

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1965.
4. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев, «Наукова думка», 1968.

УДК 539.3

К УЛУЧШЕНИЮ СХОДИМОСТИ МЕТОДА ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ

Г. С. Буланов, В. А. Шалдырван

(Донецк)

Рассматривается задача о напряженном состоянии короткого кругового цилиндра, боковая поверхность которого жестко закреплена, а плоские грани испытывают равномерное давление [1]. Решение пространственных задач при смешанных условиях на поверхности тела сопряжено, как правило, с серьезными проблемами, важнейшая из которых — медленная сходимость вычислительных алгоритмов.

Введем безразмерную цилиндрическую систему координат с осевой симметрией

$$r = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r_0}, \quad \zeta = \frac{z}{h_0} \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}, \quad h = \frac{h_0}{r_0} \right)$$

и выпишем исходную краевую задачу [1]

$$(1) \quad \begin{aligned} \nu_1 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} &= 0, \quad (\nu_1 = (1 - 2\nu)^{-1}) \\ \mathbf{T} &= 2\mu \left(\frac{\nu_1 - 1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{def} \mathbf{u} \right) \\ \mathbf{n}_\zeta \cdot \mathbf{T} &= -\mathbf{n}_\zeta \quad (0 \leq r \leq 1), \quad |\zeta| = 1, \quad \mathbf{n}_\zeta = (0, \operatorname{sign} \zeta) \end{aligned}$$

выделив для удобства условие жесткого заземления боковой поверхности

$$(2) \quad \mathbf{u} = 0 \quad (r = 1, |\zeta| \leq 1)$$

Здесь r_0 — радиус, $2h_0$ — высота цилиндра, ν — коэффициент Пуассона, μ — модуль сдвига, \mathbf{u} — вектор перемещений, \mathbf{T} — тензор напряжений.

Метод однородных решений А. И. Лурье [2,3] сопоставляет с дифференциальной системой (1–2) задачу выбора значений неопределенных коэффициентов в соотношениях

$$(3) \quad \begin{aligned} 2\mu u_r &= \left(\frac{\nu}{1+\nu} + \frac{a}{2\nu} \right) r + \\ &+ \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} D_p \left[\left(\frac{\sin \gamma_p}{\gamma_p} - \nu_1 \cos \gamma_p \right) \cos \gamma_p \zeta - \nu_1 \zeta \sin \gamma_p \sin \gamma_p \zeta \right] I_1 \left(\frac{\gamma_p}{h} r \right) \\ 2\mu W &= - \left(\frac{1}{1+\nu} + \frac{a}{1-\nu} \right) h \zeta + \\ &+ \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} D_p \left[\left(\frac{\nu_1 + 1}{\gamma_p} \sin \gamma_p + \nu_1 \cos \gamma_p \right) \sin \gamma_p \zeta - \right. \end{aligned}$$

$$-v_1 \zeta \sin \gamma_p \cos \gamma_p \zeta \Big] I_0 \left(\frac{\gamma_p}{h} r \right) \\ (\sin 2\gamma_p + 2\gamma_p = 0, \quad \operatorname{Re} \gamma_p > 0, \quad \operatorname{Im} \gamma_p > 0)$$

причем величину коэффициентов a , D_p следует определять только из условия (2), потому что уравнения (1) удовлетворяются тождественно, когда смещения точек цилиндра подчинены формулам (3).

Подстановка последних соотношений в граничное условие (2) приводит к функциональному уравнению относительно переменной ζ . Алгебраизации этого уравнения достигнем разложением по базису Фурье

$$(4) \quad 1, \cos \delta_m \zeta, \sin \delta_m \zeta; \quad \delta_m = m\pi, \quad m = 1, 2 \dots$$

получая в итоге линейную систему относительно искомых коэффициентов

$$(5) \quad \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} D_p \frac{\gamma_p \sin^2 \gamma_p}{(\gamma_p^2 - \delta_m^2)^2} [(v_1 - 1) \gamma_p^2 - (v_1 + 1) \delta_m^2] I_1 \left(\frac{\gamma_p}{h} \right) = 0 \\ (v_1 - 1)^2 \Sigma + \frac{v_1 + 1}{2h} \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} D_p \frac{\delta_m^2 \sin^2 \gamma_p}{(\gamma_p^2 - \delta_m^2)^2} \times \\ \times [(3v_1 + 1) \gamma_p^2 - (v_1 + 1) \delta_m^2] I_0 \left(\frac{\gamma_p}{h} \right) = -1 \\ a = -\frac{2v^2}{1+v} + \frac{4v^2}{1-2v} \Sigma, \quad \Sigma = \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} D_p \frac{\sin^2 \gamma_p}{\gamma_p} I_1 \left(\frac{\gamma_p}{h} \right), \quad m = 1, 2 \dots$$

