

**НЕКОТОРЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ И СТАТИЧЕСКАЯ
КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
ДЛЯ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ**

М. И. Чебаков

(Ростов-на-Дону)

Рассматриваются осесимметричные динамические контактные задачи теории упругости о вертикальных (задача 1) и крутильных (задача 2) колебаниях штампа, расположенного на плоской границе кругового цилиндра конечных размеров. Для задачи 1 предполагается, что боковая поверхность цилиндра соприкасается с гладкой жесткой обложкой, для задачи 2 — боковая поверхность цилиндра неподвижна. Рассматривается также статическая задача (задача 3), аналогичная по постановке задаче 1. Для решения поставленных задач используется метод однородных решений [1]. Приводятся условия обобщенной ортогональности осесимметричных однородных решений в задаче об установившихся колебаниях слоя, полученные аналогично тому, как это было сделано в работе [2]. Рассмотрен числовой пример, который показывает, что в статической задаче при фиксированных значениях высоты цилиндра и радиуса штампа сопротивление цилиндра внедрению штампа — немонотонная функция радиуса цилиндра.

Задача 1 другим методом изучалась в работе [3], ряд близких по постановке осесимметричных контактных задач для цилиндра рассматривался в работах [4-9] и др.

1. Условие обобщенной ортогональности однородных решений в задаче об установившихся колебаниях слоя. Рассмотрим упругий слой $|z| \leq h$, $r \geq 0$ (r, z, φ — цилиндрические координаты), пусть его грани $z = \pm h$ а) неподвижны, б) свободны от напряжений или в) грань $z = h$ неподвижна, а $z = -h$ свободна от напряжений. Разыскивая решение уравнений Ламе в виде

$$(1.1) \quad u_k(r, z) = A_k(z)J_1(p_k r), \quad w_k(r, z) = B_k(z)J_0(p_k r)$$

где $u_k(r, z)e^{i\omega t}$ и $w_k(r, z)e^{i\omega t}$ — соответственно проекции вектора перемещений на оси r и z , ω — частота колебаний, t — время, получим систему дифференциальных уравнений

$$(1.2) \quad \begin{aligned} A_k'' + (\theta_2^2 - \alpha p_k^2)A_k - (1-2\nu)^{-1}p_k B_k' &= 0 \\ \alpha B_k'' + (\theta_2^2 - p_k^2)B_k + (1-2\nu)^{-1}p_k A_k' &= 0, \quad \theta_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu}, \\ \alpha &= 2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \end{aligned}$$

при условии

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \text{а) } A_k(\pm h) = B_k(\pm h) = 0, \quad \text{б) } \sigma_{zk}^*(\pm h) = \tau_k^*(\pm h) = 0 \\ \text{в) } A_k(h) = B_k(h) = \sigma_{zk}^*(-h) = \tau_k^*(-h) = 0 \end{aligned}$$

где ρ — плотность, μ , ν — упругие постоянные материала, компоненты тензора напряжений без учета временного множителя имеют вид

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \sigma_{zk}(r, z) &= \mu \sigma_{zk}^*(z) J_0(p_k r), \quad \tau_{rz}(r, z) = \mu \tau_k^*(z) J_1(p_k r) \\ \sigma_{rk} &= \mu [\sigma_{rk}^*(z) J_0(p_k r) - 2A_k(z) r^{-1} J_1(p_k r)] \\ \sigma_{zk}^*(z) &= \beta p_k A_k(z) + \alpha B_k'(z), \quad \tau_k^*(z) = A_k'(z) - p_k B_k(z) \\ \sigma_{rk}^*(z) &= \alpha p_k A_k(z) + \beta B_k'(z) \end{aligned}$$

Пусть задача (1.2), (1.3) имеет только простые собственные значения и $p_j^2 \neq p_n^2$, тогда ее собственные функции удовлетворяют следующим соотношениям обобщенной ортогональности (λ — упругая постоянная материала):

$$(1.5) \quad \begin{aligned} U_{jn} &= \int_{-h}^h [p_j p_n B_j B_n + \theta_2^2 A_j A_n - A_j' A_n'] dz = 0 \\ V_{jn} &= \int_{-h}^h [p_j p_n A_j A_n + \theta_1^2 B_j B_n - B_j' B_n'] dz = 0 \\ W_{jn} &= \int_{-h}^h [\sigma_{rj}^* A_n - B_j \tau_n^*] dz = 0, \quad \theta_1^2 = \frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu} \end{aligned}$$

Первые два соотношения (1.5) получены аналогично тому, как это было сделано в работе [2] для плоской задачи. Также можно показать, что

$$(1.6) \quad \begin{aligned} W_{jn} &= 2(p_n^2 - p_j^2)^{-1} [p_n \sigma_{zn}^*(z) B_j(z) - p_n B_n(z) \sigma_{zj}^*(z) - \\ &- p_j \tau_j^*(z) A_n(z) + p_j A_j(z) \tau_n^*(z)] \Big|_{-h}^h \end{aligned}$$

Отсюда следует последнее соотношение (1.5) с учетом любого граничного условия (1.3).

