Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 6, 1980

УДК 62—50

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ЗАДАЧ ПОЗИЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ

А. И. Короткий

(Свердловск)

Обсуждаются условия аппроксимации задач позиционного управления для управляемых систем достаточно общего вида, охватывающих, в частности, некоторые классы объектов с распределенными параметрами. В основе построений лежат результаты работ [1–6]. Для задач программного управления аналогичные вопросы рассматривались, например, в [7–14], для задач позиционного управления — в [1, 6]. В отличие от схемы аппроксимации, предложенной Н. Н. Красовским для общих эволюционных систем [1], в данной работе разрешающие стратегии не зависят от точности ε. В отличие от [6] рассматривается более общий случай, включающий в себя, в частности, аппроксимацию по методу Галеркина, разностному методу прямых.

1. Будем считать, что управляемая динамическая система Σ на временно́м отрезке $T = [t_0, \vartheta]$, $t_0 < \vartheta$ в метрическом пространстве X (с метрикой ρ) определяется оператором Y, ставящим в соответствие каждым $(t_1, t_2] \subset T$, $x \in X$, $u \in P(t_1, t_2]$, $v \in Q(t_1, t_2]$ единственный элемент $Y(t_1, x, t_2, u, v) \in X$. Здесь $P(t_1, t_2]$ ($Q(t_1, t_2]$) — множество допустимых на $(t_1, t_2]$ действий [1] первого (второго) игрока со свойствами: действия u (v) на $(t_1, t_2]$ при всяком $\tau \in (t_1, t_2)$ определяют действия $u(t_1, \tau]$ ($v(t_1, \tau]$) и $u(\tau, t_2]$ ($v(\tau, t_2]$) на $(t_1, \tau]$ и $(\tau, t_2]$ соответственно и, наоборот, действия u_1 (v_1) на $(t_1, \tau]$ и действия u_2 (v_2) на $(\tau, t_2]$ определяют действия $u_1 + u_2$ ($v_1 + v_2$) на $(t_1, t_2]$. Оператор Y обладает полугрупповым свойством

$$Y(t_1, x, t_2, u_1 + u_2, v_1 + v_2) = Y(\tau, Y(t_1, x, \tau, u_1, v_1), t_2, u_2, v_2)$$

Стратегией первого (второго) игрока назовем правило U (V), ставящее в соответствие каждой тройке $\{t_1, t_2, x\}$, $t_0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \vartheta$, $x \in X$ элемент $U(t_1, t_2, x) \in P(t_1, t_2]$ ($V(t_1, t_2, x) \in Q(t_1, t_2]$). Движением из позиции $\{t_*, x_*\}$, $t_* \in T$, $x_* \in X$, соответствующим стратегии U (V) и разбиению $\Delta = \{\tau_j,\ j = 0, \ldots, m(\Delta) \mid t_* = \tau_0 < \ldots < \tau_m = \vartheta\}$ отрезка $[t_*, \vartheta]$, будем называть функцию φ: $[t_*, \vartheta] \to X$ со свойствами:

$$\varphi(t_*) = x_*, \text{ при } t \in (\tau_j, \tau_{j+1}],\ j = 0, \ldots, m-1$$

$$\varphi(t) = Y(\tau_j, \varphi(\tau_j), t, u_j(\tau_j, t], v_j(\tau_j, t])$$

где

$$u_j = U(\tau_j, \tau_{j+1}, \varphi(\tau_j)), \quad v_j \in Q(\tau_j, \tau_{j+1}]$$

$$(u_j \in P(\tau_j, \tau_{j+1}], \quad v_j = V(\tau_j, \tau_{j+1}, \varphi(\tau_j)))$$

Множество всех движений, отвечающих начальной позиции $\{t_*, x_*\}$, стратегии U (V) и разбиению Δ, обозначим символом $D(t_*, x_*, U(V), \Delta)$.

В пространстве позиций $T \times X$ введем метрику

$\sigma(\{t, x\}, \{\tau, y\}) = (|t-\tau|^2 + \rho(x, y)^2)^{1/2}$ и, если M — множество из $T \times X$, то

$$\sigma(\{t, x\}, M) = \inf_{\{\tau, y\} \in M} \sigma(\{t, x\}, \{\tau, y\})$$

Пусть заданы множества M и N из $T \times X$.

