

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
2. Пшеничный Б. Н., Сагайдак М. И. О дифференциальных играх с фиксированным временем. Кибернетика, 1970, № 2.
3. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх. 2. Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 4.
4. Ченцов А. Г. О структуре одной игровой задачи сближения. Докл. АН СССР, 1975, т. 224, № 6.
5. Ченцов А. Г. Об игровой задаче сближения в заданный момент времени. Матем. сб., 1976, т. 99, № 3.

УДК 531.36 : 534

О БИФУРКАЦИЯХ СЕПАРАТРИС В ЗАДАЧЕ О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОКОЛЕБАНИЙ ВБЛИЗИ РЕЗОНАНСА 1:4

Ф. С. Березовская, А. И. Хибник

(Пушино)

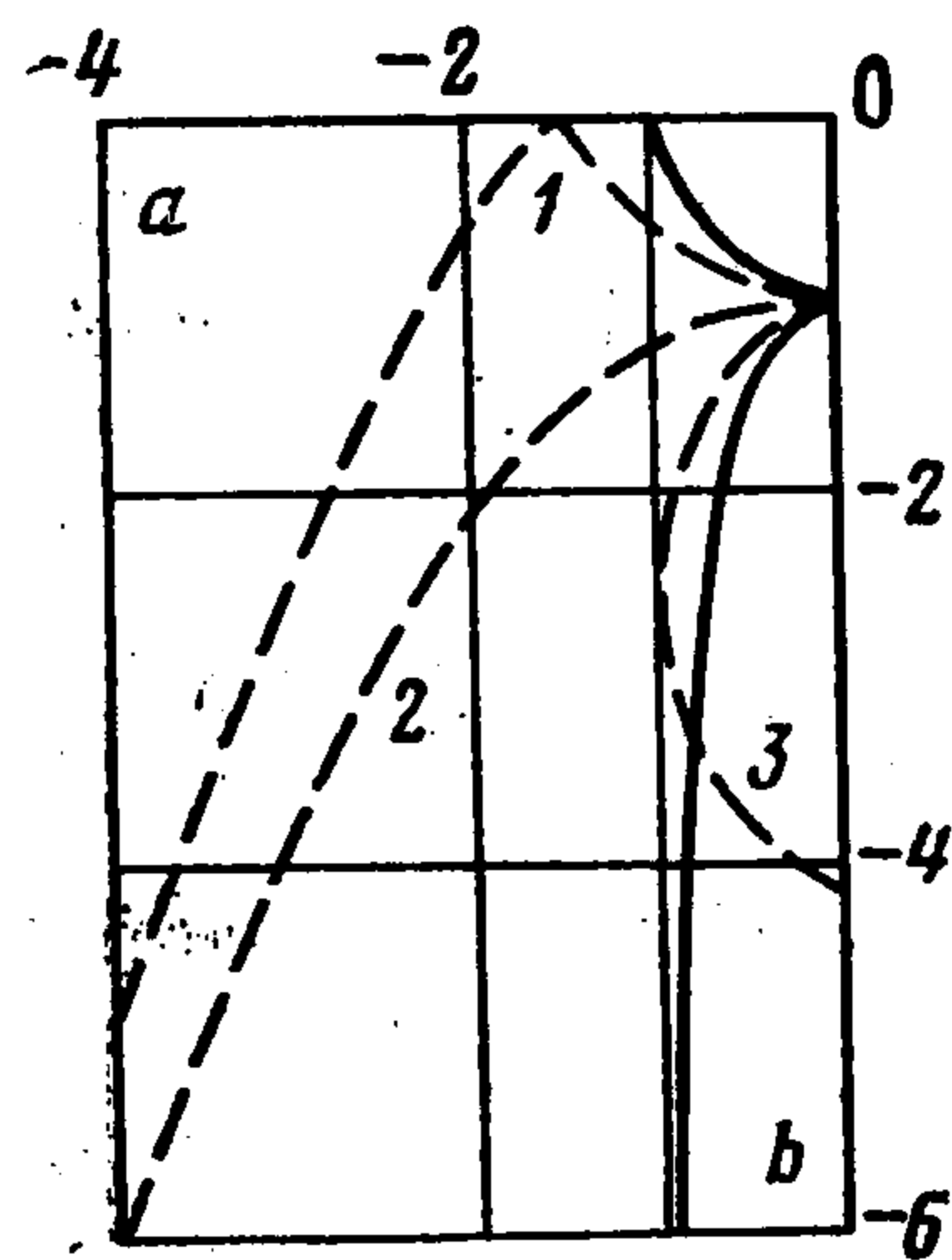
Рассматривается задача о бифуркациях периодического движения вблизи резонанса $1:n$ при $n=4$. Эта задача приводится к исследованию некоторого комплексного дифференциального уравнения, зависящего от комплексного параметра ε . При обходе ε вокруг нуля в уравнении возникает последовательность бифуркаций в общем случае коразмерности 1. При выполнении определенных условий на коэффициенты уравнения (условий вырождения) в бифуркационной последовательности встречаются