Обычный прием получения приближенного решения поставленной задачи заключается в урезании разрешающей системы (5). Фигура 1 (верхняя сплошная линия) иллюстрирует зависимость невязки граничных условий

$$(6) \quad R = \max_{|\zeta| \leq 1} \{ |u_r(1, \zeta)|, |w(1, \zeta)| \}$$

от порядка урезанной системы K . Все числовые данные приведены для случая $v_1 = h = 2$, единицей длины служит r_0 , а единицей напряжений — 2μ . Очень медленная сходимость вычислительного процесса обусловлена в данном случае сингулярностью поля напряжений в окрестности линии раздела граничных условий [4,5], так как при любом значении K приближенное решение непрерывно во всей области, занятой другим цилиндром.

Интересно отметить, что последовательность приближенных решений качественно отражает характер поведения напряжений вблизи упомянутой линии. На фиг. 2 приведены эпюры σ_r на цилиндрической поверхности, вычисленные с разной точностью и представляющие типичную картину аппроксимации разрывной функции последовательностью непрерывных функций.

Для улучшения сходимости метода можно выделить главную часть решения, которая определяется асимптотическим поведением коэффициентов D_p . Следуя приему, предложенному в работе [6], представим коэффициенты с большим индексом в следующем виде:

$$(7) \quad D_p \sim D \gamma_p^\alpha / I_0(\gamma_p / h)$$

Для определения показателя асимптотики α получено уравнение с помощью ЭВМ. Фиксируя некоторое натуральное N , заменим в системе (5) коэффициенты с большим индексом по формуле (7) и оставим в рассмотрении первые $2N + 1$ уравнений. Затем, варьируя α , определяем каждый раз неизвестные a , D_p ($1 \leq p \leq N$), D и далее невязку R . На фиг. 1 штриховыми линиями изображены графики функции $R = R(\alpha, N)$.

Числовые исследования показали, что оптимальное значение α зависит только от коэффициента Пуассона. Сравнивая это значение с порядком особенности напряжений на ребре цилиндра [4, 5]

