3. *Dulac H.* Sur les cycles limites. Bull. Soc. Math. France, 1923, vol. 51, p. 144.
4. *Нейштадт А. И.* Бифуркации фазового портрета одной системы уравнений, возникающей в задаче о потере устойчивости автоколебаний вблизи резонанса 1 : 4. ПММ, 1978, т. 42, вып. 5.
5. *Балабаев Н. К., Луневская Л. В.* Движение по кривой в n-мерном пространстве. Алгоритмы и программы на ФОРТРАНе. Материалы по математическому обеспечению ЭВМ, вып. 1. Пущино, 1978.
6. *Березовская Ф. С., Крейцер Г. П.* Избранные алгоритмы и программы для ЭВМ МИР-2. Сложные особые точки системы двух дифференциальных уравнений. Пущино, 1975.
7. *Апонин Ю. М., Апонина Е. А.* Избранные программы и алгоритмы для ЭВМ МИР-2. Сепаратрисы системы двух дифференциальных уравнений. Пущино, 1976.
8. Математическое обеспечение ЕС ЭВМ, вып. 2. Пакет научных подпрограмм. Минск, Изд-е Ин-та матем. АН БССР, 1973.

УДК 532.5

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА — ДЕ ВРИЗА — БЮРГЕРСА

Н. С. Захаров, В. П. Коробейников

(Москва)

Методами теории групп [1] проводится анализ обобщенного уравнения Кортевега — де Вриза — Бюргерса, описывающего эффекты нелинейности, дисперсии и диссипации во многих задачах механики сплошной среды. Найденные решения принадлежат к классу инвариантных решений. Рассматривается возможность применения этих решений к задачам с начальными условиями.

1. Рассмотрим обобщенное уравнение Кортевега — де Вриза — Бюргерса вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{j}{2}\frac{u}{t}+\gamma u^m\frac{\partial u}{\partial x}-\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{1.1}$$

Здесь $j = 0, 1, 2$ для случаев плоской, цилиндрической и сферической симметрии соответственно, m, γ, μ, β — некоторые постоянные, $u\,(x, t)$ — искомая функция, x — пространственная координата, t — вторая независимая переменная (время).

Частные случаи уравнения (1.1) встречаются при рассмотрении волн в холодной плазме [2–5], в магнитной гидродинамике [6], в теории движения жидкости с пузырьками [7], в задачах нелинейной акустики [8]. Исследуя уравнение (1.1) методами группового анализа [1], найдем инвариантные решения этого уравнения.

Наряду с нахождением алгебры операторов, допускаемых уравнением (1.1), отыскивались оптимальные системы подалгебр, а также проводился анализ соответствующих однопараметрических подгрупп и инвариантных решений. Этот анализ позволил найти все инвариантные решения, построенные на неподобных подгруппах. Ниже оптимальная система подалгебр будет приведена для иллюстрации при $j = 2$, $m = 1$, $\mu = 0$. В остальных случаях, ради краткости, приведены лишь наиболее интересные, по мнению авторов, инвариантные решения.

Рассмотрим сначала случай плоской симметрии ($j = 0$). Тогда при $\mu \neq 0$, $\beta \neq 0$ имеем:

при $m = 1$ уравнение (1.1) допускает следующие операторы преобразований:

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x},\quad X_2=\frac{\partial}{\partial t},\quad X_3=\gamma t\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial u} \tag{1.2}$$

при $m = 0$ уравнение (1.1) линейно, пространство операторов бесконечномерно, но содержательная часть заключена в подпространстве операторов L_4

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = u\frac{\partial}{\partial u} \tag{1.3}$$

$$X_4 = \left[x + 2\left(\gamma - \frac{\mu^2}{3\beta}\right)t\right]\frac{\partial}{\partial x} + 3t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mu(x+\gamma t)}{3\beta}u\frac{\partial}{\partial u}$$

при $m \neq 0$, $m \neq 1$ остается всего два оператора:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t} \tag{1.4}$$

Каждый из операторов (1.2)—(1.4) или их линейная комбинация с постоянными коэффициентами порождает группу G_1, допускаемую уравнением (1.1). Для того чтобы функция $F(x, t) \not\equiv \text{const}$ была инвариантом группы G_1 с оператором X, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство [1]: $XF(x, t) = 0$. Например, для группы G_1, заданной оператором $X = \alpha X_1 + X_2$, $\alpha = \text{const}$, инвариант есть $I = x - \alpha t$, а инвариантное решение — $u(x, t) = U(x - \alpha t)$, которое называется стационарным.

