

кривизны. Расчеты проводились при  $C_1 = -2^{-7} 3^{-3} 5^5$ ,  $C_2 = -0.09496$ . Чтобы указать область изменения параметров, найдем изображения осей  $x = 0$  и  $y = 0$  в плоскости  $p, q$ . Оси  $y = 0$  от  $x = +\infty$  до  $x_A > 0$  с условием  $v = 0$  соответствует часть оси  $q = 0$  от  $p = 0$  до  $p_0 = -(2/C_2)^{1/3}$ . Скорость в этой точке является характерной для данного набора  $C_1, C_2$ :

$$x_A = \frac{27}{20} C_1^2 (-C_2/2)^{5/3} \approx 0.0069$$

$$u_A = 1.5 C_1 (-C_2/2)^{2/3} \approx -0.1778$$

Вдоль данной части оси  $x > 0$  скорость всюду дозвуковая и возрастает до значения  $u_A$  в точке  $A$ . Из (4) видно, что прямая  $C_2 p_0^3 = -2$  переходит в оставшуюся часть оси  $y = 0$  от точки  $A$  до начала координат  $x = 0$  и далее в отрицательную полуось  $x$ . Вдоль этой части оси  $v \neq 0$ , а скорость  $u$  растет от дозвукового значения  $u_A$  до  $+\infty$  ( $q \rightarrow \infty$ ). Началу координат  $x = y = 0$  соответствует  $p = p_0$ ,  $q = (18/5)^{1/3} C_1^{-1/2} (-C_2/2)^{1/3}$ .

Линии тока, а также часть стенки после точки  $A$  получены интегрированием уравнения  $dy/dx = v$ .

Изолинии  $u = \text{const} > 0$  достаточно быстро приобретают прямолинейную форму, что хорошо видно на фиг. 2. Это иллюстрирует одно из свойств рассматриваемого решения, которое асимптотически переходит в волну разрежения Прандтля — Майера. Напомним, что это свойство было определяющим при нахождении трансзвукового течения вблизи угла.

Поступила 26.XI 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Vaglio-Laurin R.* Transonic rotational flow over a convex corner. *J. Fluid Mech.*, 1960, vol. 9, pt. 1.
2. Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа. Теоретическое и экспериментальное исследования. Под ред. Белоцерковского О. М., ВЦ АН СССР, 1967.
3. *Tomotika S., Tamada K.* Studies on two-dimensional transonic flows of compressible fluid. Pt. II. *Quart. Appl. Math.*, 1951, vol. 8, No. 2. (Рус. перев.: Механика. Период. сб. иностр. статей, 1951. № 6).
4. *Иванов В. А., Чернов И. А.* К вопросу о возникновении ударной волны внутри местной сверхзвуковой зоны. *ПММ*, 1979, т. 43, вып. 6.
5. *Фалькович С. В., Чернов И. А.* Алгебраические автомодельные решения уравнений околосзвукового плоского течения газа. *ПММ*, 1966, т. 30, вып. 5.

УДК 539.3

#### СИНГУЛЯРНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ВЫРЕЗА

В. Д. Кулиев

(Москва)

Рассматривается сингулярная задача теории упругости для полубесконечного прямоугольного выреза. Предполагается, что поверхности выреза свободны от напряжений, а на бесконечности реализуется упругая асимптотика для трещин нормального разрыва. Решение этой задачи строится методом Колосова — Мухелишвили.