2. Вертикальные колебания штампа. Рассмотрим осесимметричную контактную задачу о вертикальных нерезонансных колебаниях штампа радиуса a , лежащего без трения на плоской границе кругового цилиндра радиуса R и высоты h , под действием вертикальной силы $P e^{-i\omega t}$ при следующих граничных условиях:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \sigma_z(r, z) &= 0 \quad (z = h, a < r < R), \quad w(r, z) = \delta(r) \quad (z = h, r \leq a) \\ \tau_{rz}(r, z) &= 0 \quad (z = h, z = 0, r \leq R), \quad w(r, z) = 0 \quad (z = 0, \\ &r \leq R) \\ \tau_{rz}(r, z) &= u(r, z) = 0 \quad (r = R, 0 \leq z \leq h) \end{aligned}$$

Здесь $u e^{-i\omega t}$, $w e^{-i\omega t}$ — проекции вектора перемещения соответственно на оси r и z , $\sigma_z e^{-i\omega t}$, $\tau_{rz} e^{-i\omega t}$ — компоненты тензора напряжений.

Для решения поставленной задачи применим метод однородных решений [4]. В соответствии со схемой этого метода на первом этапе найдем решение задачи для слоя, когда

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \sigma_z(r, z) &= q(r) \quad (z = h, r \leq a) \\ \sigma_z(r, z) &= 0 \quad (z = h, r > a) \\ \tau_{rz}(r, z) &= 0 \quad (z = h), \quad \tau_{rz}(r, z) = w(r, z) = 0, \quad (z = 0) \end{aligned}$$

Используя принцип предельного поглощения [10], нагрузим правые части уравнений Ламе соответственно членами

$$\varepsilon \rho \omega \partial (ue^{-i\omega t}) / \partial t, \quad \varepsilon \rho \omega \partial (we^{-i\omega t}) / \partial t$$

(ε — коэффициент фиктивного поглощения) и будем разыскивать решение таких уравнений в виде $ue^{-i\omega t}$, $we^{-i\omega t}$. Разделяя переменные и применяя к полученным уравнениям для u и w преобразование Ханкеля, получим

$$(2.3) \quad w^{(1)}(r, z) = \frac{1}{\mu} \int_0^a q(\rho) \rho d\rho \int_0^\infty L_\varepsilon(z, u) J_0(ur) J_0(u\rho) u du$$

$$u^{(1)}(r, z) = \frac{1}{\mu} \int_0^a q(\rho) \rho d\rho \int_0^\infty L_{1\varepsilon}(z, u) J_1(ur) J_0(u\rho) u du$$

$$\tau_{rz}^{(1)}(r, z) = \int_0^a q(\rho) \rho d\rho \int_0^\infty L_{2\varepsilon}(z, u) J_1(ur) J_0(u\rho) u du$$

$$L_\varepsilon(z, u) = B(z, u) \gamma(u), \quad L_{1\varepsilon}(z, u) = A(z, u) \gamma(u)$$

$$L_{2\varepsilon}(z, u) = [A'(z, u) - uB(z, u)] \gamma(u),$$

$$\gamma(u) = [\beta u A(h, u) + \alpha B'(h, u)]^{-1}$$

$$A(z, u) = u\kappa_\varepsilon^{-1} [(\eta_\varepsilon^2 + u^2) \operatorname{sh} \eta_\varepsilon h \operatorname{ch} \kappa_\varepsilon z - 2\kappa_\varepsilon \eta_\varepsilon \operatorname{ch} \eta_\varepsilon z \operatorname{sh} \kappa_\varepsilon h]$$

$$B(z, u) = -[(\eta_\varepsilon^2 + u^2) \operatorname{sh} \eta_\varepsilon h \operatorname{sh} \kappa_\varepsilon z - 2u^2 \operatorname{sh} \eta_\varepsilon z \operatorname{sh} \kappa_\varepsilon h]$$

$$\kappa_\varepsilon^2 = u^2 - \rho\omega^2(1 + i\varepsilon) / (\lambda + 2\mu), \quad \eta_\varepsilon^2 = u^2 - \rho\omega^2(1 + i\varepsilon) / \mu$$

где штрих означает производную по первому аргументу.

На втором этапе решения построим систему однородных решений видоизмененных указанным выше образом уравнений Ламе для слоя, когда

$$\sigma_z(r, z) = \tau_{rz}(r, z) = 0 \quad (z = h), \quad w(r, z) = \tau_{rz}(r, z) = 0 \quad (z = 0)$$

Эти граничные условия будут равносильны условиям б), приведенным в п. 1, если краевую задачу симметрично продолжить в область $-h \leq z < 0$. Проекция вектора перемещений и компоненты тензора напряжений будут иметь вид (1.1), (1.4), где

$$(2.4) \quad A_k(z) = A(z, p_k), \quad B_k(z) = B(z, p_k)$$

и при этом κ_ε^2 и η_ε^2 необходимо заменить соответственно на

$$\kappa_{k\varepsilon}^2 = p_k^2 - \rho\omega^2(1 + i\varepsilon) / (\lambda + 2\mu), \quad \eta_{k\varepsilon}^2 = p_k^2 - \rho\omega^2(1 + i\varepsilon) / \mu$$

$$(\beta p_k A_k(h) + \alpha B_k'(h) = 0)$$

где p_k — корни уравнения, приведенного в скобках.

