

находится из уравнения (8). При этом на части кривой L_1 следует задать дополнительные условия в соответствии с известными правилами постановки краевых задач для уравнений первого порядка.

Автор признателен О. А. Ладыженской и Л. В. Овсянникову за обсуждения вопросов, связанных с данной работой.

Поступила 14 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е. Об одной теореме существования гидродинамики. ПММ, 1956, т. 20, вып. 2.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1978.

УДК 533.6.011

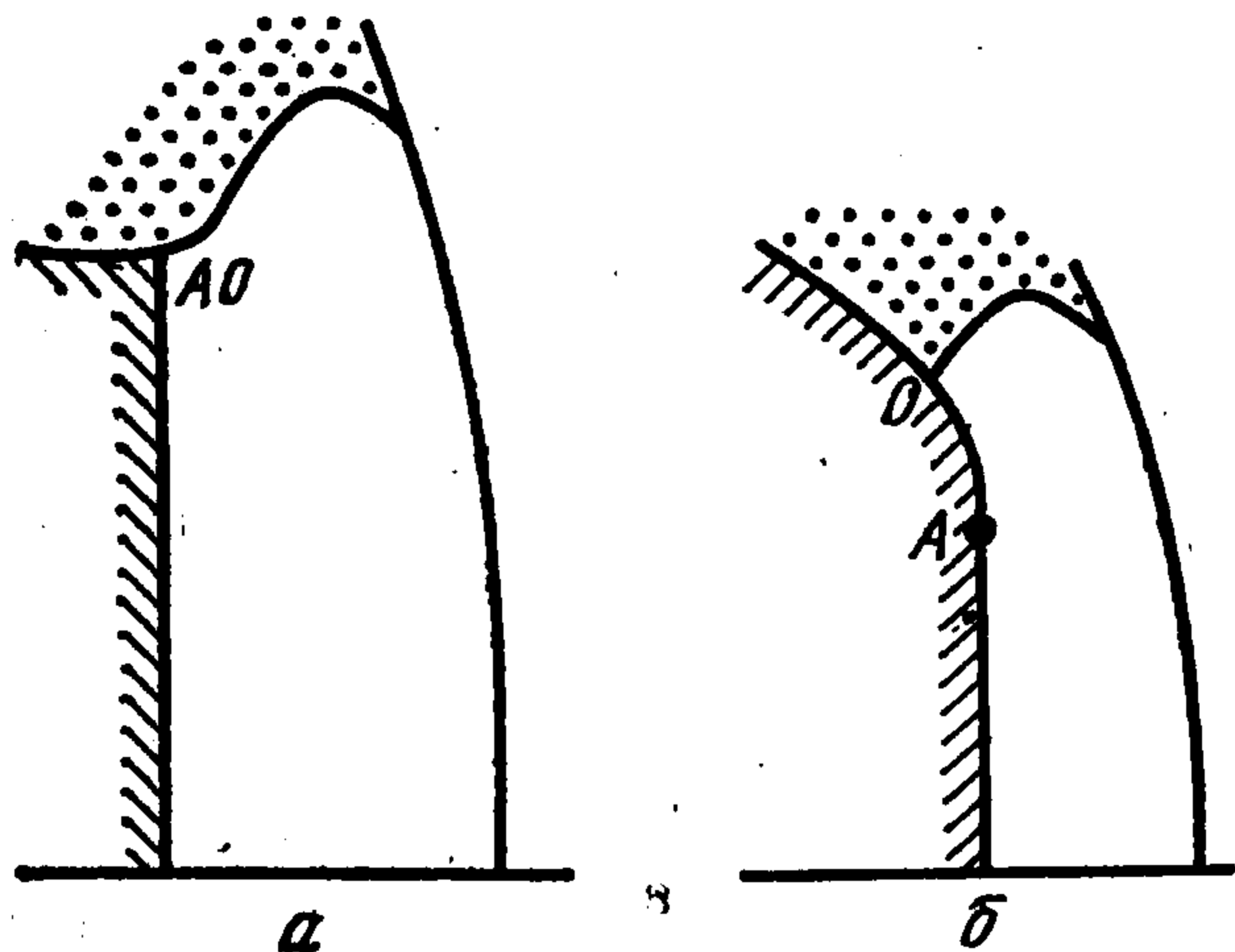
ПРИМЕР ТРАНСЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ТЕЛА С РАЗРЫВОМ КРИВИЗНЫ КОНТУРА