Задача 1.1. Для данных $\{t_0, x_0\}$, M, N найти стратегию U со свойством: каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется $\delta > 0$, такое, что для всякого $\varphi \in D(t_0, x_0, U, \Delta)$, $d\Delta \leqslant \delta$ найдется $t \in T$, при котором

(1.1) $\quad \sigma(\{t, \varphi(t)\}, M) \leqslant \varepsilon$

(1.2) $\quad \sigma(\{\tau, \varphi(\tau)\}, N) \leqslant \varepsilon, \quad t_0 \leqslant \tau \leqslant t$

Задача 1.2. Для данных $\{t_0, x_0\}$, M, N найти стратегию V со свойством: существуют $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, такие, что для всякого $\varphi \in D(t_0, x_0, V, \Delta)$, $d\Delta \leqslant \delta$ исключается условие встречи (1.1), (1.2).

Здесь $d\Delta = \max\{\tau_{j+1} - \tau_j \mid j = 0, \ldots, m-1\}$.

2. Предположим, что имеется некоторая последовательность управляемых динамических систем $\{\Sigma_i\}$ в смысле указанного выше определения. Система Σ_i задана на отрезке T в метрическом пространстве X_i (с метрикой ρ_i) с полугрупповым оператором Y_i, отображающим каждые $(t_1, t_2] \subset T$, $x_i \in X_i$, $u \in P(t_1, t_2]$, $v \in Q(t_1, t_2]$ в X_i.

Построим вспомогательную последовательность управляемых динамических систем $\{\Sigma_i^*\}$. Система Σ_i^* задана на T в метрическом пространстве $X_i^* = X_1 \times \ldots \times X_i$ (с естественной метрикой ρ_i^*) с оператором $Y_i^* = \{Y_1, \ldots, Y_i\}$, ставящим в соответствие каждым $(t_1, t_2] \subset T$, $x_i^* = \{x_1, \ldots, x_i\}$, $u \in P(t_1, t_2]$, $v \in Q(t_1, t_2]$ элемент

$$Y_i^*(t_1, x_i^*, t_2, u, v) = \{Y_1(t_1, x_1, t_2, u, v), \ldots, Y_i(t_1, x_i, t_2, u, v)\}$$

Пусть задана последовательность начальных состояний

$$\{x_{0i}\}, \; x_{0i} \in X_i, \; i = 1, 2, \ldots$$

Условие 1. Для всякого номера i существует оператор $A_i : X_i \to X$ со свойствами:

1) $\rho(A_i x_{0i}, x_0) \to 0$ при $i \to \infty$ и

$\rho(A_i Y_i(t_0, x_{0i}, t, u(t_0, t], v(t_0, t]), Y(t_0, x_0, t, u(t_0, t], v(t_0, t])) \to 0$ при $i \to \infty$ равномерно по $t \in (t_0, \vartheta]$, $u \in P(t_0, \vartheta]$, $v \in Q(t_0, \vartheta]$;

2) оператор A_i равномерно непрерывен на множестве

$$\bigcup_{t \in T} D_i(t), \quad D_i(t) = \{\varphi(t) \mid \varphi \in D_i = \bigcup_{\{U_i\}} \bigcup_{\{\Delta\}} D_i(t_0, x_{0i}, U_i, \Delta)\}$$

Условие 2. Для всякого номера i множество функций D_i равностепенно непрерывно по $t \in T$.

Условие 3. Для всякого номера i система Σ_i^* регулярна, т. е. существует функция $\mu_i : [0, \infty) \to [0, \infty)$ и число $L_i \geqslant 0$ со свойствами:

1) $\mu_i(\gamma) \to 0$ при $\gamma \to 0$;

2) каковы бы ни были $t_1 < t_2$, x_i^* и y_i^* из $D_i^*(t_1)$, существует $u^* \in P(t_1, t_2]$ ($v^* \in Q(t_1, t_2]$), такое, что для всякого $v \in Q(t_1, t_2]$ ($u \in P(t_1, t_2]$) найдется $v_* \in Q(t_1, t_2]$ ($u_* \in P(t_1, t_2]$) со свойствами: для всякого $u \in P(t_1, t_2]$ ($v \in Q(t_1, t_2]$)

$$\rho_i^*(Y_i^*(t_1, x_i^*, t_2, u^*(u), v(v^*)), Y_i^*(t_1, y_i^*, t_2, u(u_*), v_*(v)))^2 \leqslant$$
$$\leqslant \rho_i^*(x_i^*, y_i^*)^2 \cdot e^{L_i \cdot (t_2 - t_1)} + \mu_i(t_2 - t_1) \cdot (t_2 - t_1)$$

Действие u^* (v^*) назовем экстремальным действием первого (второго) игрока, соответствующим набору $\{t_1, t_2, x_i^*, y_i^*\}$.