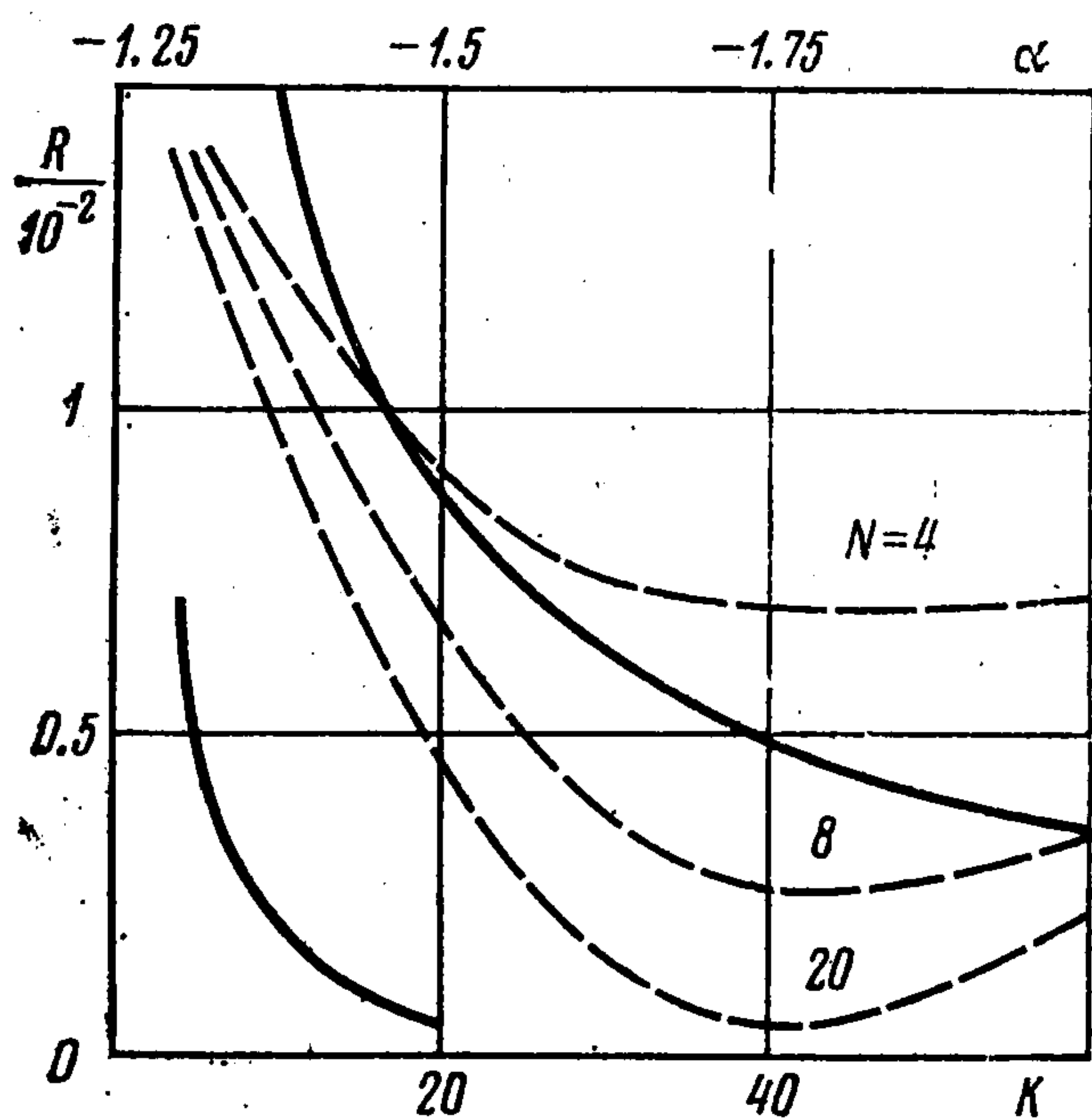
$$(8) \quad (3 - 4\nu) \sin^2 (q\pi / 2) + q^2 = 4 (1 - \nu)^2, \quad 0 < q < 1$$

