УДК 62—50

К ПОСТРОЕНИЮ СТАБИЛЬНЫХ МОСТОВ

В. И. Ухоботов

(Челябинск)

Описывается один способ построения стабильного моста. Указан класс игр, применительно к которому этот способ позволяет построить стабильный мост в явном виде.

1. Рассмотрим управляемый процесс, уравнения движения которого имеет вид

$$z^{\cdot} = f(z, u, v), \quad z \in R^n, \quad u \in U \subset R^n, \quad v \in V \subset R^n \tag{1.1}$$

В R^n задано замкнутое множество Z. Требуется построить максимальный u-стабильный мост [1], ведущий на цель Z в заданный момент времени.

При построении моста можно использовать многозначное отображение T_σ [2]. Пусть заданы множество $X \subset R^n$ и число $\sigma \geqslant 0$. Тогда $T_\sigma(X)$ является множеством тех точек $z \in R^n$, для каждой из которых по любому измеримому управлению $v(t) \in V$ можно указать измеримое управление $u(t) \in U$, такое, что $z(\sigma) \in X$. Здесь $z(\sigma)$ — значение решения системы (1.1) с начальным условием $z(0) = z$.

Если на правую часть системы (1.1) и на множества U и V наложить некоторые ограничения [2], то отображение T_σ будет обладать следующими свойствами: 1) если множество X замкнуто, то $T_\sigma(X)$ тоже замкнуто; 2) если $X \subset X_1$, то $T_\sigma(X) \subset T_\sigma(X_1)$; 3) $T_0(X) = X$; 4) $T_{\sigma_1}(T_{\sigma_2}(X)) \subset T_{\sigma_1+\sigma_2}(X)$.

С использованием отображения T_σ в работе [2] построено семейство замкнутых множеств (обозначим их $W(t)$), удовлетворяющих включению $[T_\sigma(W(t-\sigma)) \supset W(t)$ и равенству $W(0) = Z$. Среди ряда других свойств это семейство множеств $W(t)$ удовлетворяет следующему условию максимальности: если $z \bar{\in} W(t)$, то существует конечный набор положительных чисел $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$, сумма которых равна t и $z \bar{\in} T_{\sigma_1} \cdot (\ldots T_{\sigma_k}(Z) \ldots)$.

Приведем другую схему построения максимального u-стабильного моста $W(t)$. При целых $k \geqslant 1$ положим $W^k(0) = Z$, а при $t > 0$ определим $W^k(t)$ рекуррентным соотношением

$$W^1(t) = T_t(Z), \ldots, W^{k+1}(t) = \bigcap_{0 \leqslant \tau \leqslant t} T_\tau(W^k(t-\tau)) \tag{1.2}$$

При каждых $k \geqslant 1$ и $t \geqslant 0$ построенные множества замкнутые.

Лемма 1.1. $W^{k+1}(t) \subset W^k(t)$ при $k > 1$ и $t \geqslant 0$.

Доказательство. При $k = 1$ требуемое включение следует из (1.2) и свойства 4 отображения T_σ.

Пусть при некотором $k > 1$ требуемое включение выполнено для всех $t \geqslant 0$. Тогда, используя свойство 2 отображения T_σ, получим

$$W^{k+2}(t) = \bigcap_{0 \leqslant \tau \leqslant t} T_\tau(W^{k+1}(t-\tau)) \subset \bigcap_{0 \leqslant \tau \leqslant t} T_\tau(W^k(t-\tau)) = W^{k+1}(t)$$

Лемма 1.2. При любом $t > 0$ и любом наборе $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$, состоящем из k положительных чисел, сумма которых равна t, выполнено включение

$$W^k(t) \subset T_{\sigma_1}(\ldots T_{\sigma_k}(Z) \ldots)$$

Доказательство. Как следует из (1.2), при $k = 1$ требуемое включение выполнено. Пусть при некотором $k \geqslant 1$ доказываемое включение выполнено при всех $t > 0$. Тогда, как следует из (1.2) и свойства 2 отображения T_σ, при любом наборе $\sigma_1, \ldots, \sigma_{k+1}$, состоящем из $k+1$ положительных чисел, сумма которых равна t, выполнено включение

$$W^{k+1}(t) \subset T_{\sigma_1}(W^k(t-\sigma_1)) \subset T_{\sigma_1}(T_{\sigma_2} \sigma T_{k+1}(Z) \ldots))$$

Теорема. $W(t) = \bigcap\limits_{k\geqslant 0} W^k(t)$.

Доказательство. При $t = 0$ в левой и в правой частях доказываемого равенства стоит множество Z.