Не нарушая общности, можно считать, что для всякого i функция μ_i монотонна и справедливы неравенства

$$\mu_i(\gamma) \leqslant \mu_{i+1}(\gamma), \quad L_i \leqslant L_{i+1}$$

Для последовательности начальных состояний $\{x_{0i}\}$ в силу условия 1 существует положительная последовательность $\{\alpha_i\}$, $\alpha_i \to 0$ при $i \to \infty$, такая, что $\rho(A_i x_{0i}, x_0) \leqslant \alpha_i$ и при всех $t \in (t_0, \vartheta]$, $u \in P(t_0, \vartheta]$, $v \in Q(t_0, \vartheta]$

$$\rho(A_i Y_i(t_0, x_{0i}, t, u(t_0, t], v(t_0, t]), Y(t_0, x_0, t, u(t_0, t],$$
$$v(t_0, t])) \leqslant \alpha_i$$

Не нарушая общности, можно считать, что эта последовательность монотонна.

Выберем произвольную последовательность $\{\eta_i\}$, $\eta_i > 0$ и $\eta_i \to 0$ при $i \to \infty$. Для данного i по числу $\eta_i / 3$, согласно условию 2, определим число ξ_i, при котором для значений аргумента t, отличающихся на величину ξ_i, соответствующие значения функций из D_i будут отличаться в метрике ρ_i на величину $\eta_i / 3$. Выберем произвольную последовательность $\{\varepsilon_i\}$, $\varepsilon_i > 0$, $\varepsilon_i \geqslant \varepsilon_{i+1} \geqslant \ldots$, $\varepsilon_i \to 0$ при $i \to \infty$, $2\varepsilon_i \leqslant \min\{\xi_i, \eta_i / 3\}$.

Пусть Z_i — множество всех пар $(u, v) \in P(t_0, \vartheta]\, Q(t_0, \vartheta]$, таких, что функция $\psi: T \to X$, определенная соотношениями $\psi(t_0) = A_i x_{0i}$, $\psi(t) = A_i Y_i(t_0, x_{0i}, t, u(t_0, t], v(t_0, t])$, $t_0 < t \leqslant \vartheta$, обладает свойствами: существует $t_* \in T$, такое, что

$$\sigma(\{t_*, \psi(t_*)\}, M) \leqslant \alpha_i + \varepsilon_i$$
$$\sigma(\{\tau, \psi(\tau)\}, N) \leqslant \alpha_i + \varepsilon_i, \quad t_0 \leqslant \tau \leqslant t_*$$

Определим множества

$$M_i = \{\{t_*, x_i\} \mid x_i = Y_i(t_0, x_{0i}, t_*, u(t_0, t_*], v(t_0, t_*]) \text{ при } t_* > t_0 \text{ и } x_i = x_{0i} \text{ при } t_* = t_0\}$$
$$N_i = \{\{t, x_i\} \mid t_0 \leqslant t \leqslant t_*, \; x_i = Y_i(t_0, x_{0i}, t, u(t_0, t], v(t_0, t]) \text{ при } t > t_0 \text{ и } x_i = x_{0i} \text{ при } t = t_0\}$$
$$M_i^*(t) = M_1(t) \times \ldots \times M_i(t), \quad N_i^*(t) = N_1(t) \times \ldots \times N_i(t), \quad (u, v) \in Z_i$$

Условие 4. Для всякого номера i и $t \in T$ существует оператор $A_i^*(t): X \to X_i^*$ со свойствами:

1) существует число $\beta_i > 0$, такое, что для всех $t \in T$, x и y из X

$\rho\ (x,\ y) \geqslant \beta_i\ \rho_i^*\ (A_i^*\ (t)\ x,\ A_i^*\ (t)\ y)$

2) $A_i^*\ (t_0)\ x_0 = x_{0i}^*$ и для всех $t \in (t_0,\ \vartheta]$, $u \in P\ (t_0,\ \vartheta]$, $v \in Q\ (t_0,\ \vartheta]$

$A_i^*\ (t)\ Y\ (t_0,\ x_0,\ t,\ u\ (t_0,\ t],\ v\ (t_0,\ t]) = Y_i^*\ (t_0,\ x_{0i}^*,\ t,\ u\ (t_0,\ t],\ v\ (t_0,\ t])$

3) $A_i^*\ (t)\ M\ (t) \subseteq M_i^*\ (t)$, $A_i^*\ (t)\ N\ (t) \subseteq N_i^*\ (t)$, $t \in T$

Для системы Σ_i^* можем рассматривать аналоги задачи 1.1, 1.2 при множествах M_i^* и N_i^*, будем называть их задачей 1.1_i и задачей 1.2_i.