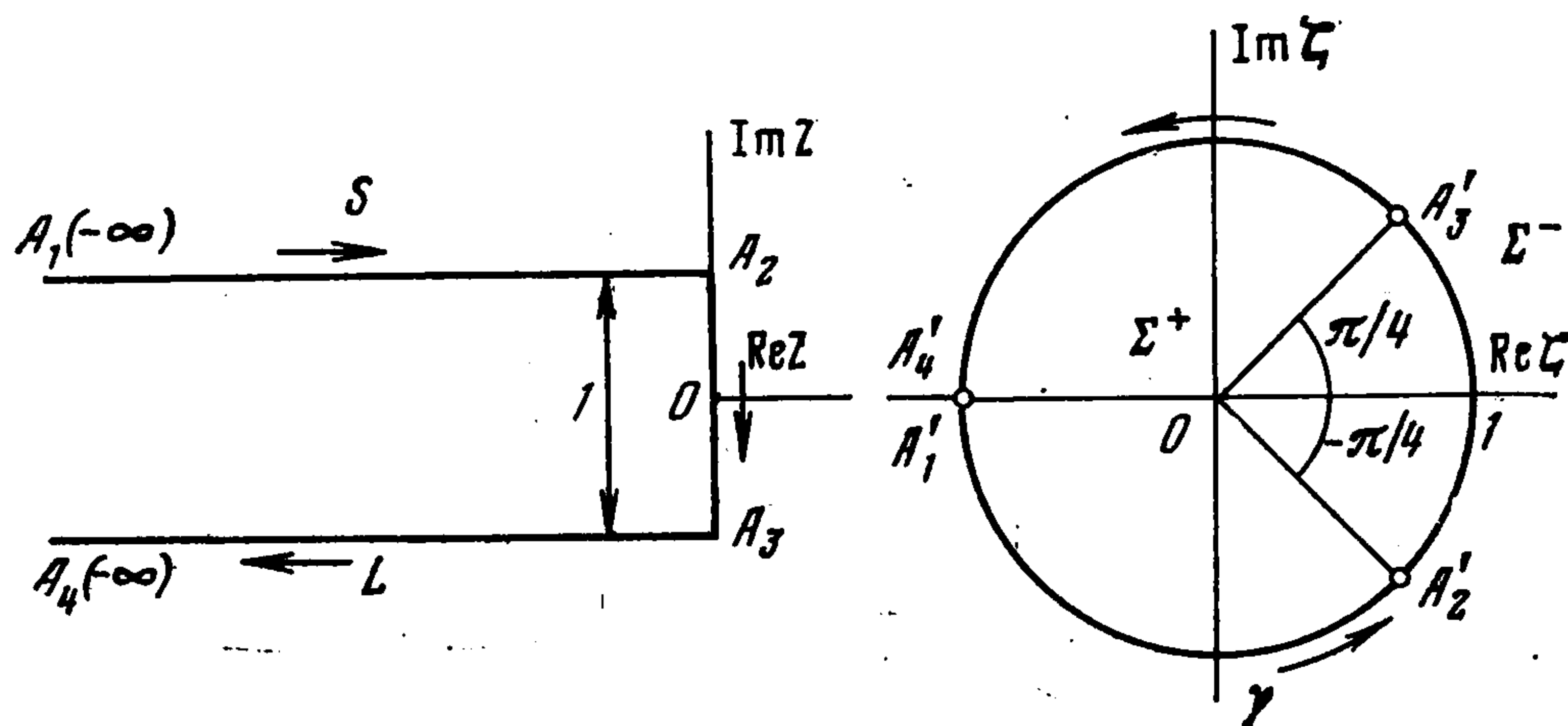
1. Рассмотрим следующую сингулярную задачу теории упругости:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \quad y = \pm 1/2, \quad x \leq 0 \\ \sigma_x = \tau_{xy} = 0, \quad |y| \leq 1/2, \quad x = 0 \\ \tau_{xy} = 0, \quad v = 0, \quad y = 0, \quad x > 0 \end{aligned}$$

$$(1.2) \quad \sigma_y = K_I / \sqrt{2\pi x}, \quad y = 0, \quad x \rightarrow \infty$$

Здесь  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  — компоненты тензора напряжений,  $u, v$  — компоненты вектора перемещений,  $K_I$  — коэффициент интенсивности напряжений для трещины нормального разрыва, определяющий поле напряжений и деформаций в бесконечно удаленной точке.

