9. *Hopf E.* The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. Comm. Pure Appl. Math., 1950, vol. 3, No. 3, p. 201—230.
10. *Benton E. R., Platzman G. W.* A table of solutions of the onedimensional Burgers equation, Quart. Appl. Math., 1972, vol. 30, No. 2.
11. *Коробейников В. П.* Задачи теории точечного взрыва в газах. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1973, т. 119.
12. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны, М., «Мир», 1977.

УДК 532.5

ЗАМЕЧАНИЕ К ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ ПРОТЕКАНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

А. В. Кажихов

(Новосибирск)

Рассматривается задача о протекании идеальной несжимаемой жидкости через ограниченную область пространства. Показано, что для однозначного построения локального решения уравнений Эйлера достаточно на всей границе области течения задать нормальную составляющую вектора скорости, а на участке втекания — дополнительно две касательные компоненты вектора вихря.

Данная заметка служит дополнением к работе [1], в которой предложена постановка задачи протекания идеальной жидкости, когда на участке втекания наряду с нормальной составляющей вектора скорости задаются три компоненты вектора вихря.

Пусть, как в [1], V — односвязная ограниченная область течения с границей S цилиндрического вида, состоящей из трех частей: боковой поверхности S_0, входа S_1 и выхода S_2. Через $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ обозначим декартовы координаты точек V, t — время, $t \in [0, T]$, $0 < T < \infty$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ — вектор скорости, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — вектор вихря скорости. Предполагаем, что S_i $(i = 0, 1, 2)$ — поверхности класса $C^{2+\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ и сопряжение S_0 с S_1 и S_2 происходит по кривым L_1 и L_2 под прямым углом. Рассмотрим уравнения Эйлера идеальной жидкости, записанные в терминах вихря (см. [2], гл. III, § 19)

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \mathbf{f} \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}, \ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

В начальный момент $t = 0$ считается известным поле скоростей, на границе S области V задана нормальная составляющая скорости

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \ t = 0, \ \mathbf{x} \in V, \ \operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0 \tag{2}$$

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) = 0 \text{ на } S_0 \tag{3}$$

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) = g_1 > 0 \text{ на } S_1, \ (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) = g_2 < 0 \text{ на } S_2$$

Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор внутренней нормали к S, g_1 и g_2 — заданные соответственно на S_1 и S_2 функции.

Дополнительно к условиям (3) в работе [1] на участке S_1 задавался вектор $\boldsymbol{\omega}$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t), \ \mathbf{x} \in S_1$$

Покажем, что задание всех трех компонент вихря $\boldsymbol{\omega}$ приводит к переопределенной краевой задаче. Для простоты будем считать, что S_1 — плоское сечение, перпендикулярное оси x_1. Возьмем в качестве примера следующие граничные данные на S_1:

$$v_1 = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) \equiv 1, \ \omega_1 = (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n}) \equiv 0 \text{ на } S_1$$

Тогда из первого уравнения системы (1) находим

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1}=f_1 \text{ на } S_1$$

С другой стороны, поскольку $\boldsymbol{\omega}=\operatorname{rot}\mathbf{v}$, то $\operatorname{div}\boldsymbol{\omega}=0$. Следовательно,

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1}=-\frac{\partial h_2}{\partial x_2}-\frac{\partial h_3}{\partial x_3}$$

Значит, вектор $\mathbf{h}$ не может быть произвольным.

Переопределенность задачи приводит к неточности в доказательстве теоремы существования в [1]: при использовании метода последовательных приближений не обеспечивается выполнение равенства $\operatorname{div}\boldsymbol{\omega}=0$ на каждом шаге итераций.

Оказывается, что для корректной постановки достаточно задать на S_1 только касательные компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$, т. е.

$$(\mathbf{w}\cdot\boldsymbol{\tau}_i)=h_i(x,t),\quad \mathbf{x}\in S_1,\quad i=2,3 \tag{4}$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}_i$ — касательные к S_1 линейно-независимые векторы. Для доказательства существования решения можно применить такую же схему метода итераций, что и в [1]: в качестве нулевого приближения берутся начальные данные, а при отыскании k-го приближения решается линейная система уравнений

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}^k}{\partial t}+(\mathbf{v}^{k-1}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{\omega}^k-(\boldsymbol{\omega}^k\cdot\nabla)\,\mathbf{v}^{k-1}=\mathbf{f} \tag{5}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}^k=\boldsymbol{\omega}^k,\ \operatorname{div}\mathbf{v}^k=0 \tag{6}$$