Теорема 2.1. Пусть заданы $\{t_0,\ x_0\}$, M, N, $\{t_0,\ x_{0i}\}$, $i = 1,\ 2, \ldots$. Тогда:

1) из условий 1—3 следует: задача 1.1 разрешима тогда и только тогда, когда для всякого достаточно большого i разрешима задача 1.1_i;

2) из условий 1—4 следует: для системы Σ либо разрешима задача 1.1, либо разрешима задача 1.2;

3) из условий 1—3 и утверждения пункта 2) следует: задача 1.2 разрешима тогда и только тогда, когда хотя бы при одном номере i разрешима задача 1.2_i.

Доказательство теоремы опирается на построение последовательности своеобразных функционалов Ляпунова λ_i: $t \times D\ (t) \times X_i^* \to [0,\ \infty)$, $i = 1,\ 2, \ldots$, [2–5]. Прежде чем указать стратегии, разрешающие задачи, введем некоторые дополнительные определения.

Обозначим через $F\ (t_1,\ x,\ t_2,\ y)$, где $t_0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \vartheta$, $x,\ y \in X$, множество всех пар $(u,\ v) \in P\ (t_1,\ t_2] \times Q\ (t_1,\ t_2]$, таких, что $Y\ (t_1,\ x,\ t_2,\ u,\ v) = y$.

Определим функционал $\lambda_i : \lambda_i\ (t_0,\ x_0,\ x_i^*) = \rho_i^*\ (x_{0i}^*,\ x_i^*)^2$ и при $t \in (t_0,\ \vartheta]$

$$\lambda_i\ (t,\ x,\ x_i^*) = \inf_{F(t_0,\ x_0,\ t,\ x)} \rho_i^*\ (Y_i^*,\ (t_0,\ x_{0i}^*,\ t,\ u,\ v),\ x_i^*)\ ^2$$

Из условия 3 следует: каковы бы ни были $t_1 < t_2$, $x \in D\ (t_1)$, $y_i^* \in D_i^*\ (t_1)$

$$\lambda_i\ (t_2,\ Y\ (t_1,\ x,\ t_2,\ u^*\ (u),\ v\ (v^*)),\ Y_i^*\ (t_1,\ y_i^*,\ t_2,\ u\ (u_*),$$
$$v_*\ (v))) \leqslant \lambda_i\ (t_1,\ x,\ y_i^*)\cdot e^{L_i\cdot(t_2-t_1)} + \mu_i\ (t_2 - t_1)\cdot(t_2 - t_1)$$

где действия u^*, v^*, u_*, v_* определяются из условия 3 при $x_i^* = Y_i^*\ (t_0,\ x_{0i}^*,\ t_1,\ u,\ v)$, $(u,\ v) \in F\ (t_0,\ x_0,\ t_1,\ x)$.

Экстремальной к последовательности множеств $\{W_i\}$, $W_i \subseteq T \times X_i^*$ назовем стратегию U, определенную следующим образом. Пусть

$$\varkappa\,(t, x) = \inf\left\{\frac{1}{i}\,|\,W_i\,(t) \neq \phi,\ \frac{1}{i} > (1 + \vartheta - t)\cdot\lambda_i\,(t,\ x,\ W_i\,(t))\cdot e^{L_i\cdot(\vartheta-t)}\right\}$$
$$\lambda_i\,(t,\ x,\ W_i\,(t)) = \inf_{z\in W_i(t)} \lambda_i\,(t,\ x,\ z)$$

Для тройки $\{t_1,\ t_2,\ x\}$, $t_1 < t_2$, $x \in D\ (t_1)$, такой, что функция $\varkappa\ (t_1,\ x)$ определена, положим:

1) $i_0 = i_0(t_1, t_2, x)$ — некоторый номер, такой, что

$$\varkappa(t_1, x) \leqslant \frac{1}{i_0} < \varkappa(t_1, x) + (t_2 - t_1)^2$$

$$\frac{1}{i_0} > (1 + \vartheta - t_1)\cdot\lambda_{i_0}(t_1, x, W_{i_0}(t_1))\cdot e^{L_{i_0}\cdot(\vartheta - t_1)}$$