бифуркации коразмерности 2 и выше. В работе найдены условия вырождения, связанные с перестройками сепаратрис, что позволило описать все бифуркационные последовательности общего вида.

Для $n \neq 4$ аналогичная задача была решена ранее [1, 2]; вследствие того что все бифуркации коразмерности 2 оказались локальными, их удалось описать явными алгебраическими условиями. Резонанс $1:4$ выделяется тем, что часть бифуркаций коразмерности 2 связана с перестройками сепаратрис. Для исследования таких бифуркаций используются как аналитические, так и численные методы.

Рассматривается комплексное дифференциальное уравнение

$$(0.1) z' = e^{i\alpha} z + Az |z|^2 + \bar{z}^3, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad A = a + ib$$



Фиг. 1

На фиг. 1 приводится параметрический портрет уравнения (0.1) — разбиение плоскости параметра A кривыми, отвечающими бифуркациям коразмерности 2 (в связи с симметрией показана лишь область $\operatorname{Re} A \leq 0, \operatorname{Im} A \leq 0$). Кривые, отвечающие нелокальным бифуркациям — образованию кратного сепаратрисного цикла и циклов, состоящих из сепаратрис седлоузлов, получены численно. На фиг. 1 они показаны штриховыми линиями. (Вид этих кривых предсказан в [2]). Последовательности бифуркаций во всех областях фиг. 1 описаны ранее¹.

¹ Березовская Ф. С., Хибник А. И. К задаче о бифуркациях автоколебаний вблизи резонанса $1:4$ (исследование модельного уравнения). Препринт, Пушино, 1979.