Эта краевая задача относится к классу  $N$ , в котором принцип Сен-Венана не выполняется и существует нетривиальное решение однородных задач (в отличие от классических задач теории упругости класса  $S$ , в котором принцип Сен-Венана справедлив и существует лишь тривиальное решение однородных задач). Общая теория этих



Фиг. 1

вопросов дана в гл. 3 книги [1] (показано, в частности, что классы  $S$  и  $N$  эквивалентны по мощности).

Граничное условие (1.1) можно записать так [2]:

$$(1.3) \quad \varphi_1(t) + t\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} = 0 \text{ на } L$$

Контур  $L$  показан на фиг. 1.

Функции  $\varphi_1(z), \psi_1(z)$  голоморфны в  $S$  и согласно (1.2)

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \varphi_1(z) = K_I \sqrt{z / (2\pi)}, \quad \Psi_1(z) = -z\varphi_1'(z) \quad (z \rightarrow \infty) \\ \Phi_1(z) = \varphi_1'(z), \quad \Psi_1(z) = \psi_1'(z), \quad z = x + iy \end{aligned}$$

Решение этой задачи будем строить методом конформных отображений.

2. Найдем функцию, отображающую внутренность единичного круга  $|\zeta| < 1$  плоскости  $\zeta$  на внешность полубесконечного прямоугольного выреза в плоскости  $z$  (фиг. 1). С помощью интеграла Кристоффеля—Шварца [3] получим

$$(2.1) \quad \begin{aligned} z = \omega(\zeta) = \frac{1}{\pi} [\text{Arsh } \xi + \xi \sqrt{\xi^2 + 1}] \\ \xi = (1 + \sqrt{2})(1 - \zeta) / (1 + \zeta) \end{aligned}$$

Разложим функцию  $z = \omega(\zeta)$  в ряд в окрестности  $\zeta = 0$

$$(2.2) \quad \omega(\zeta) = \frac{A}{(1 + \zeta)^2} \sum_{k=0}^{\infty} T_k \zeta^k$$

$$T_0 = B - 1/2, \quad T_1 = 2B, \quad T_2 = B + G_1 / 2$$

$$T_3 = G_1 + \frac{G_2}{3}, \quad T_k = \frac{G_{k-3}}{k-2} + 2 \frac{G_{k-2}}{k-1} + \frac{G_{k-1}}{k} \quad (k \geq 4)$$

$$B = C/A, \quad C = \pi^{-1} [\operatorname{Arsh}(1 + \sqrt{2}) - 2^{3/4} (1 + \sqrt{2})^{3/2}]$$