2) $z = z(t_1, t_2, x)$ — элемент $W_{i_0}(t_1)$, такой, что

$$\lambda_{i_0}(t_1, x, z) \leqslant \lambda_{i_0}(t_1, x, W_{i_0}(t_1)) + \mu_{i_0}(t_2 - t_1)\cdot(t_2 - t_1)$$

3) $U(t_1, t_2, x)$ — экстремальное действие первого игрока, соответствующее набору $\{t_1, t_2, Y_{i_0}^*(t_0, x_{0i_0}^*, t_1, u, v), z\}$, $(u, v) \in F(t_0, x_0, t_1, x)$.

Для тройки $\{t_1, t_2, x\}$, $t_1 < t_2$, такой, что $x \notin D(t_1)$, либо функция $\varkappa(t_1, x)$ не определена, положим: $U(t_1, t_2, x)$ — произвольный элемент $P(t_1, t_2]$.

Аналогичным образом определяется экстремальная стратегия второго игрока.

Из условий 2, 3 для системы Σ_i^* следует альтернатива в игре, состоящей из задач 1.1_i, 1.2_i. Задача 1.1_i разрешима тогда и только тогда, когда

$$x_{0i}^* \in \bigcap_{\varepsilon > 0} Z_\varepsilon^i(t_0)$$

где Z_ε^i — множество позиционного ε-поглощения множества M_i^* внутри N_i^* [2–5]. Множество Z_ε^i (если оно непусто) есть u-стабильный мост системы Σ_i^* [2–5], содержащийся в $N_i^{*\varepsilon}$ (замкнутая ε-окрестность N_i^*) и упирающийся в $M_i^{*\varepsilon}$ (замкнутая ε-окрестность M_i^*). Доказательство этих утверждений основано на идеях работ [1–5].

Утверждение первой части теоремы 2.1 вытекает из следующего предложения.

Лемма 2.1. Пусть заданы $\{t_0, x_0\}$, M, N, $\{t_0, x_{0i}\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и выполнены условия 1—3. Пусть $W_i = \{\{t, x_i^*\} \mid, t \in T, x_i^* \in Z_{\varepsilon_i}^i(t) \bigcap D_i^*(t)\}$ и $x_{0i}^* \in W_i(t_0)$ при всех достаточно больших i. Тогда стратегия U, экстремальная к последовательности $\{W_i\}$, решает задачу 1.1. Если хотя бы при одном номере i разрешима задача 1.2_i, то задача 1.1 разрешимой быть не может.

Утверждение второй части теоремы 2.1 следует из утверждения первой части, условия 4 и того факта, что если при некотором i стратегия V_i^* разрешает задачу 1.2_i, то стратегия $V(t_1, t_2, x) = V_i^*(t_1, t_2, A_i^*(t_1)x)$ разрешает задачу 1.2.

Утверждение третьей части теоремы 2.1 следует из двух предыдущих.

3. Укажем один частный случай, когда можно обойтись без такого технического условия, как построение вспомогательных систем Σ_i^*. Он состоит в следующем: системы Σ_i имеют структуру систем Σ_i^*, т. е. существует последовательность управляемых динамических систем $\{\Sigma_{*i}\}$, такая, что каждая система Σ_i строится по $\Sigma_{*1}, \ldots, \Sigma_{*i}$, подобно тому, как Σ_i^* строилась по $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_i$.

Дело в том, что в этом случае достаточно просто сконструировать подходящий оператор $B_i : X_{i+1} \to X_i$, $i = 1, 2, \ldots$ со свойствами

$$\rho_i(B_i x_{i+1}, B_i y_{i+1}) \leqslant \rho_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$$

$$B_i Y_{i+1}(t_0, x_{0i+1}, t, u, v) = Y_i(t_0, x_{0i}, t, u, v)$$

Пример 3.1. Пусть система Σ описывается уравнением колебаний однородной струны с распределенными управляющими нагрузками

$$
\begin{aligned}
&z_{tt} = z_{\xi\xi} + b(\xi)\,u(t) + c(\xi)\,v(t) \\
&z(t, 0) = z(t, l) = 0, \quad t \in T, \quad 0 < \xi < l \\
&z(t_0, \xi) = z_0(\xi), \quad z_t(t_0, \xi) = z_1(\xi)
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

Пусть $b, c, z_1 \in L_2(0, l)$, $z_0 \in W_2^{01}(0, l)$ (определение пространств см., например, в [15]).