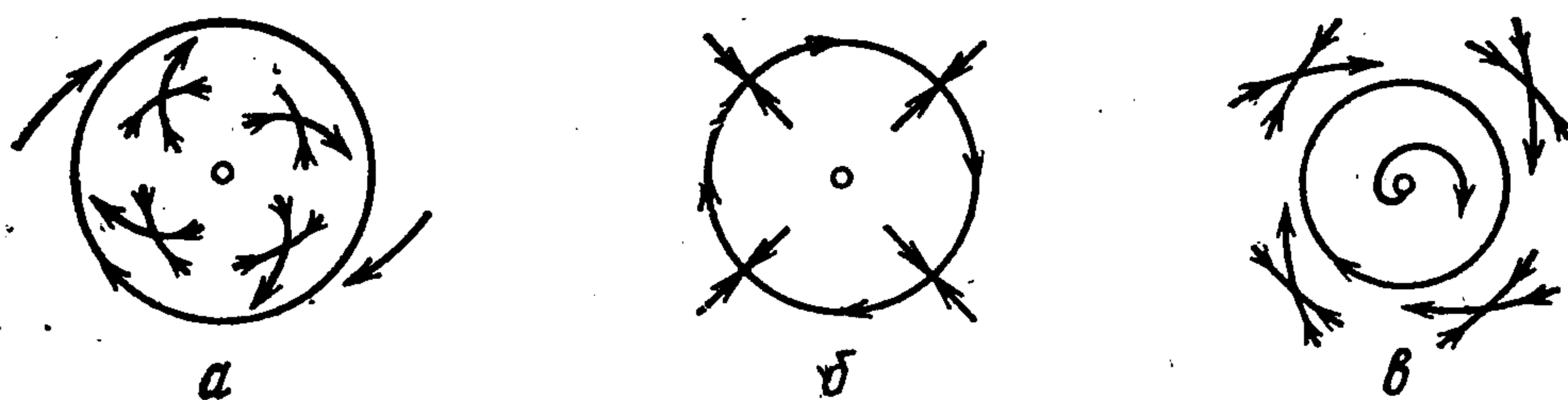
1. **Бифуркации.** При описании бифуркаций предполагаем, где это существенно, что $\operatorname{Re} A \leq 0$, $\operatorname{Im} A \leq 0$ и угол α возрастает; события «рождение» и «исчезновение» различаться не будут. В уравнении (0.1) при изменении α реализуются следующие однопараметрические бифуркации:

- 1) смена устойчивости нулевой особой точки, сопровождающаяся рождением «центрального» предельного цикла;
- 2) появление четырех «периферийных» кратных особых точек — седлоузлов. При этом параметры связаны соотношением

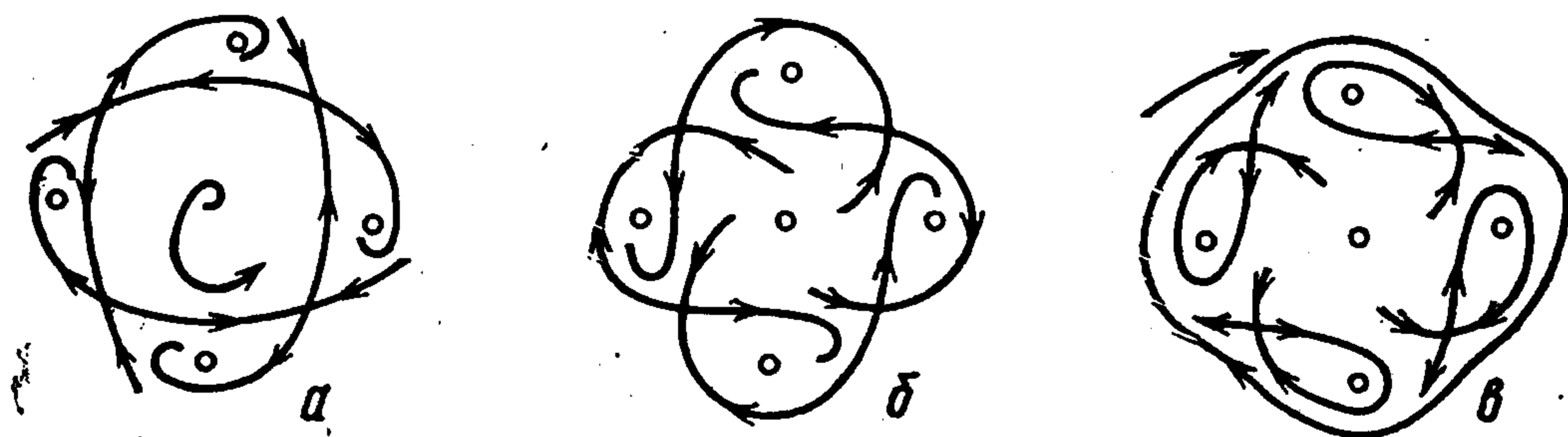
$$(1.1) \quad |b \cos \alpha - a \sin \alpha| = 1$$