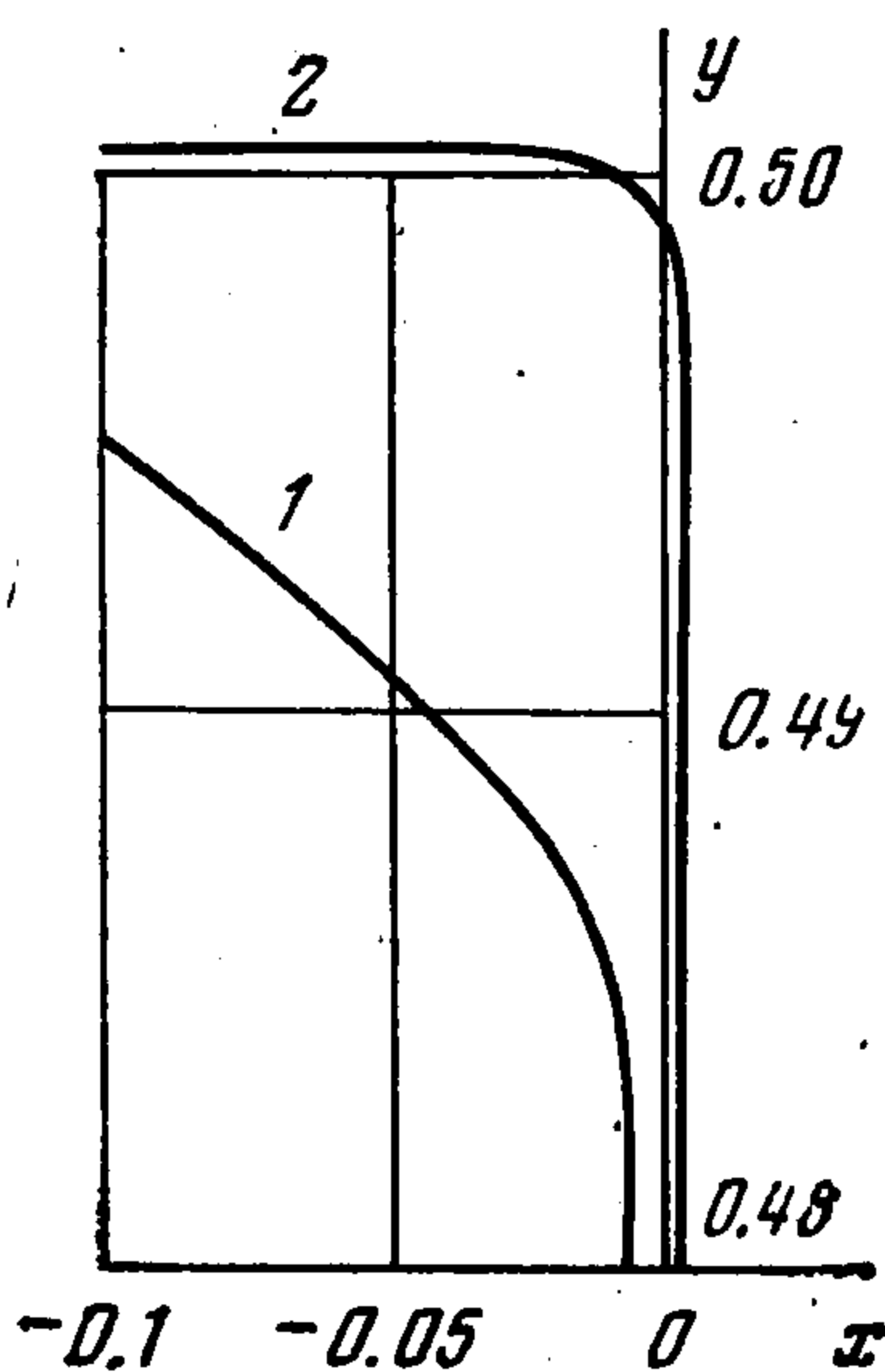
$$A = -\pi^{-1} 2^{3/4} (1 + \sqrt{2})^{3/2}, \quad G_k = P_k + Q_k$$

$$P_k = \sum_{m=0}^k A_m A_{k-m} \cos\left(\frac{k-2m}{4} \pi\right)$$

$$A_0 = 1, \quad A_k = \frac{2k-3}{2k} A_{k-1} \quad (k \geq 1)$$

$$Q_1 = 0, \quad Q_k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{k-1} (-1)^m (m+1)(m+2) P_{k-m} \quad (k \geq 2)$$

Используем далее подход Г. Н. Савина [4]. Отбросив в разложении (2.2) все члены начиная с  $T_{n+1} \zeta^{n+1}$ , получим вместо  $\omega(\zeta)$  некоторую функцию  $\omega_n(\zeta)$ . Функция  $\omega_n(\zeta)$  отображает внутренность единичного круга  $|\zeta| < 1$  не на заданную область  $S$ , а на близкую к ней область  $S_n$ , которая тем ближе к  $S$ , чем больше  $n$ . Таким образом, следуя Г. Н. Савину, функцию  $\omega(\zeta)$  представим в виде



Фиг. 2

$$\omega(\zeta) = \frac{A}{(1+\zeta)^2} \sum_{k=0}^n T_k \zeta^k$$

На фиг. 2 показаны [контуры выреза, соответствующие  $n = 10$  (кривая 1) и  $n = 50$  (кривая 2)].