Тогда, следуя [4, 16], можно считать

$$X = W_2^{01}(0, l) \times L_2(0, l)$$

Допустимое действие u (v) первого (второго) игрока на $(t_1, t_2]$ — измеримая по Лебегу функция

$$u : (t_1, t_2] \to [-\mu, \mu] \; (v : (t_1, t_2] \to [-\nu, \nu])$$

$$Y(t_1, x, t_2, u, v) = \{z(t_2, \cdot; t_1, x, u, v), z_t(t_2, \cdot; t_1, x, u, v)\}$$

Здесь

$$z = z(t, \xi; \ldots), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \quad 0 < \xi < l$$

$$z_t = z_t(t, \xi; \ldots), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \quad 0 < \xi < l$$

— обобщенное решение задачи (3.1) [16] (где, естественно, следует положить $z(t_1, \cdot) = x^{(1)}$, $z_t(t_1, \cdot) = x^{(2)}$, $x = \{x^{(1)}, x^{(2)}\}$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$) и его обобщенная производная по t. Как показано в [16]

$$z \in C([t_1, t_2]; W_2^{01}(0, l)), \quad z_t \in C([t_1, t_2]; L_2(0, l))$$

Пусть $\{q_i, \omega_i\}$ — решение спектральной задачи

$$\omega_{\xi\xi} = -q\omega, \quad \omega(0) = \omega(l) = 0$$

Очевидно, $q_i = \pi^2 i^2 / l^2$, $\omega_i(\xi) = \sqrt{2/l}\sin(\pi i \xi / l)$, $i = 1, 2, \ldots$. Тогда можно положить

$$X_i = R^i \times R^i, \; Y_i(t_1, x_i, t_2, u, v) = \{z_i(t_2; t_1, x_i, u, v), z_i^{\cdot}(t_2; t_1, x_i, u, v)\}$$

где $z_i(\cdot; \ldots)$ — решение почти всюду системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&y_j^{\cdot\cdot} = -q_i y_j + \langle b, \omega_j \rangle u + \langle c, \omega_j \rangle v, \quad j = 1, \ldots, i \\
&y_j(t_1) = x_i^{1j}, \quad y_j^{\cdot}(t_1) = x_i^{2j}, \quad x_i = \{x_i^{(1)}, x_i^{(2)}\} \\
&x_i^{(1)} = \{x_i^{11}, \ldots, x_i^{1i}\}, \quad x_i^{(2)} = \{x_i^{21}, \ldots, x_i^{2i}\}
\end{aligned}
$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $L_2(0, l)$. Данный пример соответствует рассматриваемому частному случаю. Чтобы удовлетворить соответствующим аналогам условий 1—4, следует считать

$$x_{0i} = \{x_{0i}^{(1)}, \; x_{0i}^{(2)}\}, \quad x_{0i}^{1j} = \langle x_0^{(1)}, \omega_j \rangle, \quad x_{0i}^{2j} = \langle x_2^{(2)}, \omega_j \rangle$$

$$j = 1, \ldots i; \quad A_i x_i = \left\{ \sum_{j=1}^{i} x_i^{1j}\omega_j, \quad \sum_{j=1}^{i} x_i^{2j}\omega_j \right\}$$

$$\beta_i = 1, \; A_i^*(t)\, x = \{x_i^{(1)}, x_i^{(2)}\}$$

$$x_i^{1j} = \langle x^{(1)}, \omega_j \rangle, \quad x_i^{2j} = \langle x^{(2)}, \omega_j \rangle$$

Величины μ_i, L_i, u^*, v^*, u_*, v_* определяются как в [2], в качестве множеств M_i и N_i можно принять множества

$$M_i = \{\{t, x_i\} \mid t \in T, \; x_i = A_i^*(t)\, x, \; \{t, x\} \in M\}$$

$$N_i = \{\{t, x_i\} \mid t \in T, \; x_i = A_i^*(t)\, x, \; \{t, x\} \in N\}$$

Для более общего вида гиперболической системы [4] задача рассматривается аналогичным образом. В [6] рассматривалась параболическая система.

4. В заключение на примере задачи ε-сближения [1] покажем один из способов построения ε-стратегии

$$U^\varepsilon(t_1, t_2, x),\ t_0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \vartheta,\ x \in X,\ \varepsilon > 0$$

решающей эту задачу.