На третьем этапе введем в рассмотрение функции

$$(2.5) \quad u^{(2)}(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k A_k(z) J_1(p_k r)$$

$$w^{(2)}(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k B_k(z) J_0(p_k r), \quad \tau_{rz}^{(2)}(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \tau_k^*(z) J_1(p_k r)$$

Здесь суммирование ведется по всем p_k , для которых $\text{Im}(p_k) > 0$, D_k — неизвестные коэффициенты.

Тогда решение задачи, поставленной в этом пункте, запишем в виде

$$(2.6) \quad u(r, z) = u^{(1)}(r, z) - u^{(2)}(r, z), \quad w(r, z) = w^{(1)}(r, z) - w^{(2)}(r, z)$$

При этом коэффициенты D_k разложения (2.5) найдем из условия

$$u(r, z) = 0, \quad \tau_{rz}(r, z) = \tau_{rz}^{(1)}(r, z) - \tau_{rz}^{(2)}(r, z) = 0 \quad (r = R)$$

которое перепишем в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_k A_k(z) J_1(p_k R) = u^{(1)}(R, z)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_k \tau_k^*(r) J_1(p_k R) = \mu^{-1} \tau_{rz}^{(1)}(R, z)$$

В последних соотношениях умножим первое равенство на $\sigma_{rj}^*(z)$, второе — на $B_j(z)$, из первого вычтем второе и проинтегрируем в пределах от $-h$ до h . Учитывая последнее соотношение (1.5), которое справедливо и при $\varepsilon \neq 0$, получим

$$(2.7) \quad D_k = (\mu W_{kk} J_1(p_k R))^{-1} \int_{-h}^h [\mu u^{(1)}(R, z) \sigma_{rk}^*(z) - \tau_{rz}^{(1)}(R, z) B_k(z)] dz =$$

$$= (\mu W_{kk} J_1(p_k R))^{-1} \int_0^a q(\rho) \Omega_k(\rho) \rho d\rho$$

$$\Omega_k(\rho) = \int_0^{\infty} M_k(u) J_1(uR) J_0(u\rho) u du$$

$$M_k(u) = \gamma(u) \int_{-h}^h [A(z, u) \sigma_{rk}^*(z) - (A'(z, u) - uB(z, u)) B_k(z)] dz$$

Сравнивая последние соотношения (2.7) и (1.5), получим $M_k(p_j) = \gamma(p_j) W_{kj}$, где функция $\gamma(u)$ описана в (2.3). Учитывая граничные условия для однородных решений и соотношение (1.6) для W_{kj} , получим

$$M_k(u) = 2uB_k(h) (u^2 - p_k^2)^{-1}$$

$$\Omega_k(\rho) = 2B_k(h) \int_0^{\infty} \frac{u^2}{u^2 - p_k^2} J_1(uR) J_0(u\rho) du =$$

$$= -2B_k(h) i p_k I_0(-i\rho p_k) K_1(-iR p_k)$$

Последний интеграл взят из [11] с учетом того, что $\text{Im}(p_k) \neq 0$ для всех p_k : $I_0(x)$ и $K_1(x)$ — модифицированные функции Бесселя.]

Теперь все граничные условия (2.1) задачи 1 выполнены, кроме условия

$$w(r, z) = w^{(1)}(r, z) - w^{(2)}(r, z) = \delta(r) \quad (z = h, r \leq a)$$

Введем оператор $K_{rh} q = \mu w^{(1)}(r, h)$, где $w^{(1)}(r, h)$ описывается одной из формул (2.3). Тогда, удовлетворяя последнему условию, для контакт-

ного давления $q(\rho)$ под штампом получим интегральное уравнение

$$\mu^{-1} K_{rh}^e q = \delta(r) + \sum_{k=1}^{\infty} D_k B_k(h) J_0(p_k r) \quad (r \leq a)$$

Если $q(\rho)$ представить в виде

$$(2.8) \quad q(\rho) = \frac{\mu}{1-\nu} \left[q_0(\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} D_k B_k(h) q_k(\rho) \right]$$

где $q_k(\rho)$ — решение интегральных уравнений

$$(2.9) \quad K_{rh}^e q_0 = (1-\nu)\delta(r) \quad (r \leq a), \quad K_{rh}^e q_k = (1-\nu)J_0(p_k r) \\ (k \geq 1, r \leq a)$$