Рассмотрим случай $t > 0$. Индукцией по k докажем, что $W(t) \subset W^k(t)$ для всех $k \geqslant 1$. При $k = 1$ имеем

$$W(t) \subset T_t(W(0)) = T_t(Z) = W^1(t)$$

Пусть при некотором $k \geqslant 1$ доказываемое включение выполнено для всех $t > 0$. Тогда при $0 \leqslant \tau \leqslant t$

$$W(t) \subset T_\tau(W(t-\tau)) \subset T_\tau(W^k(t-\tau))$$

Отсюда и из (1.2) следует включение $W(t) \subset W^{k+1}(t)$.

Покажем теперь, что $W(t) \supset \bigcap W^k(t)$. Пусть точка $z \overline{\in} W(t)$. Тогда, как следует из условия максимальности моста $W(t)$, существует конечный набор положительных чисел $\sigma_1, \ldots, \sigma_i$, сумма которых равна t, и $z \overline{\in} T_{\sigma_1}(\ldots T_{\sigma_i}(Z)\ldots)$.

Отсюда и из леммы 1.2 следует, что $z \overline{\in} W^i(t)$. Стало быть, $z \overline{\in} \bigcap W^k(t)$ и, следовательно, требуемое включение доказано.

Следствие 1. Пусть существуют числа $t_0 > 0$ и $k \geqslant 1$, такие, что $W^{k+1}(t) = W^k(t)$ для всех $0 \leqslant t \leqslant t_0$. Тогда $W(t) = W^k(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant t_0$.

Доказательство. Из условия $W^{k+1}(t) = W^k(t)$ и из (1.2) следует, что $W^k(t) = W^i(t)$ при всех $i \geqslant k$ и $0 \leqslant t \leqslant t_0$. Отсюда и из предыдущей теоремы следует требуемое равенство.

Следствие 2. Пусть выполнены условия предыдущего следствия и пусть существует последовательность $t_i \to t_0$, $t_i > t_0$, такая, что множества $W^k(t_i)$ пусты. Тогда при всех $t \geqslant 0$ $W(t) = W^{k+1}(t)$.

Доказательство. Покажем, что $W^{k+1}(t) = W^{k+2}(t)$ при всех $t \geqslant 0$. Для этого достаточно показать, что при любом $t > t_0$ множество $W^{k+1}(t)$ пусто.

Возьмем t_i так, чтобы $\tau = t - t_i > 0$. Тогда из (1.2) следует, что $W^{k+1}(t) \subset T_\tau(W^k(t_i))$. Множество, стоящее в правой части этого включения, пустое.

2. Рассмотрим линейную игру

$$z^\cdot = Cz - u + v,\ z \in R^n,\ u \in U \subset R^n,\ v \in V \subset R^n \tag{2.1}$$

Здесь C — постоянная матрица, U и V — выпуклые компакты.

Предполагается, что заданы m-мерное евклидово пространство R^m и линейное отображение $\pi : R^n \to R^m$. В R^m задано замкнутое множество E. Терминальное множество Z зададим в следующем виде:

$$Z = \{z \in R^n : \pi z \in E\} \tag{2.2}$$

Обозначим

$$\pi_1(t) = \pi e^{tC}, \quad J_1(t_1, t_2) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \pi_1(t)\, U dt, \quad J_2(t_1, t_2) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \pi_1(t)\, V dt \tag{2.3}$$

Тогда, используя определение геометрической разности $\overset{*}{-}$ двух множеств [3], можно показать, что при любых $0 \leqslant \tau \leqslant t$ множество $T_\tau(T_{t-\tau}(Z))$ есть совокупность $z \in R^n$ следующего вида:

$$\pi_1(t)\, z \in (((E + J_1(0, t-\tau)) \overset{*}{-} J_2(0, t-\tau)) + J_1(t-\tau, t)) \overset{*}{-} J_2(t-\tau, t) \tag{2.4}$$

Предположение 1. В R^m существует базис $x_1, \ldots, x_m$ и непрерывные функции $a_i(t) \leqslant A_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$, такие, что при любом $t \geqslant 0$ ((x_i, x) — скалярное произведение)

$$\pi_1(t)\, U = \{x \in R^m : a_i(t) \leqslant (x_i, x) \leqslant A_i(t),\ i = 1, \ldots, m\} \tag{2.5}$$

Отметим некоторые свойства многогранников вида (2.5).