Задача ε-сближения. Пусть заданы $\{t_0, x_0\}$, M, N. Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найти ε-стратегию U^ε, обладающую свойством: найдется $\delta > 0$, такое, что для всякого $\varphi \in D(t_0, x_0, U^\varepsilon, \Delta)$, $d\Delta \leqslant \delta$ найдется $t \in T$, при котором справедливы (1.1), (1.2).

Условие 5. Пусть для некоторых множеств M_i, N_i, $i = 1, 2, \ldots$

$$\sigma_i(\{t, \psi_i(t)\}, M_i(N_i)) \to \sigma(\{t, \psi(t)\}, M(N))$$

при $i \to \infty$ равномерно по $t \in T$, $u \in P(t_0, \vartheta]$, $v \in Q(t_0, \vartheta]$

$$\psi_i(t_0) = x_{0i},\ \psi_i(t) = Y_i(t_0, x_{0i}, t, u(t_0, t], v(t_0, t])$$

$$\psi(t_0) = x_0,\ \psi(t) = Y(t_0, x_0, t, u(t_0, t], v(t_0, t]),\ t_0 < t \leqslant \vartheta$$

Условие 6. При всех достаточно больших i существует стратегия U_i (возможно, включающая в число аргументов вспомогательную переменную, формируемую в цепи управления, например переменную поводыря), которая обеспечивает решение задачи 1.1_i (для системы Σ_i при множествах M_i, N_i и начальной позиции $\{t_0, x_{0i}\}$), устойчивое по отношению к помехам в измерении состояния x_i.

Пусть $\xi_i = \xi_i(\varepsilon) > 0$ — величина допустимой помехи, соответствующая $\varepsilon > 0$ [2].

Условие 7. Пусть выполнено условие 6. Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, при всех достаточно больших i существует оператор $C_i : X \to X_i$, такой, что

$$\rho_i(C_i \psi(t), \psi_i(t)) \leqslant \xi_i(\varepsilon)$$

сразу для всех $t \in T$, $u \in P(t_0, \vartheta]$, $v \in Q(t_0, \vartheta]$.

Теорема 4.1. Пусть заданы $\{t_0, x_0\}$, M, N, $\{t_0, x_{0i}\}$, M_i, N_i, $i = 1, 2, \ldots$ и выполняются условия 5—7. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $i_* = i_*(\varepsilon)$, такой, что для всякого $i \geqslant i_*$ ε-стратегия

$$U^\varepsilon(t_1, t_2, x) = U_i(t_1, t_2, C_i x)$$

решает задачу ε-сближения.

Пример 4.1. Пусть система Σ описывается уравнением теплопроводности тонкого однородного стержня с распределенными управляющими воздействиями

$$z_t = z_{\xi\xi} + b(\xi)\,u(t) + c(\xi)\,v(t) \tag{4.1}$$

$$z(t, 0) = z(t, l) = 0,\ t \in T,\ 0 < \xi < l$$

$$z(t_0, \xi) = z_0(\xi)$$

Пусть b, c, $z_0 \in W_2^{01}(0, l)$. Тогда, следуя [4,15], можно считать: $X = W_2^{01}(0, l)$ с метрикой пространства $L_2(0, l)$; допустимое действие u (v) первого (второго) игрока на $(t_1, t_2]$ — измеримая по Лебегу функция

$$u : (t_1, t_2] \to [-\mu, \mu]\ (v : (t_1, t_2] \to [-\nu, \nu])$$

$$Y(t_1, x, t_2, u, v) = z(t_2, \cdot;\ t_1, x, u, v)$$

где $z = z(t, \xi; \ldots)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, $0 < \xi < l$ — обобщенное решение задачи (4.1) [15,16] (где, естественно, следует положить $z(t_1, \cdot) = x$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$). Как показано в [15,16], $z \in C([t_1, t_2];\ W_2^{01}(0, l))$.