Отметим, что седлоузлы могут появляться вне центрального предельного цикла, на нем и внутри него (фиг. 2). После рождения седлоузлы распадаются на четыре седла и четыре узла;

3) замыкание сепаратрис периферийных седел, т. е. образование сепаратрисного цикла (фиг. 3, а, б). Такой цикл в зависимости от характера его устойчивости может



Фиг. 2



Фиг. 3

либо поглотить имевшийся центральный цикл, либо родить второй центральный цикл;

- 4) слияние двух центральных циклов;
- 5) смена устойчивости четырех периферийных [фокусов с рождением четырех периферийных циклов;
- 6) образование петель сепаратрис каждого из четырех седел (фиг. 3, в) с поглощением периферийных предельных циклов.

Отметим, что бифуркации 2), 3), 5), 6) имеют коразмерность 1 вследствие инвариантности уравнения (0.1) относительно поворота фазового пространства на угол $\pi/2$.

При разных A реализуются разные последовательности из описанных бифуркаций. Однотипным последовательностям бифуркаций соответствуют области на плоскости параметра A (фиг. 1). Граничные кривые отделяют одну цепь событий (бифуркаций) от другой. Например, в области $|A| < 1$ кратные особые точки не появляются вовсе, а во всех прочих областях появляются обязательно. Более точно границы областей могут быть описаны как проекции на плоскость параметра A параметрических кривых, соответствующих бифуркациям коразмерности 2.

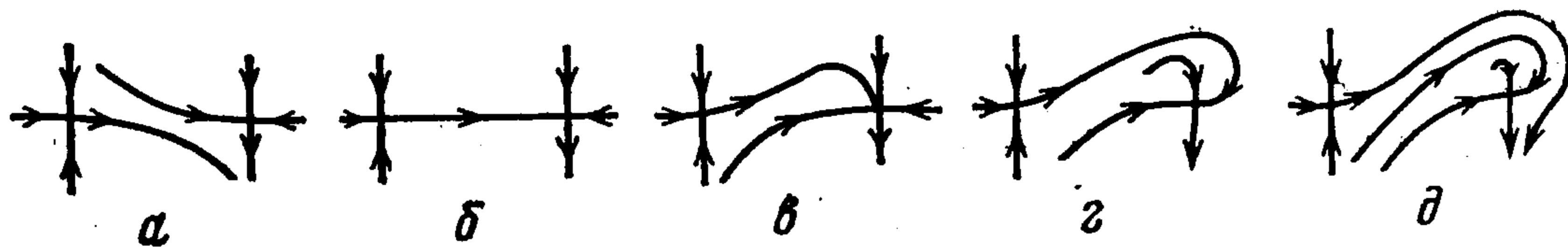
Напомним точные формулы для известных [1, 2] граничных кривых. На линии $a^2 + b^2 = 1$ при α , удовлетворяющем соотношению (1.1), кратные периферийные особые точки рождаются в бесконечно удаленной части плоскости z . На линии $|a| = 1$ при $\alpha = \pm \pi/2$ одновременно происходят две бифуркации коразмерности 1: кратность периферийных особых точек и смена устойчивости центральной особой точки. На

кривых $b = \pm(1 + a^2) / \sqrt{1 - a^2}$ при выполнении соотношения (1.1) кратные периферийные особые точки имеют два нулевых собственных числа. На линии $a = 0$ при $\alpha = \pm \pi / 2$ уравнение (0.1) гамильтоново.

