'(j)S(j+1)]\,\Psi(j) + Q(j) \tag{1.5}$$

Таким образом, для определения закона управления (1.4) необходимо найти значение одного элемента последовательности матриц $S(j)$, удовлетворяющих соотношению (1.5). Как правило, в подобных задачах (при конечном временном интервале ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$)) указывается значение матрицы $S(n)$ на правом конце интервала. В рассматриваемом случае бесконечного временного интервала ($i = 0, 1, 2, \ldots$) определение значения матрицы $S(j)$ при каком-либо одном значении индекса j является самостоятельной задачей.

Вследствие периодичности матриц, входящих в условие задачи, стратегия управления не изменится, если начало отсчета сдвинуть на p индексов ($i = p, p + 1, \ldots$). Поэтому искомая последовательность матриц должна также удовлетворять условию периодичности

$$S(j + p) = S(j) \tag{1.6}$$

Для нахождения соотношения, определяющего матрицу $S(j)$, необходимо получить аналог теоремы 2 работы [3] (которая указывает, как выражается решение матричного дифференциального уравнения Риккати через блоки переходной матрицы дифференциальных уравнений Эйлера соответствующей вариационной задачи) для случая, когда движение объекта описывается не дифференциальными, а конечно-разностными уравнениями. Вариационной задаче, описываемой функционалом (1.3) и уравнениями связи (1.1), соответствует система уравнений, связывающая изменение фазового вектора $\mathbf{x}(i)$ и вектора сопряженных переменных $\boldsymbol{\lambda}(i)$ (см., например, [2])

$$\mathbf{x}(i + 1) = \Psi(i)\,\mathbf{x}(i) - \Gamma(i)\,B^{-1}(i)\,\Gamma'(i)\boldsymbol{\lambda}(i + 1)$$
$$\boldsymbol{\lambda}(i) = Q(i)\,\mathbf{x}(i) + \Psi'(i)\,\boldsymbol{\lambda}(i + 1)$$

Предположим, что $\Psi^{-1}(i)$ существует. Тогда

$$\left\|\begin{matrix}\mathbf{x}(i+1)\\ \boldsymbol{\lambda}(i+1)\end{matrix}\right\| = A(i)\left\|\begin{matrix}\mathbf{x}(i)\\ \boldsymbol{\lambda}(i)\end{matrix}\right\|,\quad A(i) = \left\|\begin{matrix}a_{11}(i) & a_{12}(i)\\ a_{21}(i) & a_{22}(i)\end{matrix}\right\| \tag{1.7}$$

$$a_{11}(i) = \Psi(i) + \Gamma(i)\,B^{-1}(i)\,\Gamma'(i)\,(\Psi'(i))^{-1}\,Q(i)$$
$$a_{12}(i) = -\Gamma(i)\,B^{-1}(i)\,\Gamma'(i)\,(\Psi'(i))^{-1}$$
$$a_{21}(i) = -(\Psi'(i))^{-1}\,Q(i),\quad a_{21}(i) = (\Psi'(i))^{-1}$$

$$\left\|\begin{matrix}\mathbf{x}(i+n)\\ \boldsymbol{\lambda}(i+n)\end{matrix}\right\| = W^i(n)\left\|\begin{matrix}\mathbf{x}(i)\\ \boldsymbol{\lambda}(i)\end{matrix}\right\|,\quad W^i(0) = E \tag{1.8}$$

$$W^i(n) = \left\|\begin{matrix}w_{11}{}^i(n) & w_{12}{}^i(n)\\ w_{21}{}^i(n) & w_{22}{}^i(n)\end{matrix}\right\| = A(i+n-1)\ldots A(i)$$

Здесь E — единичная матрица.

Так как $\boldsymbol{\lambda}(i) = S(i)\,\mathbf{x}(i)$ то, согласно (1.8),

$$[w_{21}{}^i(n) + w_{22}{}^i(n)\;S(i)]\;\mathbf{x}(i) = S(n + 1)\;[w_{11}{}^i(n) +$$
$$+\, w_{12}{}^i(n)\;S(i)]\,\mathbf{x}(i)$$

Отсюда следует представление решения разностного уравнения (1.5) через блоки переходной матрицы системы (1.7) (дискретный аналог теоремы 2 работы [3])

$$S(n+i)=[w_{21}^i(n)+w_{22}^i(n)S(i)]\,[w_{11}^i(n)+w_{12}^i(n)\,S(i)]^{-1} \tag{1.9}$$

Отметим «несимметричность» выражения, определяющего симметричную матрицу S.