2. Будем далее считать $m = 1$. При $\gamma = 1$, $\mu = 0$ уравнение (1.1) есть уравнение Кортевега — де Вриза.

В плоском случае оно допускает следующие операторы преобразований:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 3t\frac{\partial}{\partial t} - 2u\frac{\partial}{\partial u}$$

которым соответствуют инвариантные решения

$$u_1 = U(t), \quad u_2 = U(x), \quad u_3 = \frac{x}{t} + U(t), \quad u_4 = \frac{x}{t}U(\lambda), \quad \lambda = \frac{x}{t^{1/3}}$$

Последнее решение называется еще автомодельным решением уравнения Кортевега — де Вриза [2]. Кроме уже указанного стационарного решения $u = U(x - \alpha t)$, которое подробно изучено в работе [5], рассмотрим группу G_1, заданную оператором $X = \alpha X_2 + X_3$. Здесь два независимых инварианта $I_1 = x - t^2/(2\alpha)$ и $I_2 = \alpha u - t$, а инвариантное решение имеет вид

$$u(x, t) = \frac{t + U(\lambda)}{\alpha}, \quad \lambda = x - \frac{t^2}{2\alpha} \tag{2.1}$$

Подстановка (2.1) в уравнение Кортевега — де Вриза дает

$$1 + \frac{U}{\alpha}U' + \beta U''' = 0$$

из которого после интегрирования и замены

$$y(z) = -\beta(12\alpha\beta^2)^{-2/3}U(\lambda), \quad z = (12\alpha\beta^2)^{-1/3}\lambda$$

получим уравнение $y'' = 6y^2 + z + C$, дающее известные трансцендентные функции Пенлеве. Отметим также инвариантное решение

$$u(x, t) = \frac{\alpha}{2} + \frac{(x/t)\,U(\lambda)}{1 + \alpha t^{2/3}/(2\lambda)}, \quad \lambda = xt^{-1/3} - \frac{\alpha}{2}t^{2/3}$$

которое совпадает с автомодельным решением при $\alpha = 0$.

В цилиндрическом случае уравнение Кортевега — де Вриза допускает следующие операторы преобразований:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = 2x\sqrt{t}\frac{\partial}{\partial x} + 4t\sqrt{t}\frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{x}{\sqrt{t}} - 4u\sqrt{t}\right)\frac{\partial}{\partial u}$$

$$X_3 = 2\sqrt{t}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 3t\frac{\partial}{\partial t} - 2u\frac{\partial}{\partial u}$$

а в сферическом случае

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2=\ln t\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_3=x\frac{\partial}{\partial x}+3t\frac{\partial}{\partial t}-2u\frac{\partial}{\partial u}$$

Очевидно, что инвариантные решения, соответствующие группам с операторами растяжения X_4 ($j=1$) и X_3 ($j=2$),— автомодельные решения уравнения Кортевега — де Вриза. Кроме того, при $j=1$ имеются инвариантные решения вида

$$u(x,t)=\frac{x}{2t}+U(t), \quad u(x,t)=\frac{x/2+U(\lambda)}{t}, \quad \lambda=xt^{-1/2}$$

Рассмотрим более подробно случай $j=2$. Методами работы [1] можно показать, что в этом случае оптимальная система подалгебр имеет вид

$$X_1, X_2, X_3, X_1+X_2, X_1+X_3, X_2+X_3$$

Соответствующие инвариантные решения таковы:

$$u_1=U(t), \quad u_2=\frac{x}{t\ln t}+U(t), \quad u_3=\frac{x}{t}U(\lambda), \quad \lambda=xt^{-1/3}$$

$$u_4=\frac{x}{t(\ln t+1)}+U(t), \quad u_5=t^{-2/3}U(\lambda), \quad \lambda=(x+1)t^{-1/3}$$

$$u_6=t^{-2/3}U(\lambda)-1/t, \quad \lambda=(x+\ln t+3)t^{-1/3}$$

Других инвариантных решений на неподобных подгруппах нет.