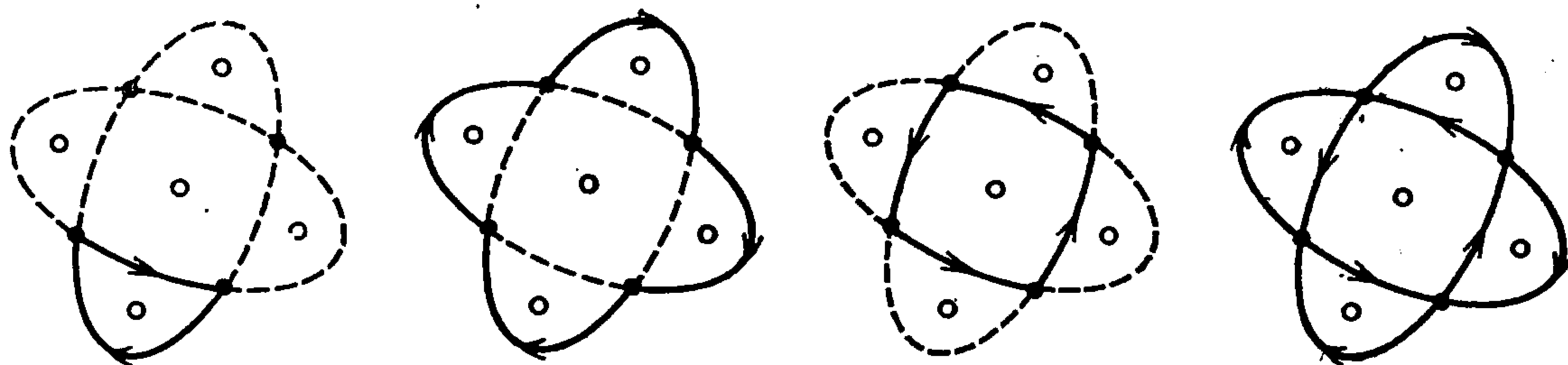
Остальные граничные кривые связаны с перестройками сепаратрис. Перейдем к их детальному описанию.

2. Параметрические кривые, связанные с перестройками сепаратрис. При нелокальных бифуркациях коразмерности 2 в уравнении (0.1) возможны: замыкание в сепаратрисный цикл сепаратрис седлоузлов и кратность сепаратрисного цикла, образованного сепаратрисами седел.

Первой бифуркации соответствуют две параметрические кривые: одна из них служит границей между областями, в которых седлоузлы появляются вне централь-



Фиг. 4



Фиг. 5

ного цикла и на нем (кривая 1), вторая — на центральном цикле и внутри него (кривая 2).

Линия кратных сепаратрисных циклов (кривая 3) разделяет области, в которых сепаратрисный цикл имеет разную устойчивость.

Кривые 1—3 будем далее называть нелокальными бифуркационными линиями.

Кривые 1 и 2. В случае общего положения кратные особые точки (седлоузлы) могут появляться вне центрального предельного цикла, на нем и внутри него (фиг. 2).

Среди сепаратрис каждого из новорожденных седлоузлов две обычные отвечают ненулевому собственному значению (и разделяют узловый и седловой секторы) и одна особая отвечает нулевому собственному значению (и разделяет два седловых сектора). Рассмотрим взаимное расположение сепаратрис двух соседних седлоузлов. На фиг. 4, а, в, д изображены три грубых случая расположения сепаратрис. На фиг. 4, б, г — бифуркационные ситуации, состоящие в совпадении особой сепаратрисы одного седлоузла с одной из обычных сепаратрис другого. Эти бифуркации имеют коразмерность 2 и определяют искомые границы между областями.

Кривая 3. При замыкании сепаратрис периферийных седел возможно образование кратного сепаратрисного цикла. Необходимым условием кратности сепаратрисного цикла является его нейтральность.

Цикл, образованный сепаратрисами седел x_1, \dots, x_m , называется нейтральным, если собственные числа $\lambda_i > 0$, $-\mu_i < 0$ седел x_i удовлетворяют соотношению

$$(2.1) \quad \delta \equiv \prod_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\mu_i} = 1$$

(при $\delta < 1$ сепаратрисный цикл устойчив, при $\delta > 1$ — неустойчив [3]).