Определяющая систему (1.7) матрица $A(i)$ удовлетворяет соотношению

$$A'(i)J'A(i)J=E,\quad J=\begin{Vmatrix}0 & E\\ -E & 0\end{Vmatrix}$$

Умножив на J обе части рекуррентного соотношения, определяющего в (1.8) матрицу $W^i(n)$, получим

$$W^i(n+1)\,J=A\,(i+n)\,W^i(n)\,J$$

Следовательно,

$$(W^i(n+1))'\,J'W^i(n+1)\;\;J=(W^i(0))'J'W^i(0)\,J=E$$

Из этого равенства следует, что блоки матрицы $W^i(n)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} w_{11}^i(n)&=[(w_{22}^i(n))']^{-1}\,[E+(w_{12}^i(n))'\;w_{21}^i(n)]=\\ &=[(w_{22}^i(n))']^{-1}+w_{12}^i(n)\;(w_{22}^i(n))^{-1}\,w_{21}^i(n)\end{aligned} \tag{1.10}$$

$$[(w_{22}^i(n))']^{-1}\,(w_{21}^i(n))'=w_{21}^i(n)\;(w_{22}^i(n))^{-1}=U^i(n) \tag{1.11}$$

$$(w_{21}^i(n))'\;[(w_{22}^i(n))']^{-1}=(w_{22}^i(n))^{-1}\;w_{22}^i(n)=R^i(n) \tag{1.12}$$

Симметризуем (1.9) с помощью соотношений (1.10) — (1.12). Из (1.9) и (1.10) получим

$$\begin{aligned} S(i)&=(w_{22}^i(n))^{-1}\;[E-S(n+i)\;\;U^i(n)]^{-1}\,S(n)+i)\times\\ &\times[(w_{22}^i(n))']^{-1}-R^i(n)\end{aligned} \tag{1.13}$$

Так как, согласно (1.11), матрица $U^i(n)$ симметрична, представим ее в виде произведения трех матриц ($(N^i(n))^{-1}$ существует)

$$U^i(n)=H^i(n)\,N^i(n)\;\;(H^i(n))'$$

$$(N^i(n))'=N^i(n)$$

Запишем теперь соотношение (1.9) в аналогичном (1.5) симметричном виде

$$\begin{aligned} S(i)&=\Phi^i(n)\;\;\{S(i+n)-S(i+n)\,H^i(n)\,[(H^i(n))'S(i+n)\times\\ &\times H^i(n)-(N^i(n))^{-1}]^{-1}\;\;(H^i(n))'\;\;S(i+n)\}\,(\Phi^i(n))'-\\ &-R^i(n)\;\;(\Phi^i(n)=(w_{22}^i(n))^{-1})\end{aligned} \tag{1.14}$$

Входящие в это выражение матрицы определяются, согласно (1.7), (1.8), следующими рекуррентными соотношениями (в которые не входит $\Psi^{-1}(n)$):

$$\Phi^i(n+1)=\Phi^i(n)\;\;(E-Q(n+i)\;\;U^i(n))^{-1}\;\;\Psi'\;\;(n+i)$$

$$\begin{aligned}\Phi^i(0)&=E,\;\;U^i(n+1)=\Psi(n+i)\,U^i(n)\;\;(E-Q(n+i)\times\\ &\times U^i(n))^{-1}\;\;\Psi'(n+i)-\Gamma\;\;(n+i)\;\;B^{-1}\;\;(n+i)\;\;\Gamma'(n+i),\end{aligned}$$

$$U^i(0)=0$$

$$\begin{aligned}R^i(n+i)&=R^i(n)-\Phi^i(n)\;\;(E-Q(n+i)\;\;U^i(n))^{-1}\times\\ &\times Q(n+1)\;\;(\Phi^i(n))',\;\;R^i(0)=0\end{aligned}$$

Выражение (1.14) позволяет с использованием условия периодичности (1.6) записать дискретное алгебраическое уравнение Риккати, которому удовлетворяет искомая матрица $S(i)$, в виде

$$S(i) = \Phi^i(p)\,\{S(i) - S(i)\,H^i(p)\,[(H^i(p))'\,S(i)\,H^i(p) - (N^i(p))^{-1}]^{-1}\,(H^i(p))'\,S(i)\}\,(\Phi^i(p))' - R^i(p) \tag{1.15}$$