Пусть заданы числа $p_i \leqslant P_i$, $i = 1, \ldots, m$. Положим

(2.6) $$P = \{x \in R^m : p_i \leqslant (x_i, x) \leqslant P_i, \; i = 1, \ldots, m\}$$

Лемма 2.1. Пусть B — компакт в R^m, а $b_i = \min(x_i, x)$, $B_i = \max(x_i, x)$, где min и max берутся по $x \in B$. Тогда

(2.7) $$P \overset{*}{-} B = \{x \in R^m : p_i - b_i \leqslant (x_i, x) \leqslant P_i - B_i, \; i = 1, \ldots, m\}$$

Доказательство. Пусть x принадлежит множеству, стоящему в правой части (2.7). Возьмем любой вектор $y \in B$ и покажем, что $x + y \in P$. Имеем $p_i - b_i \leqslant (x_i, x) \leqslant P_i - B_i$, $b_i \leqslant (x_i, y) \leqslant B_i$. Складывая эти неравенства и учитывая вид множества (2.6), получим требуемое включение.

Пусть $x \in P \overset{*}{-} B$. Тогда $x + y \in P$ при любом $y \in B$. Следовательно, $p_i \leqslant (x_i, x) + (x_i, y) \leqslant P_i$ при любом $y \in B$. Стало быть, учитывая определение чисел b_i и B_i, получим, что x принадлежит множеству, стоящему в правой части (2.7).

Лемма 2.2. Пусть заданы числа $b_i \leqslant B_i$, $i = 1, \ldots, m$. Положим

$$B = \{x \in R^m : b_i \leqslant (x_i, x) \leqslant B_i, \; i = 1, \ldots, m\}$$

Тогда

(2.8) $$P + B = \{x \in R^m : p_i + b_i \leqslant (x_i, x) \leqslant P_i + B_i, \; i = 1, \ldots, m\}$$

Доказательство. Пусть x принадлежит множеству M, стоящему в правой части (2.8). Найдем такой вектор $y \in B$, чтобы $x - y \in P$. Этим будет доказано включение $x \in P + B$.

Из неравенств, которым удовлетворяют числа (x_i, x), следует, что

(2.9) $$(x_i, x) = (P_i + B_i + p_i + b_i + \lambda_i (P_i + B_i - p_i - b_i)) / 2, \; |\lambda_i| \leqslant 1$$

Поскольку $x_1, \ldots, x_m$ — базис в R^m, то существует такой вектор $y \in R^m$, что

$$(x_i, y) = (B_i + b_i + \lambda_i (B_i - b_i)) / 2$$

Отсюда и из (2.9) следует, что

$$(x_i, x - y) = (P_i + p_i + \lambda_i (P_i - p_i)) / 2$$

Учитывая, что $|\lambda_i| \leqslant 1$, получим $y \in B$, $x - y \in P$.

Включение $P + B \subset M$ непосредственно следует из вида множеств P и B.

Используя лемму 2.2 и предположение 1, можно показать, что множество $J_1(t_1, t_2)$ (2.3) имеет следующий вид:

(2.10) $$J_1(t_1, t_2) = \left\{x \in R^m : \int_{t_1}^{t_2} a_i(t)\, dt \leqslant (x_i, x) \leqslant \int_{t_1}^{t_2} A_i(t)\, dt, \; i = 1, \ldots, m\right\}$$

Предположение 2. Существуют числа $\varepsilon_i \leqslant \beta_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, такие, что множество E в равенстве (2.2) имеет вид

$$E = \{x \in R^m : \varepsilon_i \leqslant (x_i, x) \leqslant \beta_i, \; i = 1, \ldots, m\}$$

Обозначим

$$b_i(t) = \min\nolimits_x (x_i, x), \; B_i(t) = \max\nolimits_x (x_i, x), \; x \in \pi_1(t) V$$

$$\mu_i(t) = \int_0^t (a_i(\tau) - b_i(\tau))\, d\tau, \quad \nu_i(t) = \int_0^t (A_i(\tau) - B_i(\tau))\, d\tau$$

Тогда, полагая в (2.4) $\tau = 0$ и используя леммы 2.1 и 2.2, а также равенство (2.10), получим

(2.11) $$W^1(t) = \{z \in R^n : \varepsilon_i + \mu_i(t) \leqslant (x_i, \pi_1(t) z) \leqslant \beta_i + \nu_i(t), \; i = 1, \ldots, m\}$$

Пусть

$$t_0 = \sup \{t \geqslant 0 : \varepsilon_i + \mu_i(\tau) \leqslant \beta_i + \nu_i(\tau), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t, \quad i = 1, \ldots, m\} \tag{2.12}$$

Тогда при всех $0 \leqslant t \leqslant t_0$ множество (2.11) не пусто. Из (2.4), равенства (2.10), лемм 2.1 и 2.2 следует, что $T_\tau (T_{t-\tau}(Z)) = T_t(Z)$ при $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant t_0$. Следовательно, $W^2(t) = W^1(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant t_0$.