и подставить (2.8) в (2.7), получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения постоянных D_k разложения (2.8)

$$(2.10) \quad x_k = g_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} x_n \quad (x_k = D_k B_k(h) I_1(R\gamma_k/h), k \geq 1) \\ a_{kn} = -2i\gamma_k W_{kk}^{-1} B_k^2(h) K_1(R\gamma_k/h) I_1^{-1}(R\gamma_n/h) T_{n,k} \\ g_k = -2i\gamma_k W_{kk}^{-1} B_k^2(h) K_1(R\gamma_k/h) T_{0,k}, \quad \gamma_k = -ip_k h \\ T_{n,k} = \int_0^{\infty} q_n(\rho) I_0(\rho\gamma_k/h) \rho d\rho$$

До сих пор считалось, что коэффициент фиктивного поглощения среды $\varepsilon > 0$. Устремляя ε к нулю, получим решение исходной задачи 1. При этом следует учесть [12], что некоторые нули и полюсы функции $L_\varepsilon(h, u)$ из (2.3) при $\varepsilon \rightarrow 0$ перейдут на действительную ось, что вызовет деформацию контура интегрирования в выражении ядра интегральных уравнений (2.9). О том, как будет выглядеть этот контур Γ , подробно сказано в работе [12].

Таким образом, контактное давление определяется формулой

$$(2.11) \quad q(\rho) = \frac{\mu}{1-\nu} \left[q_0(\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} x_k I_1^{-1}(\gamma_k R/h) q_k(\rho) \right]$$

где x_k — решение системы (2.10) при $\varepsilon = 0$, $q_k(\rho)$ — решение известных [12] интегральных уравнений ($q_k(a\rho) = \vartheta_k(\rho)$), записанных в безразмерных переменных

$$(2.12) \quad \int_0^1 \vartheta_k(\rho) \rho d\rho \int_{\Gamma} L(u\lambda) J_0(ur) J_0(u\rho) du = f_k(r) \quad (r \leq 1)$$

$$(2.13) \quad L(\tau) = \frac{\theta_2^{*2} (1-\nu)^{-1} \tau \kappa \operatorname{sh} \kappa \operatorname{ch} \eta}{4\tau^2 \kappa \eta \operatorname{ch} \eta \operatorname{sh} \kappa - (\eta^2 + \tau^2)^2 \operatorname{sh} \eta \operatorname{ch} \kappa} \\ \lambda = \frac{h}{a}, \quad \kappa^2 = \tau^2 - \theta_1^{*2}, \quad \eta^2 = \tau^2 - \theta_2^{*2}, \quad \theta_1^{*2} = \frac{\rho\omega^2 h}{\lambda + 2\mu} \\ \theta_2^{*2} = \frac{\rho\omega^2 h}{\mu}$$

$$(2.14) \quad f_k(r) = \{ \delta(ra), \text{ если } k=0; I_0(a\gamma_k r/h), \text{ если } k \geq 1 \}$$

В формулах (2.12) далее будем считать, что γ_k — полюсы функции $L(\tau)$ (2.13). Контур Γ совпадает с положительной частью вещественной оси всюду, за исключением отрезков, содержащих вещественные полюсы функции $L(\tau)$ [12]. В случае чередования нулей и полюсов этой функции указанные отрезки обходятся контуром снизу [12].

Исследуем бесконечную систему (2.10). Известно [12], что функция $L(\tau)$ имеет конечное число действительных нулей и полюсов и число их возрастает с ростом приведенной частоты θ_2^* . Комплексные полюсы функции $L(\tau)$ при больших номерах имеют следующее асимптотическое представление¹ (a_i ($i = 1, 2, 3, 4$) — действительные постоянные):

$$(2.15) \quad z_n = ih\gamma_n \sim ina_1 + a_2 \ln(a_3n + a_4)$$

Учитывая (2.15), можно показать, как это было сделано в работах [1, 13], что с ростом номеров коэффициенты бесконечной системы (2.10) имеют следующую асимптотику ($k, n \rightarrow \infty$):

$$(2.16) \quad |g_k| \sim k^{-1} \exp[-a_1k(R-a)/h], \quad |a_{kn}| \sim k^{-1} \exp[-a_1(k+n)(R-a)/h]$$

Следовательно, система (2.10) принадлежит к типу нормальных систем Пуанкаре — Коха и ее решение может быть получено методом редукции при любых значениях параметра $(R-a)/h > 0$.

3. Крутильные колебания штампа. Рассмотрим осесимметричную контактную задачу о крутильных нерезонансных колебаниях штампа радиуса a , жестко сцепленного с плоской границей кругового цилиндра радиуса R и высоты h , под действием момента $Me^{-i\omega t}$ при следующих граничных условиях:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} v(r, z) &= \delta r \quad (r \leq a, z = h), \quad \tau_{z\varphi}(r, z) = 0 \quad (a < r < R, z = h) \\ v(r, z) &= 0 \quad (z = 0, r \leq R \text{ и } r = R, 0 \leq z \leq h) \end{aligned}$$

Здесь $ve^{-i\omega t}$ — перемещение вдоль оси φ , $\tau_{z\varphi}e^{-i\omega t}$ — касательные напряжения, δ — амплитуда колебаний штампа.