Таким образом, задача выбора матрицы $S(i)$, определяющей в совокупности в (1.5) искомую периодическую последовательность (соответственно и стратегию управления (1.4)), сводится к задаче выбора решения уравнения (1.15). Для такого выбора воспользуемся следующим свойством асимптотической устойчивости оптимальной замкнутой системы «объект плюс регулятор». Если найдено решение уравнения (1.15), такое, что собственные числа матрицы

$$[E - U^i(p)\,S(p+1)]^{-1}\,(\Phi^i(p))' \tag{1.16}$$

которая определяет изменение фазового вектора замкнутой системы «объект плюс регулятор», соответствующей дискретную алгебраическому уравнению Риккати (1.15) [2], лежат внутри единичного круга (если такое решение существует, то, как правило, оно единственно и может быть найдено, например, с помощью алгоритма [4]), то система уравнений (1.1) — (1.4) асимптотически устойчива и, следовательно, это значение $S(i)$ определяет искомую периодическую последовательность. Покажем это.

Принимая во внимание периодичность матрицы, входящих в условия рассматриваемой задачи, для доказательства асимптотической устойчивости системы (1.1) — (1.4) достаточно показать, что обусловленная этой системой матрица, связывающая вектора $\mathbf{x}(i+p)$ и $\mathbf{x}(i)$ (эта матрица определяет изменение фазового вектора за период), имеет собственные числа, лежащие внутри единичного круга. Согласно (1.8),

$$\mathbf{x}(i+p) = (w_{11}{}^i(p) + w_{12}{}^i(p)\,S(i))\,\mathbf{x}(i)$$

Воспользовавшись (1.10) и (1.13), получим

$$\mathbf{x}(i+p) = [E - w_{12}{}^i(p)\,(w_{22}{}^i(p))^{-1}\,S(p+i)]^{-1}\,[(w_{22}{}^i(p))']^{-1} \times \times\, \mathbf{x}(i)$$

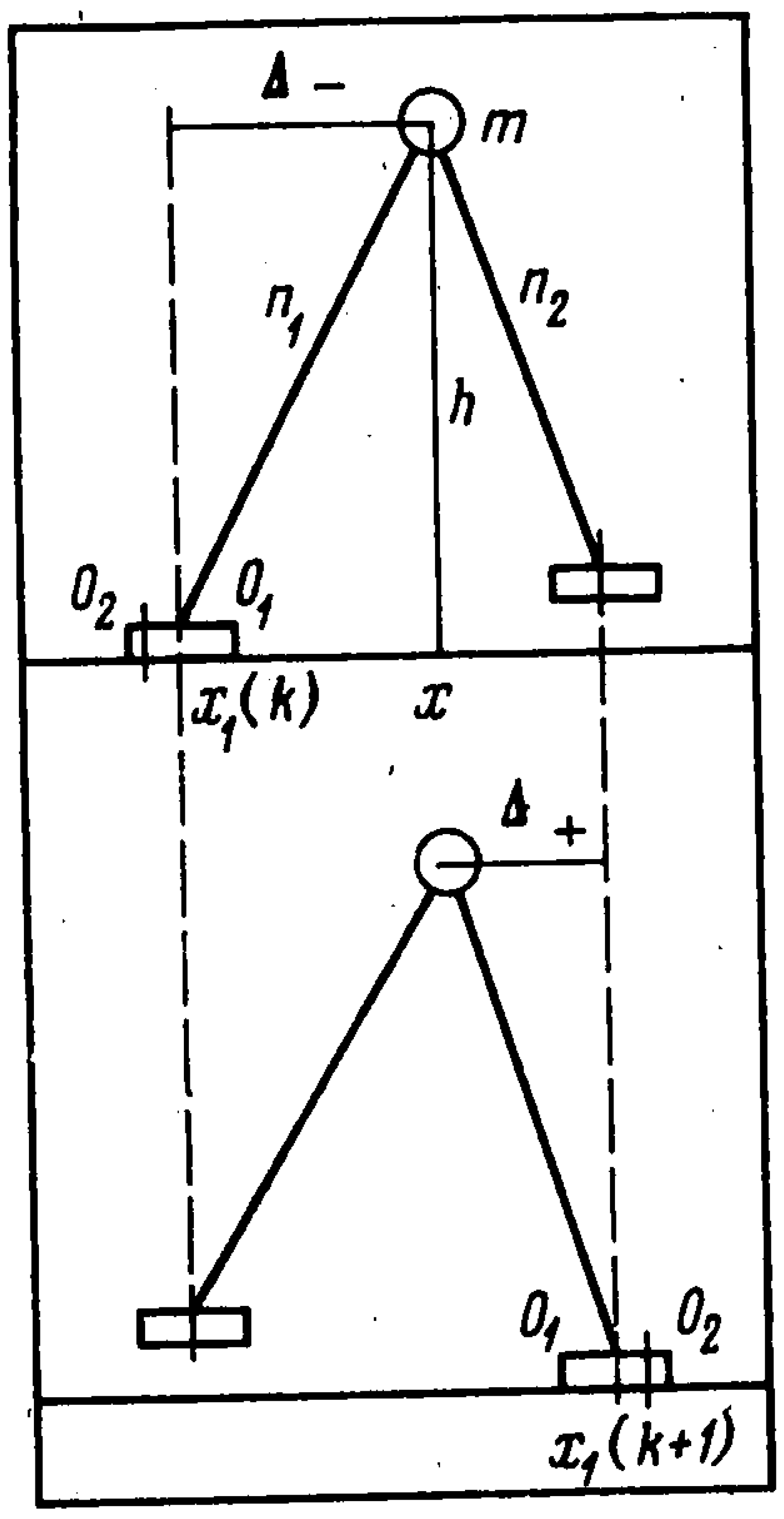
Матрица, связывающая вектора $\mathbf{x}(i+p)$ и $\mathbf{x}(i)$ в этом рекуррентном соотношении, совпадает с (1.16). Поэтому, если выбрано решение уравнения (1.15), такое, что модули собственных чисел матрицы (1.16) меньше единицы, то система (1.1), (1.4) асимптотически устойчива.