Пусть $t_0 = +\infty$. Тогда из следствия 1 получим, что $W(t) = W^1(t)$ для всех $t \geqslant 0$.

Если $t_0 < +\infty$, то из определения числа t_0 (2.12) и из равенства (2.11) следует существование последовательности чисел $t_i \to t_0$, $t_i > t_0$, такой, что множества $W^1(t_i)$ пустые. В силу следствия 2 $W(t) = W^2(t)$. Другими словами, $W(t) = T_t(Z)$ при $0 \leqslant t \leqslant t_0$ и множество $W(t)$ пустое при $t > t_0$.

3. Результат п.2 может быть использован при решении игровой задачи с фиксированным временем t_1 и терминальной платой, равной

$$g(z(t_1)) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |(x_i, \pi z(t_1))| \tag{3.1}$$

Первый игрок, выбирая управление u, стремится минимизировать значение величины (3.1), а второй игрок — максимизировать.

При нахождении цены $G(z)$ рассматриваемой игры (z — начальная позиция) будем следовать работе [2]. При каждом $\beta \geqslant 0$ положим

$$E(\beta) = \{x \in R^m : -\beta \leqslant (x_i, x) \leqslant \beta, \quad i = 1, \ldots, m\}$$

Тогда, как следует из (3.1), множество $Z(\beta)$ тех точек $z \in R^n$, где $g(z) \leqslant \beta$, имеет вид

$$Z(\beta) = \{z \in R^n : \pi z \in E(\beta)\} \tag{3.2}$$

Стабильный мост, ведущий на цель (3.2), обозначим $W(t_1, \beta)$. Тогда цена игры определяется следующим образом:

$$G(z) = \min \{\beta \geqslant 0 : z \in W(t_1, \beta)\} \tag{3.3}$$

Положим в (2.11) и (2.12) $\varepsilon_i = -\beta$, $\beta_i = \beta$. Тогда число t_0 (2.12) зависит от β, т. е. $t_0 = t(\beta)$. Из (3.3), (2.11), (2.12) получим, что $G(z)$ равняется минимальному из чисел $\beta \geqslant 0$, которые удовлетворяют следующим двум неравенствам:

$$t_1 \leqslant t(\beta)$$
$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} (|(x_i, \pi_1(t_1) z) - (\nu_i(t_1) + \mu_i(t_1)) / 2| + (\mu_i(t_1) - \nu_i(t_1)) / 2) \leqslant \beta$$

Первое из этих неравенств означает, что множество $W(t_1, \beta)$ не пусто. Второе неравенство равносильно включению $z \in W(t_1, \beta)$.

В качестве примера рассмотрим игру

$$z_1^{\cdot} = z_3 + v_1, \quad z_2^{\cdot} = z_4 + v_2, \quad v_1^2 + v_2^2 \leqslant 1$$
$$z_3^{\cdot} = u_1, \quad z_4^{\cdot} = u_2, \quad |u_1| \leqslant 1, \quad |u_2| \leqslant 1$$

Пусть терминальная плата равна $g(z(t_1)) = \max(|z_1(t_1)|, |z_2(t_1)|)$.
Расчет по изложенной выше схеме показывает, что цена игры имеет следующий вид:

$$G(z) = G_1(z) = \max(|z_1 + t_1 z_3|, \ |z_2 + t_1 z_4|) + t_1 - t_1^2 / 2 \quad \text{при}$$
$$t_1 \leqslant 1$$
$$G(z) = \max(1/2, G_1(z)) \text{ при } t_1 > 1$$

Отметим, что последовательные процедуры построения функции значения или минимакса выигрыша в игре сближения в заданный момент времени рассматривались, например, в работах [4, 5].

Поступила 11 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
2. *Пшеничный Б. Н., Сагайдак М. И.* О дифференциальных играх с фиксированным временем. Кибернетика, 1970, № 2.
3. *Понтрягин Л. С.* О линейных дифференциальных играх. 2. Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 4.
4. *Ченцов А. Г.* О структуре одной игровой задачи сближения. Докл. АН СССР, 1975, т. 224, № 6.
5. *Ченцов А. Г.* Об игровой задаче сближения в заданный момент времени. Матем. сб., 1976, т. 99, № 3.