Если $\gamma=0$ при $\mu=0$, $\beta\neq 0$, то имеем линеаризованное уравнение Кортевега — де Вриза, которое допускает бесконечномерное пространство операторов преобразований, однако содержательная часть заключена в подпространстве операторов L_6

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2=\frac{\partial}{\partial t}-j\frac{u}{2t}\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_3=x\frac{\partial}{\partial x}+3t\frac{\partial}{\partial t}$$

$$X_4=u\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5=xt^{-j/2}\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_6=t^{-j/2}\frac{\partial}{\partial u}$$

Получение теперь всевозможных инвариантных решений не представляет труда.

3. При $\gamma=1$, $\mu\neq 0$, $\beta=0$ уравнение (1.1) есть известное уравнение Бюргерса. Выпишем полную систему допустимых операторов

$$j=0:\quad X_1=\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2=x\frac{\partial}{\partial x}+2t\frac{\partial}{\partial t}-u\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_3=\frac{\partial}{\partial t}$$

$$X_4=t\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5=xt\frac{\partial}{\partial x}+t^2\frac{\partial}{\partial t}+(x-ut)\frac{\partial}{\partial u}$$

$$j=1:\quad X_1=\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2=x\frac{\partial}{\partial x}+2t\frac{\partial}{\partial t}-u\frac{\partial}{\partial u}$$

$$X_3=2\sqrt{t}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{\partial}{\partial u}$$

$$j=2:\quad X_1=\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2=x\frac{\partial}{\partial x}+2t\frac{\partial}{\partial t}-u\frac{\partial}{\partial u}$$

$$X_3=\ln t\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial u}$$

Для случая $j=0$ инвариантные решения исследовались также в работе В. Л. Каткова (см. [1]). Зная операторы, можно получить полную систему инвариантных решений, которую здесь приводить не будем. Отметим лишь, что при $j=0$ подстановкой (2.1) уравнение Бюргерса сводится к уравнению Риккати. Подстановкой

$$u(x,t)=-2\mu\frac{\partial\ln\theta(x,t)}{\partial x} \tag{3.1}$$

уравнение Бюргерса при $j=0$ сводится [9] к уравнению теплопроводности $\theta_t=\mu\theta_{xx}$. Множество соответствующих решений приведено в работе [10]. Хотя преобразование

(3.1) и не инвариантно, среди решений [10] много инвариантных. Например, инвариантное решение, соответствующее группе с оператором X_5, есть

$$u(x, t) = \lambda + \frac{U(\lambda)}{t}, \quad \lambda = \frac{x}{t} \tag{3.2}$$

Именно таковыми являются решения (2.1)—(2.5) и (3.5) работы [10], где, однако, представлены не все решения типа (3.2). К примеру, из семейства инвариантных решений

$$u(x, t) = \frac{x}{t} + \frac{2\mu}{t}\frac{C_1}{C_2 - C_1\frac{x}{t}}, \quad C_1, C_2 = \mathrm{const}$$

что соответствует решениям

$$\theta(x, t) = \left(C_2 - C_1\frac{x}{t}\right)t^{-1/2}\exp\left(-\frac{x^2}{4\mu t}\right)$$

в работе [10] приведены лишь два решения, получающиеся при $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$ соответственно.

4. Рассмотрим решение задачи о точечном взрыве для уравнения Бюргерса в случае $j = 0$. Воспользуемся автомодельным решением, основанным на использовании оператора растяжения X_2. Получающееся из уравнения Бюргерса обыкновенное нелинейное уравнение второго порядка интегрируется, и решение рассматриваемой задачи имеет вид

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{\mu}{\pi t}}\, E_0 \exp(-y^2) \Big/ \left[2\mu + \frac{E_0}{\sqrt{\pi}}\int\limits_y^\infty \exp(-y^2)\, dy\right] \tag{4.1}$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{4\mu t}}, \quad E_0 = \mathrm{const}$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что (4.1) — решение уравнения Бюргерса. Видно, что

$$\lim_{t\to+0} u(x, t) = E_0\delta(x), \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x, 0)\, dx = E_0$$

а это и требовалось доказать [11].