2. Рассмотрим задачу аналитического конструирования регулятора для периодической управляемой системы, движение которой описывается дифференциальными и конечно-разностными уравнениями на разных участках периода. Примером таких объектов управления может служить двуногий шагающий аппарат.

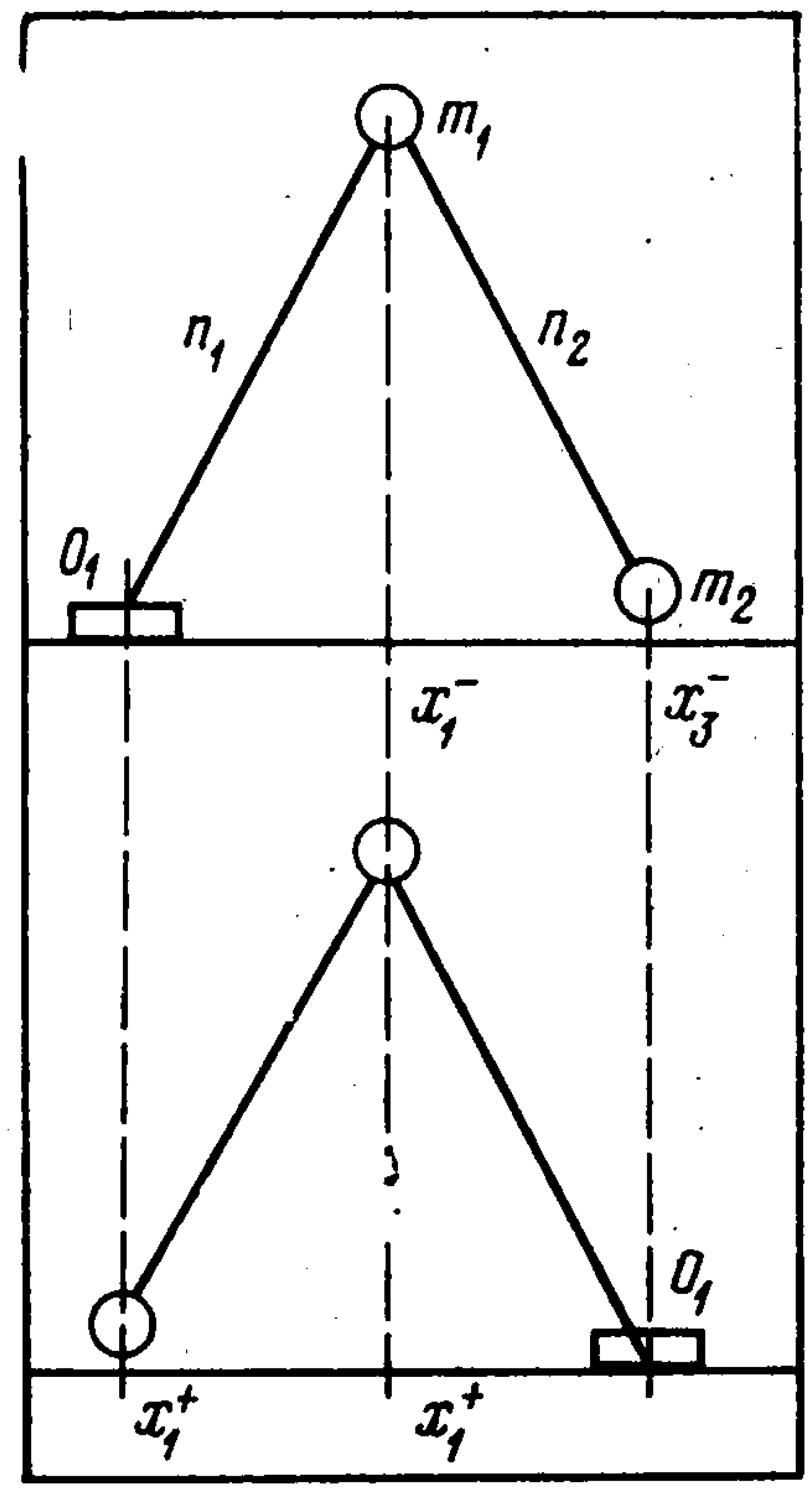
Проиллюстрируем необходимость различного способа описания шагающего аппарата на разных фазах его движения. Пусть шагающий аппарат идеализируется как снабженный стопой перевернутый математический маятник (фиг. 1), состоящий из точечной массы m и двух невесомых ног n_1 и n_2, на которые он поочередно, через заданный интервал времени τ, опирается (аппарат совершает одноопорную регулярную походку). Каждая нога имеет на конце стопу — устройство, позволяющее путем приложения момента в точке соединения ноги и стопы (точке O_1) перемещать вдоль стопы «точку нулевого момента» (точку O_2). Предположим, что массой стопы можно пренебречь. Пренебрегая также силами вязкого сопротивления, уравнение движения такой системы вдоль оси во время опирания на одну ногу запишем в виде [5]

$$x^{\cdot\cdot} = gh^{-1}(x - x_2)$$

Здесь g — ускорение силы тяжести, x — координата массы m, x_2 — координата точки O_2. Предполагается, что эта координата может изменяться в течение шага вследствие изменения прикладываемого момента в точке O_1 (непрерывное управление)



Фиг. 1



Фиг. 2

Поместим начало системы координат в точку O_1. В новой (изменяющейся с номером шага) системе координат уравнение движения аппарата принимает вид

$$(x^\circ)^{\cdot\cdot} = gh^{-1}x^\circ + gh^{-1}u, \quad (k-1)\tau < t < k\tau, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.1}$$

$$x^\circ = x - x_1(k), \quad u = x_1(k) - x_2$$

Здесь $x_1(k)$ — координата точки O_1, которая остается постоянной величиной в течение рассматриваемого k-го шага ($(k-1)\tau < t < k\tau$) и скачкообразно изменяется на следующем шаге (в момент изменения опорной ноги) на величину $v(k) = x_1(k+1) - x_1(k)$. Вследствие предположения о безынерционности переносимой ноги величина $v(k)$ может выбираться произвольно (импульсное управление).