В. А. И в а н о в, И. А. Ч е р н о в

(Саратов)

Изучается точное решение трансзвуковых уравнений, которое является обобщением известного автомодельного решения, описывающего трансзвуковое течение около угловой точки контура тела.

В [1,2] проводилось теоретическое и численное изучение сверхзвукового обтекания затупленных тел, контур которых имеет излом или разрыв кривизны. На фиг. 1 схематически представлены типичные формы тела, ударной волны и звуковой линии для двух случаев: с изломом (а) и с разрывом кривизны (б).



Фиг. 1

В частности, было показано, что локальное течение вблизи угловой точки описывается трансзвуковыми уравнениями Кармана — Фальковича

$$(1) \quad uu_x = v_y, \quad u_y = v_x$$

где u, v — приведенные безразмерные компоненты скорости возмущения [однородного звукового потока, x, y — декартовы координаты локальной системы.

Если воспользоваться годографическим представлением, то можно записать

решение системы (1), справедливое в окрестности угловой точки AO , в виде

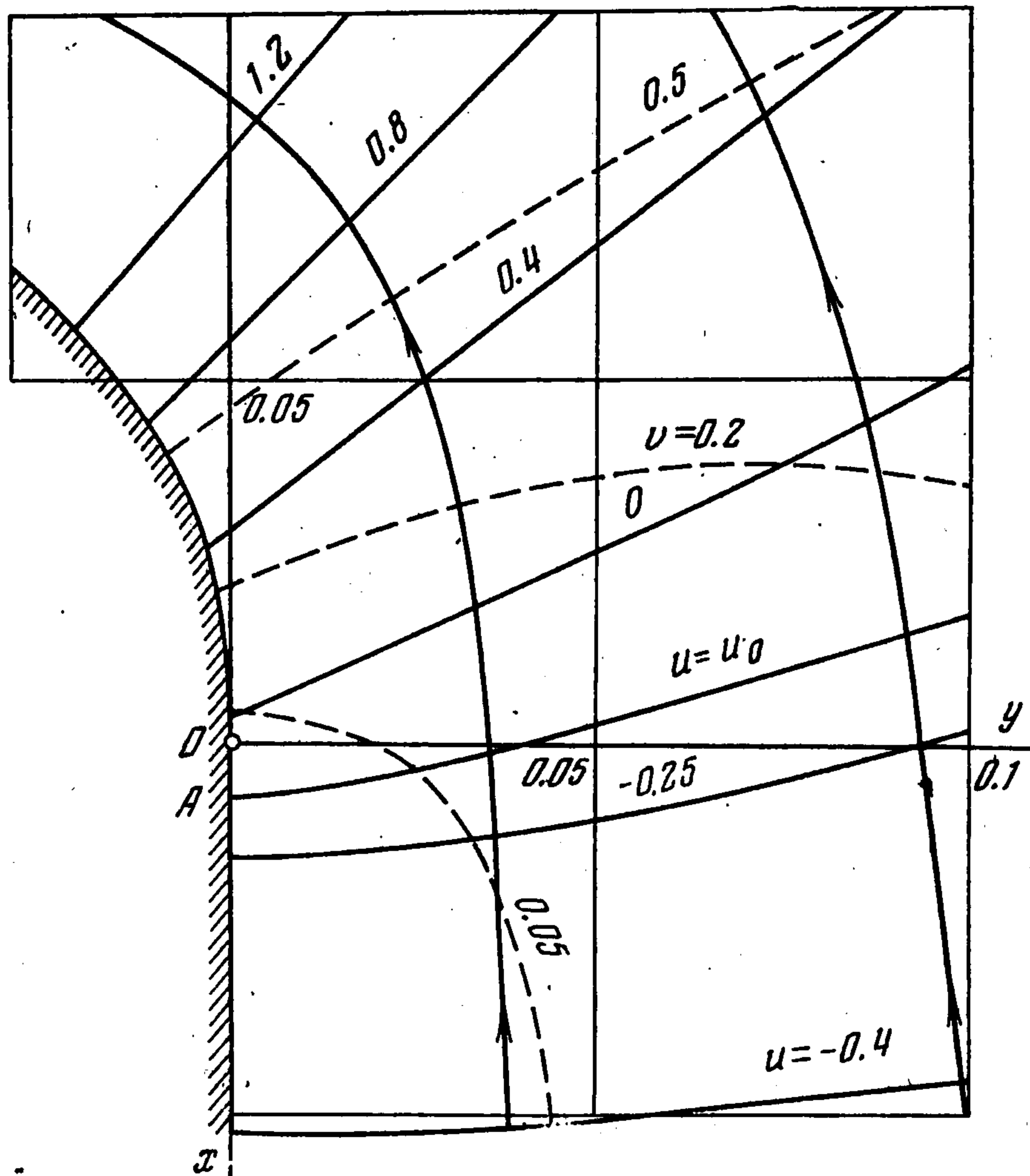
$$(2) \quad \begin{aligned} x &= \frac{4}{5} \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} K [(\rho - v)^{2/3} (3v + 2\rho) + (\rho + v)^{2/3} (2\rho - 3v)] \\ y &= K [(\rho + v)^{1/3} (3v - \rho) + (\rho - v)^{1/3} (3v + \rho)] \\ (\rho &= (v^2 - \frac{4}{9}u^3)^{1/2}) \end{aligned}$$