3. Обозначим через  $\Sigma^+$  область  $|\zeta| < 1$ , а через  $\Sigma^-$  — область  $|\zeta| > 1$ . Окружность  $|\zeta| = 1$  обозначим через  $\gamma$ . Примем за положительное направление обхода  $\gamma$ , такое, при котором область  $\Sigma^+$  остается слева.

Граничное условие (1.3) после конформного отображения примет вид

$$(3.1) \quad \varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \bar{\varphi}'(\bar{\sigma}) + \bar{\psi}(\bar{\sigma}) = 0 \quad \text{на } \gamma$$

Функции  $\varphi(\zeta) = \varphi_1[\omega(\zeta)]$ ,  $\psi(\zeta) = \psi_1[\omega(\zeta)]$  голоморфны в  $\Sigma^+$  и, когда  $\zeta$  стремится (изнутри  $\gamma$ ) к точке  $-1$ , эти функции согласно (1.4), (2.1) ведут себя так:

$$(3.2) \quad \varphi(\zeta) = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{\pi(1+\zeta)} K_1, \quad \psi(\zeta) = \frac{1}{2} \varphi(\zeta) \quad (\zeta \rightarrow -1)$$

Функции  $\varphi(\zeta)$  и  $\psi(\zeta)$ , голоморфные в  $\Sigma^+$ , ищем в виде

$$(3.3) \quad \varphi(\zeta) = \frac{1}{1+\zeta} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k, \quad \psi(\zeta) = \frac{1}{1+\zeta} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \zeta^k$$

Умножая (3.1) на  $(\sigma+1)d\sigma / [2\pi i(\sigma-\zeta)]$  и интегрируя по  $\gamma$  ( $|\zeta| \neq 1$ ), получаем

$$(3.4) \quad I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(\sigma+1)\varphi(\sigma)}{\sigma-\zeta} d\sigma, \quad I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(\sigma+1)\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \bar{\varphi}'(\bar{\sigma}) \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$$

$$I_3 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(\sigma+1)\bar{\psi}(\bar{\sigma})}{\sigma-\zeta} d\sigma$$

Согласно теореме Гранака, соотношения (3.1) и (3.4) эквивалентны.

Рассмотрим интеграл  $I_2$ . Выражение

$$(\sigma + 1) \frac{\omega(\sigma)}{\bar{\omega}'(\sigma)} \bar{\varphi}'(\bar{\sigma}) = (\sigma + 1) \frac{\omega(\sigma)}{\bar{\omega}'(1/\bar{\sigma})} \bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

можно рассматривать как граничное значение функции

$$(3.5) \quad (\zeta + 1) \frac{\omega(\zeta)}{\bar{\omega}'(1/\zeta)} \bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

Функция (3.5) регулярна в  $\Sigma^-$  и непрерывна в  $\Sigma^- + \gamma$ , за исключением точки  $\zeta = \infty$ , где она имеет полюс порядка  $n - 1$ . Вид этой функции в  $\Sigma^-$  будет следующий:

$$(3.6) \quad \frac{(\zeta + 1) \omega(\zeta)}{\bar{\omega}'(1/\zeta)} \bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \zeta^k + O\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

$$M_k = \sum_{r=1}^{n-k} [(r-2) \bar{a}_{r-1} + r \bar{a}_r] b_{r+k}$$

$$b_n = T_n, \quad b_m = T_m - \sum_{k=1}^{n-m} \bar{\Gamma}_k b_{m+k}$$

$$m = (n-1), (n-2), (n-3), \dots, 0$$

$$\bar{\Gamma}_k = (k+1) \eta_k T_{k+1} + (k-2) T_k$$

$$\eta_k = \begin{cases} 1, & k \leq n-1 \\ 0, & k = n \end{cases}$$

где  $O(1/\zeta)$  — регулярная в  $\Sigma^-$  и обращающаяся в нуль на бесконечности часть функции (3.5).