В моменты смены опорной ноги ($t = k\tau$) горизонтальная скорость массы непрерывна, поэтому ее величина одинакова в старой и в новой системах координат (начала этих систем совпадают с точками опоры ноги на k-м и $(k+1)$-м шагах соответственно). Следовательно,

$$(x^\circ)^{\cdot}(k\tau + 0) = (x^\circ)^{\cdot}(k\tau - 0) \tag{2.2}$$

Координата x° в моменты $t = k\tau$ испытывает разрыв, так как $\Delta_- = x^\circ(k\tau - 0)$ измеряется в старой системе, а $\Delta_+ = x^\circ(k\tau + 0)$ — в новой. Это показано на фиг. 1. В верхней части изображен аппарат в конце k-го шага (аппарат опирается на ногу n_1), в нижней — в начале $k+1$-го шага (опорной является нога n_2). Получаем

$$x^\circ(k\tau + 0) = x^\circ(k\tau - 0) - v(k) \tag{2.3}$$

Следовательно, рассмотренный шагающий аппарат с невесомыми ногами описывается как объект управления дифференциальными уравнениями (2.1) при $(k-1) \times \tau < t < k\tau$ и разностными уравнениями (2.2) — (2.3) при $t = k\tau$ ($k = 1, 2, \ldots$).

Усложним рассмотренную выше модель шагающего аппарата, приняв во внимание массу стопы переносимой ноги (модель с весомыми ногами). Пусть шагающий аппарат моделируется как двойной математический маятник, изображенный на фиг. 2, где m_1 — масса корпуса аппарата, m_2 — масса стопы переносимой ноги, n_1, n_2 — ноги аппарата. Точка O_1 является местом соединения ноги и стопы и служит началом системы координат.

Предположим, что кроме момента μ_1, действующего в стопе, к переносимой ноге в точке соединения ее с массой корпуса прилагается управляющий момент μ_2. Как и в предыдущем примере, не будем рассматривать вопросы вертикальной стабилизации аппарата, полагая, что масса m_1 движется горизонтально вдоль оси x. Введем следующие фазовые координаты аппарата: x_1 — координата массы m_1, $x_2 = x_1^{\cdot}$, x_3 — координата массы m_2, $x_4 = x_3^{\cdot}$ (фиг. 2). В окрестности вертикального положения корпуса аппарата существует такая область значений фазовых координат (которые являются компонентами вектора $\mathbf{x}' = \| x_1, x_2, x_3, x_4 \|$, что в течение k-го шага (период опирания аппарата на одну ногу) изменение вектора $\mathbf{x}$ с достаточной точностью описывается линейной системой дифференциальных уравнений, в которой вектор управляющих воздействий имеет вид $\mathbf{u}' = \| \mu_1, \mu_2 \|$.

В моменты смены опорной ноги ($t = k\tau$) происходит скачкообразное изменение фазовых координат аппарата. Найдем соотношения, описывающие изменение фазового вектора в момент смены опорной ноги. Так как начало системы отсчета фазовых координат аппарата совпадает с точкой соединения опорной ноги и стопы, то, как видно из фиг. 2 (в верхней части фигуры изображен аппарат в момент $t = k\tau - 0$, нижней — при $t = k\tau + 0$) при смене опорной ноги изменения координат x_1 и x_2 удовлетворяют следующим соотношениям:

$$(2.4)\qquad x_1(k\tau + 0) = x_1(k\tau - 0) - x_3(k\tau - 0), \quad x_3(k\tau + 0) = -x_3(k\tau - 0)$$

Предполагая ограниченность моментов μ_1 и μ_2, получим еще два условия

$$(2.5)\qquad x_2(k\tau + 0) = x_2(k\tau - 0), \quad x_4(k\tau + 0) = 0$$

Соотношения (2.4) и (2.5) запишем в виде

$$\mathbf{x}(k\tau + 0) = F_\delta \mathbf{x}(k\tau - 0), \qquad F_\delta = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Анализ этих примеров демонстрирует различие математических моделей изменения фазовых координат шагающих аппаратов с весомыми и невесомыми ногами.