Методом однородных решений, подобно тому как это было сделано для аналогичной статической задачи в работе [13], эта задача может быть сведена к исследованию бесконечной системы (2.10) с коэффициентами

$$(3.2) \quad \begin{aligned} g_k &= 2(-1)^k K_1(R\gamma_k/h) T_{0,k} \\ a_{kn} &= 2(-1)^{k+n} h^{-1} K_1(R\gamma_k/h) I_1^{-1}(R\gamma_1/h) T_{n,k} \\ T_{n,k} &= \int_0^a \tau_n(\rho) I_1(\rho\gamma_k/h) \rho d\rho, \quad i\gamma_k = [\kappa^2 - \pi^2(k-1/2)^2]^{1/2} \\ L(u) &= (\sqrt{u^2 - \kappa^2})^{-1} u \operatorname{th} \sqrt{u^2 - \kappa^2}, \quad \kappa^2 = \rho\omega^2 h^2 \mu^{-1} \\ f_k(x) &= \{\delta x, \text{ если } k = 0; a^{-1} I_1(a\gamma_k x/h), \text{ если } k \geq 1\} \end{aligned}$$

Здесь $\tau_n(a\rho) = \vartheta_n(\rho)$ — решения интегральных уравнений (2.12) при $n = 1$, $z_k = i\gamma_k$ — полюсы функции $L(u)$, о выборе контура сказано в п. 2.

¹ Мазма В. К. Трехмерные динамические задачи установившихся колебаний плит. Автореф. канд. дис. Ростов-на-Дону, 1979.

Контактные касательные напряжения под штампом выражаются формулой

$$(3.3) \quad \tau(r) = \mu \tau_0(r) + \frac{\mu}{h} \sum_{k=1}^{\infty} x_k (-1)^k \tau_k(r) I_1^{-1}(R\gamma_k/h)$$

Для коэффициентов (3.2) здесь также справедливы асимптотики (2.16), где $a_1 = \pi$, и, следовательно, система (2.10) с коэффициентами (3.2) принадлежит к типу нормальных систем Пуанкаре — Коха.

4. Статическая контактная задача. Рассмотрим статическую осесимметричную контактную задачу о вдавливании силой P штампа радиуса a в плоскую границу кругового цилиндра радиуса R и высоты h . Граничные условия имеют вид (2.1), где u, w — проекции вектора перемещения, σ_z, τ_{rz} — компоненты тензора напряжений.

Здесь, как и в задаче 1, применяя метод однородных решений, найдем контактное давление по формуле (2.11), в которой x_k — решение системы вида (2.10) с коэффициентами

$$(4.1) \quad \begin{aligned} g_k &= \operatorname{tg}^2 \gamma_k K_1(R\gamma_k/h) T_{0,k} \\ a_{kn} &= h^{-1} \operatorname{tg}^2 \gamma_k K_1(R\gamma_k/h) I_1^{-1}(R\gamma_k/h) T_{n,k} \end{aligned}$$

$$(4.2) \quad L(u) = (\operatorname{ch} 2u - 1) (2u + \operatorname{sh} 2u)^{-1}$$

Функция $T_{n,k}$ описана в (2.10), $q_k(a\rho)$ — решение интегрального уравнения (2.12), где $f_k(r)$ имеет вид (2.14), $i\gamma_k$ — комплексные полюса функции $L(\tau)$, лежащие в верхней полуплоскости. Так как функция $L(\tau)$ не имеет действительных полюсов, то контур Γ в уравнении (2.12) будет полностью совпадать с положительной частью вещественной оси. Бесконечная система (2.10) — (4.1) здесь также будет принадлежать к типу нормальных систем Пуанкаре — Коха.

5. Решение интегральных уравнений (2.12). К интегральным уравнениям типа (2.12) сводятся аналогичные задачам 1—3 контактные задачи для упругого слоя. Такие уравнения хорошо изучены и для нахождения их решения можно воспользоваться, например, асимптотическими методами [14]. Известно (см., например, [15]), что уравнение (2.12) при условии $\lim L(\tau) = 1 + O(\tau^{-2})$ ($\tau \rightarrow 0$) равносильно интегральному уравнению второго рода

$$(5.1) \quad \varphi_k(t) = \frac{1}{\pi\lambda} \int_{-1}^1 \varphi_k(\tau) M\left(\frac{t-\tau}{\lambda}\right) d\tau + d_k(t) \quad (|t| \leq 1)$$

$$(5.2) \quad M(y) = \int_{\Gamma} [1 - L(u)] \cos uy du$$

где $L(u)$ есть (2.13) (задача 1), (3.3) (задача 2) либо (4.2) (задача 3). Для динамических задач контур Γ расположен как было описано в пп. 2, 3; для статической задачи он совпадает с положительной частью действительной оси. Кроме того, для задач 1, 3

$$(5.3) \quad \vartheta_k(r) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dr} r \int_r^1 \frac{\varphi_k(\tau) d\tau}{\tau \sqrt{\tau^2 - r^2}}, \quad d_k(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{r f_k(r) dr}{\sqrt{t^2 - r^2}}$$