Зададим на $[0, l]$ разностную сетку

$$\xi_k = kh, \quad k = 0, \ldots, i + 1, \quad h\,(i + 1) = l$$

Тогда можно положить: $X_i = R^i$ с метрикой

$$\rho_i\,(x_i, y_i) = \left(h \sum_{j=1}^{i} (x_i^j - y_i^j)^2\right)^{1/2}$$

$Y_i\,(t_1, x_i, t_2, u, v) = z_i\,(t_2; t_1, x_i, u, v)$, где $z_i\,(\cdot; \ldots)$ — решение почти всюду системы обыкновенных дифференциальных уравнений метода прямых

$$z_i^{j\cdot} = ((z_i^j)_{\xi})_{\bar{\xi}} + b\,(\xi_j)\,u + c\,(\xi_j)\,v, \quad j = 1, \ldots, i \tag{4.2}$$

$$z_i^j\,(t_1) = x_i^j, \quad x_i = \{x_i^1, \ldots, x_i^i\}$$

Пусть M и N — ограниченные множества из $T \times W_2^{01}\,(0, l)$. Для того чтобы удовлетворить условию 5, положим

$$M_i = \{\{t, x_i\} \mid t \in T, \; x_i = C_i x, \; \{t, x\} \in M\} \tag{4.3}$$

$$N_i = \{\{t, x_i\} \mid t \in T, \; x_i = C_i x, \; \{t, x\} \in N\}$$

$$C_i x = \{x\,(\xi_1), \ldots, x\,(\xi_i)\}$$

Очевидно, условию 6 удовлетворит процедура управления с поводырем, если $x_{0i} \in W_i\,(t_0)$, где W_i — множество позиционного поглощения системы (4.2) [2]. Наконец, отметим, что для данного $\varepsilon > 0$ величину $\xi_i\,(\varepsilon) > 0$ можно выбрать единой для всех i, и поэтому, учитывая сходимость решения задачи (4.2) к решению задачи (4.1), в качестве оператора C_i можно принять оператор (4.3).

Пусть для простоты фазовые ограничения отсутствуют и $M = M\,(\vartheta)$. Тогда, учитывая оценку скорости сходимости в условии 5 (порядка $\gamma \cdot h^{1/2}$) и оценку для рассогласования между движением и поводырем в условии 6, в теореме 4.1, примененной к данному случаю, можно взять

$$i \geqslant \gamma_1 / \varepsilon^2, \quad 0 < \delta < \gamma_2 \varepsilon / i^2$$

где γ, γ_1, γ_2 — положительные константы, явно определяемые по z_0, b, c, μ, ν и M.

В данном примере нетрудно удовлетворить условиям 1—3, где в качестве оператора A_i можно взять оператор полилинейной интерполяции, а условию 3 удовлетворить, как в [2]. Для системы (4.1) в игре, состоящей из задач 1.1, 1.2, справедлива альтернатива. Построения, проведенные в этом примере, можно распространить на некоторые классы гиперболических систем.

Автор благодарит Ю. С. Осипова за постановку задачи, внимание к работе и признателен А. В. Кряжимскому за полезные беседы.

Поступила 7 I 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* О дифференциальных эволюционных системах. ПММ, 1977, т. 41, вып. 5.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
3. *Осипов Ю. С.* К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами. Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 6.
4. *Осипов Ю. С., Кряжимский А. В., Охезин С. П.* Задачи управления в системах с распределенными параметрами. В кн.: Динамика управляемых систем. Новосибирск, «Наука», 1979.
5. *Кряжимский А. В.* К теории позиционных дифференциальных игр сближения — уклонения. Докл. АН СССР, 1978, т. 239, № 4.
6. *Короткий А. И., Осипов Ю. С.* Аппроксимация в задачах позиционного управления параболическими системами. ПММ, 1978, т. 42, вып. 4.
7. *Будак Б. М., Беркович Е. М., Соловьева Е. Н.* О сходимости разностных аппроксимаций для задач оптимального управления. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, т. 9, № 3.

8. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М., «Наука», 1965.
9. *Васильев Ф. П.* Лекции по методам решения экстремальных задач. М., Изд-во МГУ, 1974.
10. *Егоров А. И., Рафатов Р.* О приближенном решении одной задачи оптимального управления. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 4.
11. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., «Мир», 1972.
12. *Плотников В. И.* О сходимости конечно-мерных приближений (в задаче об оптимальном нагреве неоднородного тела произвольной формы). Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1968, т. 8, № 1.
13. *Daniel J. W.* On the convergence of a numerical method for optimal control problems. J. Opt. theory and Appl., 1969, vol. 4, No. 5.
14. *McKnight R. S., Borsarge W. E.* The Ritz — Galerkin procedure for parabolic control problems. SIAM J. Control, 1973, vol. 11, No. 3.
15. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., «Наука», 1967.
16. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М., «Наука», 1973.