Проанализируем теперь общую задачу. Пусть на отрезках времени $(k-1)\tau < t < k\tau$ $(k = 1, 2, \ldots)$ движение объекта управления описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(2.6)\qquad \mathbf{x}^{\cdot} = F\mathbf{x} + G\mathbf{u}$$

В моменты времени $t = k\tau$ изменение фазового вектора подчиняется следующему закону:

$$(2.7)\qquad \mathbf{x}(k\tau + 0) = F_\delta \mathbf{x}(k\tau - 0) + M\mathbf{v}(k)$$

Требуется найти такую стратегию непрерывного и импульсного управлений ($\mathbf{u}(t) = f(\mathbf{x}(t))$, $\mathbf{v}(k) = \varphi(\mathbf{x}(k\tau - 0))$), чтобы замкнутая система «объект плюс регулятор» была асимптотически устойчива и эта стратегия минимизировала бы следующий квадратичный функционал (критерий качества):

$$(2.8)\qquad I(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} (\mathbf{x}'Q\mathbf{x} + \mathbf{u}'B\mathbf{u})\,dt + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{v}'(k)C\mathbf{v}(k)$$

Здесь F, G, $B = B' > 0$, $Q = Q' \geqslant 0$ периодичны по t с периодом τ, матрицы F_δ, M, $C = C' > 0$ постоянны.

Используя обычную для задач линейной квадратичной гауссовой проблемы процедуру отыскания минимума функционала (2.8) в виде квадратичной формы (см., например, [2])

$$\min_{\mathbf{u},\,\mathbf{v}} I(t_0) = \mathbf{x}'(t_0)\, S(t_0)\, \mathbf{x}(t_0)$$

найдем

(2.9) $\qquad (k-1)\tau < t < k\tau, \quad \mathbf{u} = -B^{-1} G' S \mathbf{x}$

(2.10) $\qquad t = k\tau, \quad \mathbf{v}(k) = -(M'S(k\tau + 0)\, M + C)^{-1}\, M'S(k\tau + 0) F_\delta\, x(k\tau - 0)$

Матрица S при $(k-1)\tau < t < k\tau$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Риккати

(2.11) $\qquad -S^{\cdot} = SF + F'S - SGB^{-1} G'S + Q$

Скачки этой матрицы в момент $t = k\tau$ описываются следующим соотношением

(2.12) $\qquad S(k\tau - 0) = F_\delta' \{S(k\tau + 0) - S(k\tau + 0) M (C + M'S(k\tau + 0)M)^{-1} M'S(k\tau + 0)\} F_\delta$

Инвариантность стратегии управления при сдвиге начала отсчета времени на период τ приводит к условию периодичности матрицы S

(2.13) $\qquad S(k\tau + 0) = S((k+1)\tau + 0), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

Таким образом, как и в предыдущей задаче, для определения оптимальной стратегии управления необходимо найти периодическую (с периодом τ) матрицу S, которая удовлетворяет уравнениям (2.11), (2.12) и обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (2.6), (2.7), (2.9), (2.10). Эта задача сводится к рассмотренной в п. 1, если описывать связь между $S(k\tau + 0)$ и $S((k+1)\tau - 0)$ не дифференциальным уравнением (2.11), а соотношением, аналогичным (1.5). Найдем это соотношение. Как следует из [3], если $S(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.11), то

(2.14) $\qquad S(t) = [\theta_{21}(t) + \theta_{22}(t) S(+0)]\, [\theta_{11}(t) + \theta_{12}(t)\, S(+0)]^{-1}$

Матрицы $\theta_{ij}(t)$ $(i, j = 1, 2)$ определяются из решения задачи

(2.15) $$\Phi^{\cdot} = \begin{Vmatrix} \theta_{11}^{\cdot} & \theta_{12}^{\cdot} \\ \theta_{21}^{\cdot} & \theta_{22}^{\cdot} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} F & -GB^{-1}G' \\ -Q & -F' \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{Vmatrix}, \quad \Phi(0) = E$$

Пусть, как и в п. 1,

$$J = \begin{Vmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{Vmatrix}$$

Тогда

(2.16) $$J\Phi(t) J'\Phi'(t) = \begin{Vmatrix} \theta_{22}\theta_{11}' - \theta_{21}\theta_{22}' & \theta_{22}\theta_{21}' - \theta_{21}\theta_{22}' \\ \theta_{11}\theta_{12}' - \theta_{12}\theta_{11}' & \theta_{11}\theta_{22}' - \theta_{12}\theta_{21}' \end{Vmatrix} = E$$

Соотношение (2.16) позволяет записать (2.14) в следующем виде:

(2.17) $\qquad S(+0) = \theta_{22}^{-1}(t)\ [S(t) - S(t)\, D(t)\, (D'(t)\, S(t)\, D(t) - N^{-1}(t))^{-1} D'(t)\, S(t)]\, (Q_{22}'(t))^{-1} - Q_{22}^{-1}(t)\, Q_{21}(t)$