для задачи 2

$$(5.4) \quad \vartheta_k(r) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dr} \int_r^1 \frac{\varphi_k(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}}, \quad d_k(t) = \frac{d}{dt} t \int_0^t \frac{f_k(r) dr}{\sqrt{t^2 - r^2}}$$

Для решения интегрального уравнения (5.1), (5.2) используем метод больших λ (см., например, [16]), для его необходимо представить ядро (5.2) в виде ряда по положительным степеням $|y|$. Для задачи 3 это нетрудно сделать [14]

$$(5.5) \quad M(y) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k y^{2k}, \quad b_k = \frac{(-1)^k}{(2k)!} \int_0^{\infty} [1 - L(u)] u^{2k} du$$

и в этом случае решение уравнения (5.1), (5.5) для больших λ можно записать в виде [13, 16]

$$(5.6) \quad \varphi_m(t) = d_m(t) + \sum_{j=0}^M H_j^m t^{2j}, \quad H_j^m(\lambda) = \sum_{s=j}^M \lambda^{-(2s+1)} [\beta_{sj}^m + \lambda^{-1} d_{s+1,j}^m]$$

где M — сколь угодно большое число, коэффициенты β_{sj}^m и α_{sj}^m определяются из простых рекуррентных соотношений

$$(5.7) \quad \alpha_{sj}^m = \frac{2}{\pi} \sum_{k=j}^{s-1} b_k z_{kj} \sum_{p=0}^{s-k-1} \frac{\beta_{s-k-1,p}^m}{2p+2k-2j+1} \quad \left(\begin{array}{l} s \geq 1 \\ 0 \leq j \leq s-1 \end{array} \right)$$

$$\beta_{sj}^m = \frac{2}{\pi} \left[a^{-1} b_s z_{sj} F_{s-j}^m + \sum_{k=j}^{s-1} b_k z_{kj} \times \right. \\ \left. \times \sum_{p=0}^{s-k-1} \frac{\alpha_{s-k,p}^m}{2p+2k-2j+1} \right] \quad \left(\begin{array}{l} s \geq 0 \\ 0 \leq j \leq s \end{array} \right)$$

$$\beta_{00}^m = \frac{2}{\pi} b_0 z_{00} a^{-1} F_0^m, \quad z_{kj} = (2k)! [(2j)! (2k-2j)!]^{-1}$$

$$(5.8) \quad F_k^0 = \delta (2k+1)^{-1}$$

$$F_k^m = \frac{(2k)!}{(a\gamma_m)^{2k+1}} \left[\sum_{i=0}^k \frac{(a\gamma_m)^{2i}}{(2i)!} \operatorname{sh} a\gamma_m - \sum_{i=1}^k \frac{(a\gamma_m)^{2i-1}}{(2i-1)!} \operatorname{ch} a\gamma_m \right] \quad (m \geq 1)$$

Таким образом, в случае больших значений параметра λ ($\lambda_0 < \lambda < \infty$) решение (5.6) может быть получено с любой степенью точности.

Для ядра (5.2) задач 1,2 справедливо разложение

$$(5.9) \quad M(y) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k |y|^k \quad (0 \leq y \leq y_0 < \infty)$$

Покажем, как это разложение можно получить для задачи 2, для задачи 1 это можно будет сделать аналогично.

Представим $L(u)$ в виде $L(u) = L_1(u) + L_2(u)$ при условии

$$(5.10) \quad L_2(u) = o(e^{-2u}), \quad L_1(u) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} c_i u^{-2i} \quad (u \rightarrow \infty)$$

Этого можно добиться, если

$$(5.11) \quad L_1(u) = \frac{u}{\sqrt{u^2 - \kappa^2}}, \quad L_2(u) = \frac{u (\operatorname{th} \sqrt{u^2 - \kappa^2} - 1)}{\sqrt{u^2 - \kappa^2}}$$

Тогда

$$\begin{aligned} M(y) &= M_1(y) + M_2(y), \quad M_2(y) = \int_{\Gamma} L_2(u) \cos uy \, du = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} y^{2k} (-1)^k [(2k)!]^{-1} \int_{\Gamma} L_2(u) u^{2k} \, du \\ M_1(y) &= \int_{\Gamma} [1 - L_1(u)] \cos uy \, du = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^* |y|^k \\ b_{2k+1}^* &= \frac{\pi (-1)^k c_{k+1}}{2(2k+1)!}, \quad b_{2k}^* = \frac{(-1)^k}{(2k)!} \int_{\Gamma} \left[1 - L(u) - \sum_{i=1}^k \frac{c_i}{u^{2i}} \right] u^{2k} \, du \end{aligned}$$

Разложение $M_1(y)$ в ряд можно получить по аналогии с разложением (1.3) работы [17]. Таким образом, ядро (5.2) интегрального уравнения (5.1) для задач 1, 2 представимо в виде ряда (5.9) и, следовательно, решение этого уравнения можно получить методом больших λ с любой степенью точности в виде (5.6), где

$$(5.12) \quad H_j^m(\lambda) = \sum_{s=j}^M \lambda^{-2s} [\eta_{2s,j}^m + \lambda^{-1} \eta_{2s+1,j}^m]$$

а для коэффициентов $\eta_{s,j}^m$ справедливы рекуррентные соотношения типа (1.6) работы [16].