с начальными и граничными условиями (2)—(4). При этом предполагается, что заданные функции обладают следующими свойствами гладкости:

$$\mathbf{f}\in C^{1+\alpha}(Q),\quad Q=V\times(0,T),\ \operatorname{div}\mathbf{f}=0,\ \mathbf{v}_0\in C^{2+\alpha}(V)$$
$$g_i\in C^{2+\alpha,1+\alpha}(S_i{}^T),\ i=1,2,\ h_j\in C^{1+\alpha}(S_1{}^T),\ j=2,3$$
$$S_m{}^T=S_m\times(0,T),\quad m=0,1,2$$

удовлетворяют условиям согласования, а решение понимается в классическом смысле, т. е.

$$\mathbf{v}\in C^{2+\alpha,1+\alpha}(Q),\quad \boldsymbol{\omega}\in C^{1+\alpha}(Q)$$

Для определения вектора $\boldsymbol{\omega}^k$ из уравнений первого порядка (5) нужно знать граничные данные на S_1, в том числе и значения нормальной составляющей $(\boldsymbol{\omega}^k\cdot\mathbf{n})$. Для отыскания $\mathbf{v}^k$ по вектору $\boldsymbol{\omega}^k$ и условиям (3) необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{div}\boldsymbol{\omega}^k=0$. Следовательно, при построении поля вихря $\boldsymbol{\omega}^k$ необходимо решать переопределенную систему, состоящую из уравнений (5) и уравнения $\operatorname{div}\boldsymbol{\omega}^k=0$.

Особенность данной системы состоит в том, что на любой гладкой гиперповерхности Γ в пространстве R^4 переменных $(\mathbf{x},t)$ имеется связь между производными от компонент вектора $\boldsymbol{\omega}^k$, взятыми вдоль Γ. Действительно, введем на Γ локальную систему координат $\sigma_i=\sigma_i(\mathbf{x},t)$, $i=0,1,2,3$, направив ось σ_0 по нормали к Γ. Тогда из уравнений (5), умножая их скалярно на $\nabla\sigma_0$, имеем

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}^k}{dt}\cdot\nabla\sigma_0\right)=((\mathbf{f}+(\boldsymbol{\omega}^k\cdot\nabla)\,\mathbf{v}^{k-1})\cdot\nabla\sigma_0)$$
$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{v}^{k-1}\cdot\nabla)$$

Запишем это равенство в переменных σ, используя уравнение $\operatorname{div}\boldsymbol{\omega}^k=0$, которое в новых координатах имеет вид

$$\left(\frac{\partial\boldsymbol{\omega}^k}{\partial\sigma_0}\cdot\nabla\sigma_0\right)=-\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\boldsymbol{\omega}^k}{\partial\sigma_i}\cdot\nabla\sigma_i\right)$$

Тогда придем к соотношению

$$(7)\qquad \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\omega^k}{\partial\sigma_i}\left(\frac{d\sigma_i}{dt}\nabla\sigma_0-\frac{d\sigma_0}{dt}\nabla\sigma_i\right)=((\mathbf{f}+(\omega^k\cdot\nabla)\,\mathbf{v}^{k-1})\cdot\nabla\sigma_0)$$

которое содержит производные от ω^k только по касательным к Γ направлениям σ_i ($i = 1, 2, 3$). Таким образом, если на Γ заданы две из трех компонент вектора ω^k, то третья должна определяться из уравнения (7). Если Γ — участок втекания $S_1{}^T$, то можно взять $\sigma_i = \sigma_i(\mathbf{x})$ ($i = 0, 1, 2$), $\sigma_3 = t$. Тогда $\nabla\sigma_0 = \mathbf{n}$ и формула (7) принимает вид

$$(8)\qquad \frac{\partial\omega_n^k}{\partial t}+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial\sigma_i}(\omega_n^k v_{\sigma_i}^{k-1}-v_n^{k-1}\omega_{\sigma_i}^k)+\left((v_n^{k-1}\omega^k-\omega_n{}^k\mathbf{v}^{k-1})\cdot\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\nabla\sigma_i}{\partial\sigma_i}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\left((\omega_{\sigma_i}^k\mathbf{v}^{k-1}-v_{\sigma_i}^{k-1}\omega^k)\cdot\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\sigma_i}\right)=f_n$$

Здесь введены следующие обозначения: если $\mathbf{u}$ есть ω^k, $\mathbf{v}^{k-1}$ или $\mathbf{f}$, то

$$u_n = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}),\quad u_{\sigma_i} = (\mathbf{u}\cdot\nabla\sigma_i),\quad i = 1, 2$$