В [3] развит метод получения новых решений трансзвуковых уравнений, который состоит в том, что вводится комплексный аргумент $V = v + i\lambda$ (λ — действительная переменная) в годографическое решение вместо переменной v . Разделяя затем результат на действительную и мнимую части, получают два новых решения трансзвуковой системы. Применяя эту идею к (2), рассмотрим новое решение, которое, как и (2),

удовлетворяет условию симметрии ($y = 0$ при $v = 0$) на дозвуковой части контура тела ($u < 0$)

$$(3) \quad x_1 = \operatorname{Re} x(u, V); \quad y_1 = \operatorname{Re} y(u, V)$$

Можно получить действительное представление этого решения, если воспользоваться параметрической формой. Некоторые детали подобной параметризации приве-



Фиг. 2

дены в [4]. Если через p, q обозначить два действительных параметра, то решением системы (1), эквивалентным решению (3), будет

$$(4) \quad \begin{aligned} u &= \frac{C_1(1 - C_2 p^3)}{2p^2} - \frac{C_1^2 q^2}{4}, & v &= C_1^2 q \left(\frac{2 + C_2 p^3}{4p^2} - \frac{C_1 q^3}{12} \right) \\ x &= C_1^3 q^2 \frac{(4 - C_2 p^3)}{16p^3} + \frac{C_1^2}{40p^5} (10C_2^2 p^6 - 5C_2 p^3 + 4) \\ y &= C_1^2 q \frac{(2 + C_2 p^3)}{4p^3} \end{aligned}$$

Здесь C_1, C_2 — постоянные, связанные с K, λ из (3), зависимостями

$$\lambda = -C_2 (-C_1/2)^{3/2} 3^{1/2}, \quad K = 2^{28/3} 3^{2/3} 5^{-5}$$

При $C_2 = 0$ решение (4) описывает автомодельное решение, найденное в [5] для течения, изученного в [1],

$$\tau = -\frac{125}{48} + \frac{5}{2} t \pm \left(1 - \frac{16}{25} t \right)^{3/2}, \quad \left(t = u \left(\frac{y}{x} \right)^2, \quad \tau = v \left(\frac{y}{x} \right)^3 \right)$$

Звуковая линия и все изолинии $u = \text{const} > 0, v = \text{const} > 0$ сходятся в одну точку AO на фиг. 1, б. Это соответствует бесконечным значениям параметра p в (4).