Для уравнения (0.1) вследствие его симметричности условие (2.1) упрощается и сводится к равенству нулю седловой величины в любом из седел: $\sigma_c \equiv \lambda + \mu = 0$. В исходных параметрах это эквивалентно равенству

$$(2.2) \quad 4a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 4ab \operatorname{tg} \alpha + a^2 + b^2 - 1 = 0$$

А priori нейтральные сепаратрисные циклы в уравнении (0.1) могут образовывать: внутренние сепаратрисы седел (фиг. 3, а); внешние сепаратрисы седел (фиг. 3, б); сепаратрисы периферийных седел, замыкаясь в петлю (здесь одновременно появляются четыре симметричных цикла (фиг. 3, в)).

При исследовании кривых нейтральных сепаратрисных циклов существенными оказываются следующие соображения, высказанные В. И. Арнольдом. Параметрическая область, в которой возможны нейтральные сепаратрисные циклы, содержит линию $a = 0$, на которой при $\alpha = \pm\pi/2$ уравнение (0.1) гамильтоново. Поэтому искомые циклы могут рождаться из нейтральных сепаратрисных контуров гамильтонова уравнения (фиг. 5). Если такое рождение происходит, то линия $a = 0$ пересекается с кривой нейтральных сепаратрисных циклов. Такие пересечения могут быть найдены стандартной техникой возмущения гамильтонова уравнения.

Исследование возмущений, сохраняющих условие (2.2), показало¹, что с линией $a = 0$, на которой уравнение (0.1) гамильтоново, пересекаются лишь кривые внешних нейтральных сепаратрисных циклов. Пересечение происходит при $b \approx \pm 4.1100817$. В работе [4], посвященной полному анализу уравнения (0.1) при значениях параметров, близких к гамильтоновым, получено, в частности, то же значение b .

Итак, можно утверждать, что кривая внешних нейтральных сепаратрисных циклов существует и вопрос состоит лишь в ее отыскании. Нейтральных сепаратрисных циклов типа изображенных на фиг. 5, а, в, по-видимому, нет.

3. Численное отыскание нелокальных бифуркационных кривых. Каждая из исследуемых кривых задается двумя условиями. Одно из них, локальное, выражается через собственные числа в особых точках. Второе, нелокальное, отвечает совпадению сепаратрис. Явная запись локального условия позволяет уменьшить число параметров в изучаемом уравнении и существенно упростить процедуру нахождения бифуркационных кривых.

Кривые 1 и 2. Здесь локальным является условие (1.1). Используя его, перейдем к уравнению, в котором периферийные особые точки — седлоузлы. Для этого в уравнении (0.1) сделаем замену (z_0 — особая точка, седлоузел, $a^2 + b^2 > 1$)

$$(3.1) \quad z = \frac{z_0}{1+i} w, \quad \rho = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 1}}{2}$$

Уравнение для w имеет вид

$$(3.2) \quad w' = -\frac{e^{i\alpha}}{2} \left[w (|w|^2 - 2) + \frac{iw}{2\rho} (w^2 + \bar{w}^2) \right]$$

Уравнение (3.2) содержит два параметра: α и ρ ; кроме того, седлоузлы в нем зафиксированы в точках $\pm 1 \pm i$.

Пусть S_1^- и S_2^+ — обычная и особая сепаратрисы двух соседних седлоузлов w_1 и w_2 , O_1 и O_2 — точки пересечения сепаратрисами кривой без контакта L . Расстояние между точками O_1 и O_2 задает функцию расщепления сепаратрис $f(\alpha, \rho)$. Задача состоит в отыскании значений параметров α, ρ , обращающих функцию f в нуль.

Вычисление функции $f(\alpha, \rho)$ при произвольных фиксированных значениях параметров α, ρ сводится к вычислению сепаратрис S_1^- и S_2^+ . Для этого интегрируется уравнение (3.2). Начальные точки интегрирования выбираются вблизи седлоузлов с учетом асимптотик сепаратрис.