устанавливаем важную формулу

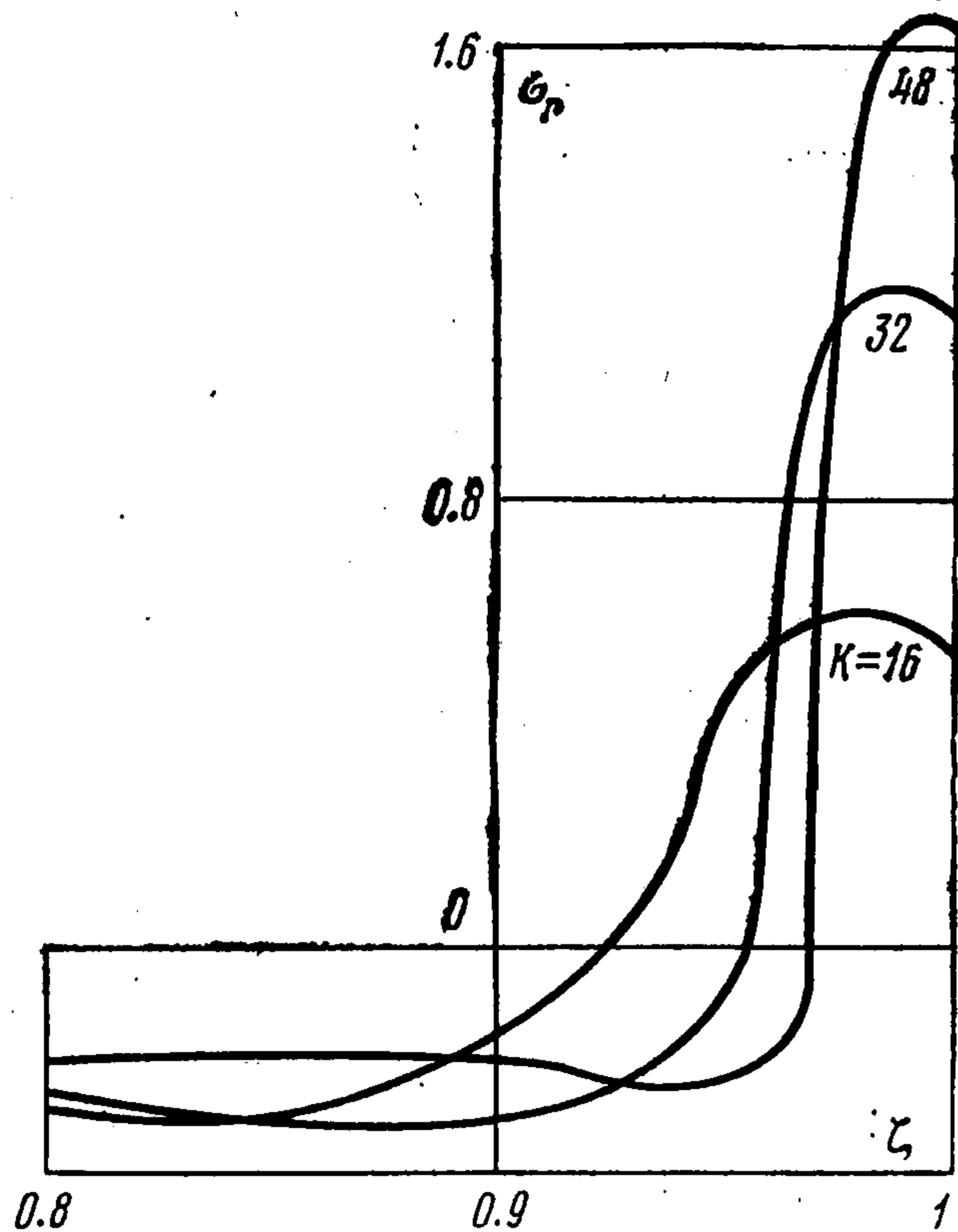
$$(9) \quad \alpha = -q - 1$$

Следовательно, показатель степени в формуле (7) удовлетворяет уравнению, получающемуся подстановкой (9) в (8), а величина коэффициента D определяется совместно с D_p ($p \leq N$) из разрешающей системы (5).

Предлагаемая методика позволяет существенно повысить скорость сходимости приближенных решений (нижняя сплошная кривая на фиг. 1). Для получения досто-



Фиг. 1



Фиг. 2

верных результатов численных расчетов следует еще оценить скорость сходимости рядов (3) при $r = 1$ (во внутренних точках сходимость лучше).

С этой целью вычислим остаточную сумму указанных рядов, удерживая в преобразованиях величины старшего порядка относительно p

$$G(n) = (u_r + iw)_{p \geq n} \sim \sim v_1 2^\zeta (1 - \zeta) D \sum_{p=n}^{\infty} \delta_p^{\alpha+(1+\zeta)/2} \exp \left[i\pi \frac{(4_p - 1)(1 - \zeta) + 6}{4} \right]$$

$$n \gg N, \quad 0 \leq \zeta \leq 1$$

Коэффициенты этого тригонометрического ряда монотонно убывают, следовательно, он сходится. Используя формулу сложения тригонометрических функций [6]

$$\sum_{j=1}^m \cos(b + jt) = \frac{\sin[b + (m + 0.5)t] - \sin[b + 0.5t]}{2 \sin(t/2)}$$

получим искомую оценку

$$G(n) < \frac{v_1 2^\zeta (1 - \zeta)}{\sin[\pi(1 - \zeta)/2]} |D| \delta_n^{\alpha+(1+\zeta)/2}$$

Скорость сходимости вычислительного процесса приобретает решающее значение при исследовании многосвязных моделей, потому что в этом случае резко возрастает расход оперативной памяти ЭВМ с увеличением номера приближения. Описанный методика очевидным образом обобщается для многосвязных областей.

Поступила 16 VII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Теория упругости. М., «Наука», 1970.
2. Космодамианский А. С., Шалдырван В. А. Толстые многосвязные пластины. Киев, «Наукова думка», 1978.
3. Лурье А. И. К теории толстых плит. ПММ, 1942, т. 6, вып. 2—3.
4. Аксентян О. К. Особенности напряженно-деформированного состояния в окрестности ребра. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
5. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев, «Наукова думка», 1978.
6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. М., «Наука», 1966.

Технический редактор З. В. Филиппова

Сдано в набор 23.07.80. Подписано к печати 11.09.80 Т-14046 Формат бумаги 70×103^{1/2}
Высокая печать Усл. печ. л. 16,8 Уч.-изд. л. 15,9 Бум. л. 6,0 Тираж 2694 экз. Зак. 3312

Издательство «Наука». 103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука», 121099, Москва, Шубинский пер., 10