Используя свойства интеграла Коши [2] и соотношение (3.6), имеем

$$(3.7) \quad I_2 = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} M_k \zeta^k, & \zeta \in \Sigma^+ \\ \sum_{k=0}^{n-1} M_k \zeta^k - \frac{(\zeta + 1) \omega(\zeta)}{\bar{\omega}'(1/\zeta)} \bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right), & \zeta \in \Sigma^- \end{cases}$$

Рассмотрим функции

$$\varphi_2(\zeta) = (\zeta + 1) \varphi(\zeta), \quad \bar{\psi}_2(1/\zeta) = (\zeta + 1) \bar{\psi}(1/\zeta)$$

Функция  $(\sigma + 1) \varphi(\sigma)$  представляет собой граничное значение функции  $\varphi_2(\zeta)$ , регулярной в  $\Sigma^+$  и непрерывной в  $\Sigma^+ + \gamma$ , а функция  $(\sigma + 1) \bar{\psi}(1/\sigma)$  — граничное значение функции  $\bar{\psi}_2(1/\zeta)$ , регулярной в  $\Sigma^-$  и непрерывной в  $\Sigma^- + \gamma$ .

Отсюда, используя свойства интеграла Коши, на основании (3.3) находим

$$(3.8) \quad I_1 = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^k, & (\zeta \in \Sigma^+) \\ 0, & (\zeta \in \Sigma^-) \end{cases}$$

$$I_3 = \begin{cases} \bar{c}_1, & (\zeta \in \Sigma^+) \\ \bar{c}_1 - (\zeta + 1) \bar{\psi}(1/\zeta), & (\zeta \in \Sigma^-) \end{cases}$$

По формулам (3.4), (3.7), (3.8) при  $\zeta \in \Sigma^+$  находим

$$(3.9) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k + \sum_{k=0}^{n-1} M_k \zeta^k + \bar{c}_1 = 0$$

Сравнивая коэффициенты при  $\zeta^k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) в обеих частях формулы (3.9),

приходим к линейной однородной алгебраической системе уравнений

$$(3.10) \quad \begin{aligned} a_0 + M_0 + \bar{c}_1 &= 0 \\ a_k + M_k &= 0 \quad (k = 1, 2, \dots, (n-1)), \quad a_m = 0 \quad (m \geq n) \end{aligned}$$

С другой стороны, согласно (3.2) и (3.3), при  $\zeta \rightarrow -1$  (изнутри  $\gamma$ ) находим еще одно соотношение для иско́мых постоянных

$$(3.11) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{\pi} K_I$$

Анализ системы уравнений (3.10), (3.11) показывает, что все иско́мые постоянные действительны. Таким образом, имеем систему  $n+1$  уравнений для определения  $n+1$  неизвестных действительных постоянных:  $c_1, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ . Системы уравнений (3.10), (3.11) можно записать так:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n-1} \{ & (-1)^m b_{k+1} + \gamma_{m-k} + q_{m-n+k} [\gamma_m^* (m-1) b_{m+1+k} + \\ & + m b_{m+k}] \} a_m = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{\pi} K_I b_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, (n-1) \\ a_0 &= a_1 + a_{n-1} / b_n, \quad c_1 = -M_0 - a_0 \\ \gamma_m^* &= \begin{cases} 0, & m = n-k \\ 1, & m \leq n-k-1 \end{cases}, \quad \gamma_{m-k} = \begin{cases} 1, & m = k \\ 0, & m \neq k \end{cases} \\ q_{m-n+k} &= \begin{cases} 1, & m \leq n-k \\ 0, & m > n-k \end{cases} \end{aligned}$$

При помощи формул (3.3), (3.10) функцию  $\varphi(\zeta)$  можно представить в виде

$$(3.12) \quad \varphi(\zeta) = \frac{1}{1+\zeta} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \zeta^k$$

Определим функцию  $\psi(\zeta)$ . На основании формул (3.4), (3.7), (3.8) находим

$$(3.13) \quad c_1 - (\zeta+1) \psi\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} M_k \zeta^k - \frac{(\zeta+1) \omega(\zeta)}{\omega'(1/\zeta)} \varphi'\left(\frac{1}{\zeta}\right) = 0$$

Согласно (3.9), (3.12), (3.13), окончательно находим функцию

$$\psi(\zeta) = -\frac{\omega(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \varphi'(\zeta) - \varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

Поле напряжений и смещений определяется при помощи формул Колосова—Мусхелишвили.