Поскольку на S_1 известны значения касательных компонент вектора ω^k, уравнение (8) позволяет определить нормальную составляющую $\omega_n{}^k = h_1{}^k$. Отметим, что граница L_1 сечения S_1 — характеристика уравнения (8) и дополнительных условий на L_1 задавать не нужно, т. е. решение выстраивается только по начальным данным. После нахождения $h_1{}^k$ определяется вектор ω^k во всей области течения $Q = V\times(0, T)$. При этом в качестве граничных данных на S_1 для компоненты $(\omega^k\cdot\mathbf{n})$ берется найденная функция $h_1{}^k$.

При таком построении гарантируется выполнение равенства $\operatorname{div}\omega^k = 0$ в Q. Действительно, применяя операцию дивергенции к уравнениям (5) для ω^k, получим, что скалярная функция $\operatorname{div}\omega^k$ удовлетворяет линейному однородному уравнению

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{div}\omega^k)=0$$

поскольку $\operatorname{div}\mathbf{f} = 0$. Из начальных данных имеем $\operatorname{div}\omega^k = 0$ при $t = 0$. На границе S_1, где $(\omega^k\cdot\mathbf{n}) = h_1{}^k$, из уравнений (5) и (8) выводим: $\operatorname{div}\omega^k = 0$ на S_1. Следовательно, $\operatorname{div}\omega^k\equiv 0$ в Q. По найденному ω^k однозначно находится вектор $\mathbf{v}^k$ из (3), (6).

Таким образом, если на участке втекания заданы касательные компоненты вихря ω, то дополнительно к [1] в метод доказательства существования решения задачи (1)—(4) вносится еще один этап, связанный с нахождением граничных значений нормальной составляющей вихря на участке S_1 из уравнения (8). Все технические выкладки при получении априорных оценок, в том числе и для решения уравнения (8), осуществляются так же, как в [1]. Единственность решения задачи (1)—(4) показывается обычным способом составления однородной линейной задачи для разности двух возможных различных решений и применением таких же оценок, что и в теореме существования.

В заключение отметим, что возможны постановки задач для уравнений (1), отличные от (2)—(4). Например, можно задать на S_1 нормальные составляющие векторов ω и $\operatorname{rot}\omega$. Задание $(\operatorname{rot}\omega\cdot\mathbf{n})$ вместе с соотношением (8) дает эллиптическую систему уравнений первого порядка для касательных компонент ω_{σ_i} ($i = 1, 2$) вихря ω. Из условий согласования на линии L_1 сопряжения участков S_1 и S_0 получается краевая задача типа задачи Римана — Гильберта для ω_{σ_1} и ω_{σ_2}. Наконец, если на S_1 известны нормальная и одна из касательных составляющих вихря ω, то вторая касательная компонента находится из уравнения (8). При этом на части кривой L_1 следует задать дополнительные условия в соответствии с известными правилами постановки краевых задач для уравнений первого порядка.

Автор признателен О. А. Ладыженской и Л. В. Овсянникову за обсуждения вопросов, связанных с данной работой.

Поступила 14 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочин Н. Е.* Об одной теореме существования гидродинамики. ПММ, 1956, т. 20, вып. 2.
2. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1978.