Зная решение уравнений (5.4) в виде (5.6) и используя выражения (5.3), (5.4), можем теперь получить простые выражения для вычисления коэффициентов системы (2.10) задач 1, 2.

6. Пример. Рассмотрим статическую задачу о внедрении штампа с плоской подошвой ($\delta(r) = \delta = \text{const}$) в упругий цилиндр (задача 3, п. 4).

Для этой задачи контактные напряжения

$$\begin{aligned} (6.1) \quad q(r) &= \frac{\mu\delta}{1-\nu} \left[q_0(r) + \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} x_k I_1^{-1}(\gamma_k R/h) q_k(r) \right] \quad (r \leq a) \\ q_k(\rho a) &= \frac{2'}{\pi} \left[\sum_{j=0}^M H_j^k(\lambda) S_j(\rho) + G_k(\rho) \right] \quad (\rho \leq 1, M \rightarrow \infty) \\ G_0(\rho) &= a^{-1} S_0(\rho), \quad G_k(\rho) = a^{-1} \frac{d}{d\rho} \rho \int_{\rho}^1 \operatorname{ch}(a\gamma_m t/h) t^{-1} (t^2 - \rho^2)^{-1/2} dt \quad (k \geq 1) \\ S_j(\rho) &= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{(j-1)! (2j\rho^2 - 2j + 2k + 1)}{k! (j-k-1)! (2k+1)} (1-\rho^2)^k \rho^{2(j-k-1)} \end{aligned}$$

Связь между силой P , действующей на штамп, и перемещением штампа δ опреде-

ляется формулой

$$(6.2) \quad P = \frac{4a^2\mu\delta}{1-\nu} \left[P_0 + \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} x_k I_1^{-1}(\gamma_k R/h) P_k \right]$$

$$P_k = R_k + \sum_{j=0}^M H_j^k(\lambda) (2j+1)^{-1}, \quad R_0 = \delta a^{-1} R_k = ha^{-2} \gamma_k^{-1} \operatorname{sh}(a\gamma_k/h) \quad (k \geq 1)$$

где x_k — решение бесконечной системы (2.10) с коэффициентами (4.1), где

$$(6.3) \quad T_{n,k} = \frac{2a^2}{\pi} \left[\sum_{j=0}^M H_j^n(\lambda) F_j^k + t_{n,k} \right] \quad (M \rightarrow \infty)$$

$$t_{0,k} = a^{-2} h \gamma_k^{-1} \operatorname{sh} \frac{a\gamma_k}{h}, \quad t_{n,k} = \frac{h \operatorname{sh} [a(\gamma_n + \gamma_k)/h]}{2a^2(\gamma_n + \gamma_k)} + \frac{h \operatorname{sh} [a(\gamma_n - \gamma_k)/h]}{2a^2(\gamma_n - \gamma_k)}$$