УДК 531.36 : 534

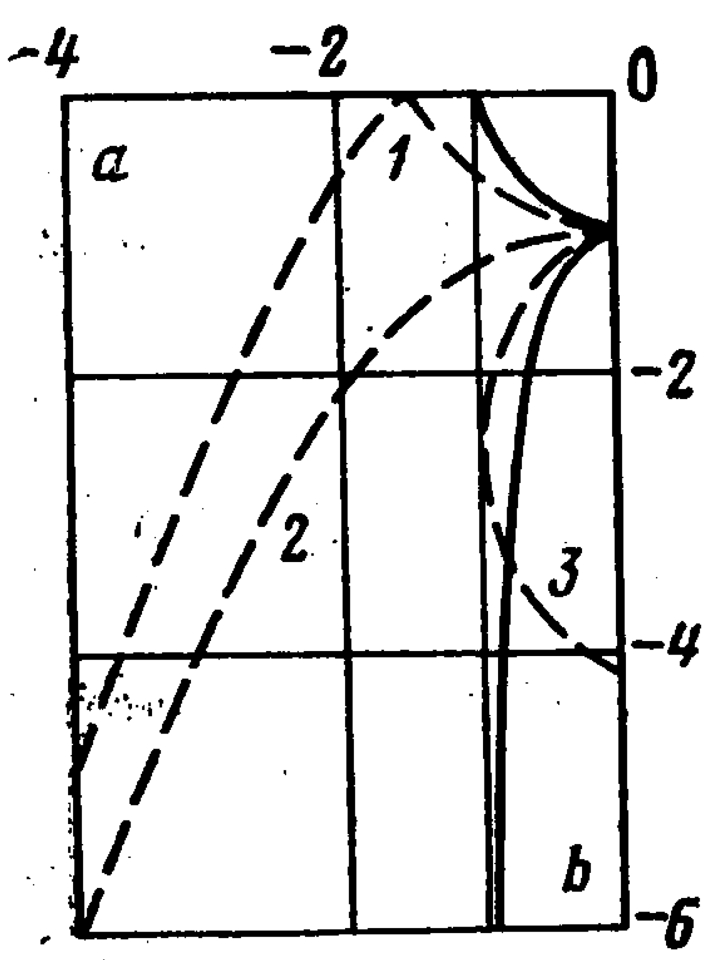
О БИФУРКАЦИЯХ СЕПАРАТРИС В ЗАДАЧЕ О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОКОЛЕБАНИЙ ВБЛИЗИ РЕЗОНАНСА 1:4

Ф. С. Березовская, А. И. Хибник

(Пущино)

Рассматривается задача о бифуркациях периодического движения вблизи резонанса 1 : n при $n = 4$. Эта задача приводится к исследованию некоторого комплексного дифференциального уравнения, зависящего от комплексного параметра ε. При обходе ε вокруг нуля в уравнении возникает последовательность бифуркаций в общем случае коразмерности 1. При выполнении определенных условий на коэффициенты уравнения (условий вырождения) в бифуркационной последовательности встречаются бифуркации коразмерности 2 и выше. В работе найдены условия вырождения, связанные с перестройками сепаратрис, что позволило описать все бифуркационные последовательности общего вида.

Для $n \neq 4$ аналогичная задача была решена ранее [1, 2]; вследствие того что все бифуркации коразмерности 2 оказались локальными, их удалось описать явными алгебраическими условиями. Резонанс 1 : 4 выделяется тем, что часть бифуркаций коразмерности 2 связана с перестройками сепаратрис. Для исследования таких бифуркаций используются как аналитические, так и численные методы.



Фиг. 1

Рассматривается комплексное дифференциальное уравнение

$$z^{\cdot} = e^{i\alpha}z + Az\,|z|^2 + \bar{z}^3, \quad 0 \leqslant \alpha < 2\pi, \; A = a + ib \tag{0.1}$$

На фиг. 1 приводится параметрический портрет уравнения (0.1) — разбиение плоскости параметра A кривыми, отвечающими бифуркациям коразмерности 2 (в связи с симметрией показана лишь область $\operatorname{Re} A \leqslant 0$, $\operatorname{Im} A \leqslant 0$). Кривые, отвечающие нелокальным бифуркациям — образованию кратного сепаратрисного цикла и циклов, состоящих из сепаратрис седлоузлов, получены численно. На фиг. 1 они показаны штриховыми линиями. (Вид этих кривых предсказан в [2]). Последовательности бифуркаций во всех областях фиг. 1 описаны ранее [1].

---

[1] *Березовская Ф. С., Хибник А. И.* К задаче о бифуркациях автоколебаний вблизи резонанса 1 : 4 (исследование модельного уравнения). Препринт, Пущино, 1979.