УДК 533.6.011

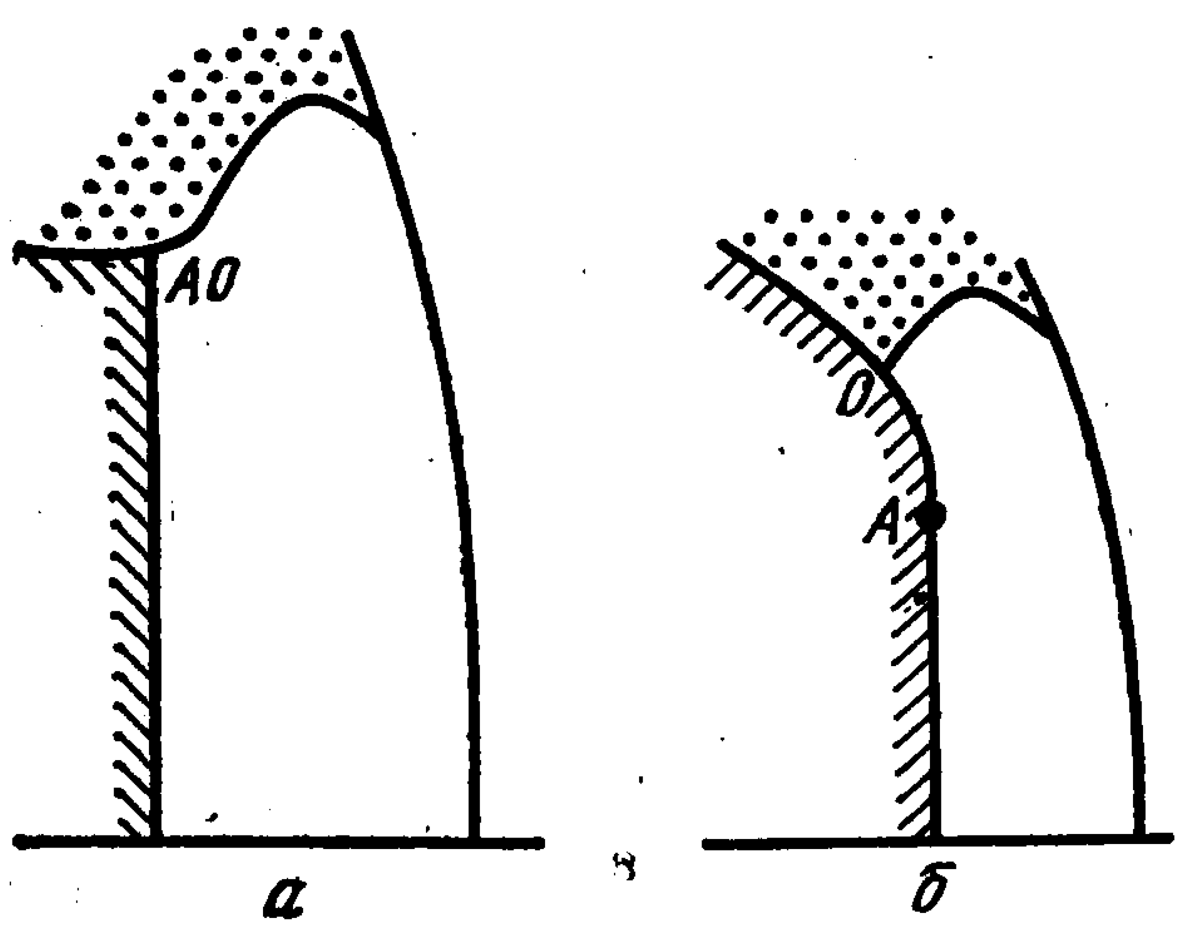
ПРИМЕР ТРАНСЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ТЕЛА С РАЗРЫВОМ КРИВИЗНЫ КОНТУРА

В. А. Иванов, И. А. Чернов

(Саратов)

Изучается точное решение трансзвуковых уравнений, которое является обобщением известного автомодельного решения, описывающего трансзвуковое течение около угловой точки контура тела.

В [1,2] проводилось теоретическое и численное изучение сверхзвукового обтекания затупленных тел, контур которых имеет излом или разрыв кривизны. На фиг. 1 схематически представлены типичные формы тела, ударной волны и звуковой линии для двух случаев: с изломом (*а*) и с разрывом кривизны (*б*). В частности, было показано, что локальное течение вблизи угловой точки описывается трансзвуковыми уравнениями Кармана — Фальковича



Фиг. 1

$$uu_x = v_y, \quad u_y = v_x \tag{1}$$

где u, v — приведенные безразмерные компоненты скорости возмущения однородного звукового потока, x, y — декартовы координаты локальной системы.

Если воспользоваться годографическим представлением, то можно записать решение системы (1), справедливое в окрестности угловой точки AO, в виде

$$\begin{aligned} x &= {}^4/_5\,({}^3/_2)^{1/3} K\,[(\rho - v)^{2/3}\,(3v + 2\rho) + (\rho + v)^{2/3}\,(2\rho - 3v)] \\ y &= K\,[(\rho + v)^{1/3}\,(3v - \rho) + (\rho - v)^{1/3}\,(3v + \rho)] \\ &(\rho = (v^2 - {}^4/_9 u^3)^{1/2}) \end{aligned} \tag{2}$$

В [3] развит метод получения новых решений трансзвуковых уравнений, который состоит в том, что вводится комплексный аргумент $V = v + i\lambda$ (λ — действительная переменная) в годографическое решение вместо переменной v. Разделяя затем результат на действительную и мнимую части, получают два новых решения трансзвуковой системы. Применяя эту идею к (2), рассмотрим новое решение, которое, как и (2),