На фиг. 2 показано поле скорости и линии тока в течении, которое реализуется вблизи прямолинейной стенки, сопряженной в точке A с некоторой линией конечной

кривизны. Расчеты проводились при $C_1 = -2^{-7} 3^{-3} 5^5$, $C_2 = -0.09496$. Чтобы указать область изменения параметров, найдем изображения осей $x = 0$ и $y = 0$ в плоскости p, q . Оси $y = 0$ от $x = +\infty$ до $x_A > 0$ с условием $v = 0$ соответствует часть оси $q = 0$ от $p = 0$ до $p_0 = -(2/C_2)^{1/3}$. Скорость в этой точке является характерной для данного набора C_1, C_2 :

$$x_A = \frac{27}{20} C_1^2 (-C_2/2)^{5/3} \approx 0.0069$$

$$u_A = 1.5 C_1 (-C_2/2)^{2/3} \approx -0.1778$$

Вдоль данной части оси $x > 0$ скорость всюду дозвуковая и возрастает до значения u_A в точке A . Из (4) видно, что прямая $C_2 p_0^3 = -2$ переходит в оставшуюся часть оси $y = 0$ от точки A до начала координат $x = 0$ и далее в отрицательную полуось x . Вдоль этой части оси $v \neq 0$, а скорость u растет от дозвукового значения u_A до $+\infty$ ($q \rightarrow \infty$). Началу координат $x = y = 0$ соответствует $p = p_0$, $q = (18/5)^{1/3} C_1^{-1/2} (-C_2/2)^{1/3}$.

Линии тока, а также часть стенки после точки A получены интегрированием уравнения $dy/dx = v$.

Изолинии $u = \text{const} > 0$ достаточно быстро приобретают прямолинейную форму, что хорошо видно на фиг. 2. Это иллюстрирует одно из свойств рассматриваемого решения, которое асимптотически переходит в волну разрежения Прандтля — Майера. Напомним, что это свойство было определяющим при нахождении трансзвукового течения вблизи угла.

Поступила 26.XI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vaglio-Laurin R.* Transonic rotational flow over a convex corner. *J. Fluid Mech.*, 1960, vol. 9, pt. 1.
2. Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа. Теоретическое и экспериментальное исследования. Под ред. Белоцерковского О. М., ВЦ АН СССР, 1967.
3. *Tomotika S., Tamada K.* Studies on two-dimensional transonic flows of compressible fluid. Pt. II. *Quart. Appl. Math.*, 1951, vol. 8, No. 2. (Рус. перев.: Механика. Период. сб. иностр. статей, 1951. № 6).
4. *Иванов В. А., Чернов И. А.* К вопросу о возникновении ударной волны внутри местной сверхзвуковой зоны. *ПММ*, 1979, т. 43, вып. 6.
5. *Фалькович С. В., Чернов И. А.* Алгебраические автомодельные решения уравнений околосзвукового плоского течения газа. *ПММ*, 1966, т. 30, вып. 5.

УДК 539.3

СИНГУЛЯРНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ВЫРЕЗА

В. Д. Кулиев

(Москва)

Рассматривается сингулярная задача теории упругости для полубесконечного прямоугольного выреза. Предполагается, что поверхности выреза свободны от напряжений, а на бесконечности реализуется упругая асимптотика для трещин нормального разрыва. Решение этой задачи строится методом Колосова — Мухелишвили.