Пусть одна из точек вблизи кривой, заданной уравнением $f(\alpha, \rho) = 0$, известна. Тогда дальнейшее отыскание кривой проводится с использованием [5].

Отметим, что одна из точек на кривой, разделяющей рождение седлоузлов вне цикла и на нем (кривая 1), найдена [2] из условия, что соединяющиеся сепаратрисы — прямые. Ее координаты $\rho = 1, \alpha = -\pi/4$.

¹ См. сноску на стр. 938.

Кривая 3. Отыскание кривой нейтральных сепаратрисных циклов проводится аналогично отысканию кривых 1 и 2. От уравнения (1.1) с помощью замены (z_0 — седло)

$$z = \frac{z_0}{1+i} w, \quad \rho = \sin \alpha + \frac{b}{a} \cos \alpha$$

переходим к уравнению

$$(3.3) \quad w' = -\frac{e^{i\alpha}}{2} \left[w (|w|^2 - 2) - \frac{1 - e^{-i\alpha} \rho}{2} \bar{w} (w^2 + \bar{w}^2) \right]$$

в котором седла зафиксированы в точках $\pm 1 \pm i$ и число параметров уменьшено в силу условия (2.2). Кривой нейтральных сепаратрисных циклов уравнения (0.1) соответствует кривая сепаратрисных циклов уравнения (3.3).

Отметим теперь, что нейтральные сепаратрисные циклы в уравнении (0.1) являются точно двукратными. Доказательство этого утверждения состояло¹ в проверке невырожденности главного члена функции последования вблизи сепаратрисного цикла. Оно было проведено численно (точки на вычисленной кривой 3 выбирались с шагом 0,01 по параметру a). Одновременно доказана устойчивость сепаратрисных циклов на кривой 3 при $a < 0$ и $-4.11 \dots < b < -1$.

Численное исследование уравнения (0.1) проводилось на ЭВМ МИР-2 и ЕС-1040 с использованием программ [5-8]. Кривые 1-3 вычислены с абсолютной ошибкой 10^{-5} при $|b| \approx 1$ и с относительной ошибкой 10^{-3} при больших $|b|$. Для $|b| \approx 4.11$ кривая 3 вычислена с точностью 10^{-4} .

5. Обсуждение. Представляют интерес асимптотики нелокальных бифуркационных кривых при $|a| \rightarrow 0$ и $|a| \rightarrow \infty$. Результаты численного анализа (подробные таблицы были приведены авторами ранее²) позволяют предположить, что асимптотики имеют квадратичный вид:

для кривой 1 $b \approx -1 + 0,47 a^2$ при $b \rightarrow -1$ и $b \approx 0,35 a^2$ при $b \rightarrow \infty$;

для кривой 2 $b \approx -1 - 0,13 a^2$ при $b \rightarrow -1$ и $b \approx -0,352 a^2$ при $b \rightarrow -\infty$;

для кривой 3 $b \approx -1 - 0,45 a^2$ при $b \rightarrow -1$ и $b \approx -4,11 + 0,84 a^2$ при $b \rightarrow -4,11$.

Отметим, что в уравнении (0.1) могла, вообще говоря, происходить еще одна бифуркация коразмерности 2 — образование трехкратного цикла. Концы соответствующей этой бифуркации параметрической кривой следовало искать в точках, отвечающих бифуркациям более высоких коразмерностей: на линии $a = 0$ и линии нейтральных сепаратрисных циклов. Из результатов работы [4] вытекает, что «гипотетическая» линия трехкратных циклов не пересекает линию $a = 0$. Выше было показано, что нейтральные сепаратрисные циклы являются точно двукратными. Таким образом, незамкнутых линий трехкратных циклов на параметрическом портрете уравнения (0.1) нет.

Вопрос о существовании замкнутых линий трехкратных циклов, как и вопрос о существовании замкнутых ветвей остальных нелокальных бифуркационных кривых, остается открытым. Отметим, однако, что результаты численных экспериментов позволяют предположить, что такие линии отсутствуют.