Ниже приведены значения напряжений, вычисленные с помощью ЭВМ в случае  $K_I = -1, n = 50$

$10^3 x$	17	174	244	272	279	307	371	399	406
$10^3 y$	835	619	418	241	0	678	444	220	0
$10^3 \sigma_y$	561	737	760	806	802	577	610	652	654
$10^3 \sigma_x$	245	442	344	134	086	396	378	266	232
$10^3 \tau_{xy}$	226	087	212	115	0	053	112	071	0

Рассмотренная задача находит применение при исследовании горного удара, при построении теории трещин конечной ширины, а также при исследовании прочности деталей машин с прямоугольными канавками.

Автор благодарен Г. П. Черепанову за постановку задачи.

Поступила 22 I 1979

## ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1965.
4. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев, «Наукова думка», 1968.

УДК 539.3

## К УЛУЧШЕНИЮ СХОДИМОСТИ МЕТОДА ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ

Г. С. Буланов, В. А. Шалдырван

(Донецк)

Рассматривается задача о напряженном состоянии короткого кругового цилиндра, боковая поверхность которого жестко закреплена, а плоские грани испытывают равномерное давление [1]. Решение пространственных задач при смешанных условиях на поверхности тела сопряжено, как правило, с серьезными проблемами, важнейшая из которых — медленная сходимость вычислительных алгоритмов.

Введем безразмерную цилиндрическую систему координат с осевой симметрией

$$r = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r_0}, \quad \zeta = \frac{z}{h_0} \quad \left( \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}, \quad h = \frac{h_0}{r_0} \right)$$

и выпишем исходную краевую задачу [1]

$$(1) \quad \begin{aligned} \nu_1 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} &= 0, \quad (\nu_1 = (1 - 2\nu)^{-1}) \\ \mathbf{T} &= 2\mu \left( \frac{\nu_1 - 1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{def} \mathbf{u} \right) \\ \mathbf{n}_\zeta \cdot \mathbf{T} &= -\mathbf{n}_\zeta \quad (0 \leq r \leq 1), \quad |\zeta| = 1, \quad \mathbf{n}_\zeta = (0, \operatorname{sign} \zeta) \end{aligned}$$

выделив для удобства условие жесткого заземления боковой поверхности

$$(2) \quad \mathbf{u} = 0 \quad (r = 1, |\zeta| \leq 1)$$

Здесь  $r_0$  — радиус,  $2h_0$  — высота цилиндра,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\mu$  — модуль сдвига,  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений,  $\mathbf{T}$  — тензор напряжений.

Метод однородных решений А. И. Лурье [2,3] сопоставляет с дифференциальной системой (1–2) задачу выбора значений неопределенных коэффициентов в соотношениях

$$(3) \quad \begin{aligned} 2\mu u_r &= \left( \frac{\nu}{1+\nu} + \frac{a}{2\nu} \right) r + \\ &+ \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} D_p \left[ \left( \frac{\sin \gamma_p}{\gamma_p} - \nu_1 \cos \gamma_p \right) \cos \gamma_p \zeta - \nu_1 \zeta \sin \gamma_p \sin \gamma_p \zeta \right] I_1 \left( \frac{\gamma_p}{h} r \right) \\ 2\mu W &= - \left( \frac{1}{1+\nu} + \frac{a}{1-\nu} \right) h \zeta + \\ &+ \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} D_p \left[ \left( \frac{\nu_1 + 1}{\gamma_p} \sin \gamma_p + \nu_1 \cos \gamma_p \right) \sin \gamma_p \zeta - \right. \end{aligned}$$