Решение (4.1) можно получить [12] и с помощью подстановки (3.1).

Полученные выше результаты по исследованию обобщенного уравнения Кортевега — де Вриза — Бюргерса могут оказаться полезными для нахождения новых точных решений, изучения свойств нелинейных волн, а также в других физических задачах.

Поступила 25 VII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., «Наука», 1978.
2. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах, Изд-во Новосибирск. ун-та, 1968.
3. *Maxon S., Viecelli J.* Cylindrical solitons. Phys. Fluids, 1974, vol. 17, No. 8.
4. *Maxon S., Viecelli J.* Spherical solitons. Phys. Rev. Letters, 1974, vol. 32, No. 1.
5. *Jeffrey A., Kakutani T.* Weak nonlinear dispersive waves: A discussion centered around the Korteweg — de Vries equation. SIAM Rev., 1972, vol. 14, No. 4.
6. *Kakutani T., Kawanara T.* Weak ion-acoustic shock waves. J. Phys. Society Japan, 1970, vol. 29, No 4.
7. *Van Wijngaarden L.* On the equation of motion for mixtures of liquid and gas bubbles. J. Fluid Mech., 1968, vol. 33, pt. 3.
8. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики, М., «Наука», 1975.

9. *Hopf E.* The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. Comm. Pure Appl. Math., 1950, vol. 3, No. 3, p. 201—230.
10. *Benton E. R., Platzman G. W.* A table of solutions of the onedimensional Burgers equation, Quart. Appl. Math., 1972, vol. 30, No. 2.
11. *Коробейников В. П.* Задачи теории точечного взрыва в газах. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1973, т. 119.
12. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны, М., «Мир», 1977.

УДК 532.5

ЗАМЕЧАНИЕ К ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ ПРОТЕКАНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

А. В. Кажихов

(Новосибирск)

Рассматривается задача о протекании идеальной несжимаемой жидкости через ограниченную область пространства. Показано, что для однозначного построения локального решения уравнений Эйлера достаточно на всей границе области течения задать нормальную составляющую вектора скорости, а на участке втекания — дополнительно две касательные компоненты вектора вихря.

Данная заметка служит дополнением к работе [1], в которой предложена постановка задачи протекания идеальной жидкости, когда на участке втекания наряду с нормальной составляющей вектора скорости задаются три компоненты вектора вихря.

Пусть, как в [1], V — односвязная ограниченная область течения с границей S цилиндрического вида, состоящей из трех частей: боковой поверхности S_0, входа S_1 и выхода S_2. Через $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ обозначим декартовы координаты точек V, t — время, $t \in [0, T]$, $0 < T < \infty$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ — вектор скорости, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — вектор вихря скорости. Предполагаем, что S_i $(i = 0, 1, 2)$ — поверхности класса $C^{2+\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ и сопряжение S_0 с S_1 и S_2 происходит по кривым L_1 и L_2 под прямым углом. Рассмотрим уравнения Эйлера идеальной жидкости, записанные в терминах вихря (см. [2], гл. III, § 19)

$$(1)\qquad \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} = \mathbf{f}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega},\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

В начальный момент $t = 0$ считается известным поле скоростей, на границе S области V задана нормальная составляющая скорости

$$(2)\qquad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}),\ t = 0,\ \mathbf{x} \in V,\ \operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0$$

$$(3)\qquad (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) = 0 \text{ на } S_0$$

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) = g_1 > 0 \text{ на } S_1,\ (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) = g_2 < 0 \text{ на } S_2$$

Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор внутренней нормали к S, g_1 и g_2 — заданные соответственно на S_1 и S_2 функции.

Дополнительно к условиям (3) в работе [1] на участке S_1 задавался вектор $\boldsymbol{\omega}$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t),\ \mathbf{x} \in S_1$$

Покажем, что задание всех трех компонент вихря $\boldsymbol{\omega}$ приводит к переопределенной краевой задаче. Для простоты будем считать, что S_1 — плоское сечение, перпендикулярное оси x_1. Возьмем в качестве примера следующие граничные данные на S_1:

$$v_1 = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) \equiv 1,\ \omega_1 = (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n}) \equiv 0 \text{ на } S_1$$