Авторы благодарят В. И. Арнольда за постановку задачи и внимание к работе, Э. Э. Шноля, Ю. М. Апонина, Н. К. Балабаева и Р. М. Борисюка за обсуждения.

Поступила 14 V 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Потеря устойчивости автоколебаний вблизи резонанса и версальные деформации эквивариантных векторных полей. Функциональный анализ и его приложения, 1977, т. 11, вып. 2.
2. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Наука», 1978.

¹ См. Апонин Ю. М. Об устойчивости особых циклов. ВИНТИ. Деп. 21 июня 1978 г., № 2094-78.

² См. сноску на стр. 938.

3. Dulac H. Sur les cycles limites. Bull. Soc. Math. France, 1923, vol. 51, p. 144.
4. Нейштадт А. И. Бифуркации фазового портрета одной системы уравнений, возникающей в задаче о потере устойчивости автоколебаний вблизи резонанса 1:4. ПММ, 1978, т. 42, вып. 5.
5. Балабаев Н. К., Луневская Л. В. Движение по кривой в n -мерном пространстве. Алгоритмы и программы на ФОРТРАНе. Материалы по математическому обеспечению ЭВМ, вып. 1. Пущино, 1978.
6. Березовская Ф. С., Крейцер Г. П. Избранные алгоритмы и программы для ЭВМ МИР-2. Сложные особые точки системы двух дифференциальных уравнений. Пущино, 1975.
7. Апонин Ю. М., Апонина Е. А. Избранные программы и алгоритмы для ЭВМ МИР-2. Сепаратрисы системы двух дифференциальных уравнений. Пущино, 1976.
8. Математическое обеспечение ЕС ЭВМ, вып. 2. Пакет научных подпрограмм. Минск, Изд-е Ин-та матем. АН БССР, 1973.

УДК 532.5

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА — ДЕ ВРИЗА — БЮРГЕРСА

Н. С. Захаров, В. П. Коробейников

(Москва)

Методами теории групп [1] проводится анализ обобщенного уравнения Кортевега — де Вриза — Бюргерса, описывающего эффекты нелинейности, дисперсии и диссипации во многих задачах механики сплошной среды. Найденные решения принадлежат к классу инвариантных решений. Рассматривается возможность применения этих решений к задачам с начальными условиями.

1. Рассмотрим обобщенное уравнение Кортевега — де Вриза — Бюргерса вида

$$(1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{j}{2} \frac{u}{t} + \gamma u^m \frac{\partial u}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

Здесь $j = 0, 1, 2$ для случаев плоской, цилиндрической и сферической симметрии соответственно, m, γ, μ, β — некоторые постоянные, $u(x, t)$ — искомая функция, x — пространственная координата, t — вторая независимая переменная (время).

Частные случаи уравнения (1.1) встречаются при рассмотрении волн в холодной плазме [2-5], в магнитной гидродинамике [6], в теории движения жидкости с пузырьками [7], в задачах нелинейной акустики [8]. Исследуя уравнение (1.1) методами группового анализа [1], найдем инвариантные решения этого уравнения.

Наряду с нахождением алгебры операторов, допускаемых уравнением (1.1), отыскивались оптимальные системы подалгебр, а также проводился анализ соответствующих однопараметрических подгрупп и инвариантных решений. Этот анализ позволил найти все инвариантные решения, построенные на неподобных подгруппах. Ниже оптимальная система подалгебр будет приведена для иллюстрации при $j = 2, m = 1, \mu = 0$. В остальных случаях, ради краткости, приведены лишь наиболее интересные, по мнению авторов, инвариантные решения.

Рассмотрим сначала случай плоской симметрии ($j = 0$). Тогда при $\mu \neq 0, \beta \neq 0$ имеем:

при $m = 1$ уравнение (1.1) допускает следующие операторы преобразований:

$$(1.2) \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = \gamma t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}$$