Здесь матрицы $D(t)$, $N(t)$ ($N^{-1}(t)$ существует, $N'(t) = N(t)$) определяются факторизацией симметричной матрицы $Q_{12}(t)\,Q_{22}^{-1}(t)$

(2.18) $$D(t)\,N(t)\,D'(t) = Q_{12}(t)\,Q_{22}^{-1}(t)$$

Симметричность матрицы $U(t) = \theta_{12}(t)\,\theta_{22}^{-1}(t)$ и $R(t) = \theta_{22}^{-1}(t)\,Q_{21}(t)$ следует из (2.16); согласно (2.15), они удовлетворяют симметричным дифференциальным уравнениям и начальным условиям

(2.19) $$U^{\cdot} = FU + UF' + UQU - GB^{-1}G',\quad U(0) = 0$$

(2.20) $$R^{\cdot} = -\theta_{22}^{-1}\,Q\,(\theta_{22}^{-1})',\quad R(0) = 0$$

Дополним эти уравнения еще одним, описывающим изменение матрицы θ_{22}^{-1}:

(2.21) $$d\theta_{22}^{-1}/\,dt = \theta_{22}^{-1}(QU + F'),\qquad \theta_{22}^{-1}(0) = E$$

Таким образом, связь между $S(+0)$ и $S(\tau - 0)$ полностью определяется из (2.17) — (2.21). Используем эти соотношения для решения сформулированной задачи. Условие (2.13) (при $k = 0$) приводит к уравнению, аналогичному (1.15) относительно матрицы $S(+0)$

(2.22) $$S(+0) = \theta_{22}^{-1}(\tau)\,F_\delta'\,[S(+0) - S(+0)\,K\,(\Pi^{-1} + K'S(+0)K)^{-1}K'S(+0)]F\,(\theta_{22}^{-1}(\tau))' - R(\tau)$$

Матрицы Π, K являются результатом факторизации симметричной матрицы

$$(MC^{-1}M' - F_\delta\,U(\tau)\,F_\delta') = K\Pi K',\quad \Pi' = \Pi$$

Здесь матрица Π^{-1} существует.

Как и в рассмотренном в п. 1 случае дискретной системы, доказывается, что искомым значением $S(+0)$ является то решение уравнения (2.22), при котором матрица

$$[E + (MC^{-1}M' - F_\delta\,U(r)F_\delta')\;S(+0)]^{-1}\;F_\delta\,(\theta_{22}^{1-}(\tau))'$$

имеет собственные числа, лежащие внутри единичного круга.

В частном случае, если в (2.7) $M = 0$, $F_\delta = E$, найденное при помощи алгоритма [4] из (2.22) значение $S(+0)$ определяет периодическое решение матричного дифференциального уравнения Риккати, возникающего в задачах периодической оптимизации [1]. Если в (2.8) матрица $Q = 0$, то, согласно (2.20), $R(\tau) = 0$ и уравнение (2.22) можно преобразовать в уравнение Ляпунова. Подробно этот случай был рассмотрен [1].

Поступила 2 X 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bittanti S., Locatelli A., Maffezzoni C.* Second-variation methods in periodic optimization. J. Optimizat. Theory and Appl., 1974, vol. 14, No. 1, p. 31—49. (Рус. перев.: ВИНИТИ, М., 1974).
2. *Bryson A. E., Ho Y. C.* Applied optimal control. Optimization, Estimation and Control Watham Mass, 1968. (Рус. перев.: М., «Мир», 1972).
3. *Kalman R. E., Bucy R. S.* New results in linear filtering and prediction theory. Trans. ASME. Ser. D. J. Basis Eng., 1961, vol. 83, No. 1. (Рус. перев.: Тр. Америк. о-ва инж.-механ., сер. Д, 1961, № 1.)
4. *Алиев Ф. А.* О решении дискретного алгебраического уравнения Риккати. В сб.: Кибернетика и вычислительная техника, вып. 38. Киев, «Наукова думка», 1977.
5. *Ларин В. Б.* О непрерывном и импульсном управлении горизонтальным движением двуногого шагающего аппарата. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 6.

[1] *Ларин В. Б.* Стабилизация горизонтального движения двуногого шагающего аппарата. Киев, Изд-е Ин-та матем. АН СССР, 1977, Препринт № 4.