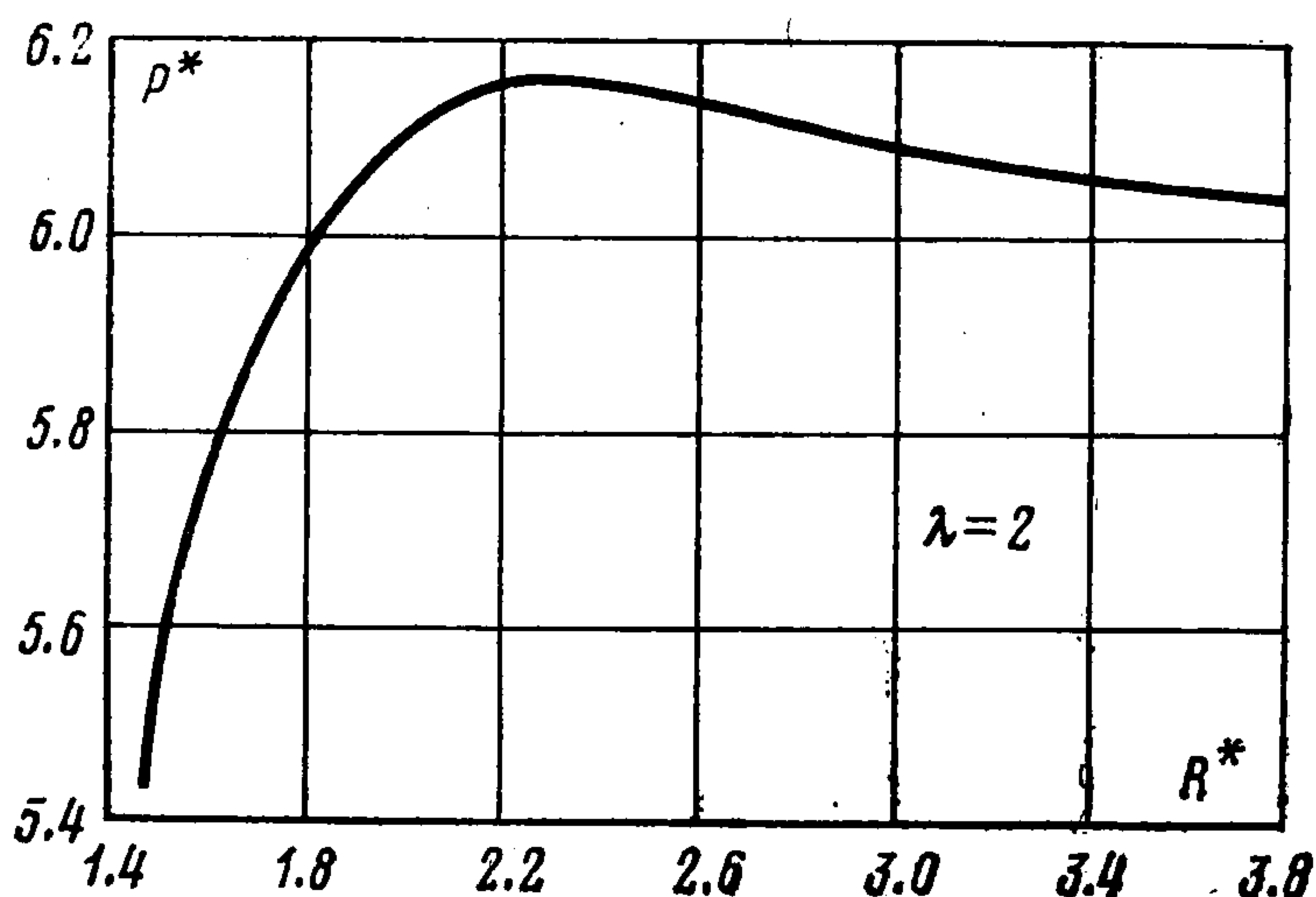
Величины F_j^k определяется формулой (5.8), $H_j^k(\lambda)$ — формулами (5.6), (5.7), γ_m — нули функции $2u + \sin 2u$, лежащие в правой полуплоскости ($\gamma_m \neq 0$), при больших номерах m известно их асимптотическое поведение [14]

$$\gamma_m \sim \pi (m - 1/4) \pm i/2 \ln(4\pi m - \pi) \quad (m \rightarrow \infty)$$

Для численного исследования задачи была составлена программа на языке фортран для ЭВМ БЭСМ-6. Исследовались безразмерные величины

$$(6.4) \quad P^* = P(1-\nu)(\mu\delta a)^{-1}, \quad q^*(\rho) = q(\rho a)(1-\nu)a(\mu\delta)^{-1} \quad (\rho \leq 1)$$

при разных значениях параметров λ и $R^* = R/a$. Значения P и $q(r)$ определялись соответственно формулами (6.2) и (6.1). Предложенный алгоритм позволяет находить



величины P^* и $q^*(\rho)$ при $\lambda \geq 1$ практически с любой степенью точности, при этом решение бесконечной системы линейных алгебраических уравнений находится методом редукции. В формулах (6.1) — (6.3), (5.6) M считалось конечным числом, что позволяло находить P^* и $q^*(\rho)$ с точностью до членов порядка λ^{-2M-1} . Отметим, что чем больше параметр $(R-a)/h$, тем меньше требовалось брать уравнений в редуцированной бесконечной системе.

(Более подробно о сходимости предложенного алгоритма см. [13].) Ниже приведены значения величин P^* и $q^*(\rho)$ в зависимости от параметров λ , R^* и ρ .

Анализ числовых значений величины P^* при фиксированном значении параметра λ позволяет сделать следующий вывод: при увеличении параметра R^* от единицы до некоторого значения, которое зависит от λ , сопротивление цилиндра внедрению штампа растет, а при дальнейшем увеличении параметра R^* это сопротивление уменьшается и стремится к некоторому постоянному значению. Наглядно это можно проследить на фигуре, где изображена зависимость P^* от R^* при $\lambda = 2$.

Отметим, что предложенный алгоритм позволяет находить решение динамических задач 1, 2 также с любой степенью точности при $\lambda > \lambda^*(\omega)$, при этом $\lambda^*(\omega)$ увеличивается с увеличением частоты ω .

$\lambda = 2$								
R^*	1.5	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	∞
P^*	5.426	6.096	6.142	6.143	6.126	6.103	6.082	6.024
$q^*(0.20)$	0.971	1.022	1.029	1.032	1.034	1.035	1.036	1.039
$q^*(0.95)$	2.509	2.995	3.053	3.053	3.051	3.043	3.033	3.002
$\lambda = 4$								
R^*	1.5	2.0	2.5	3.0	3.8	∞		
P^*	2.948	4.075	4.616	4.844	4.940	4.882		
$q^*(0.20)$	0.460	0.612	0.702	0.750	—	0.804		
$q^*(0.95)$	1.351	2.001	2.311	2.444	—	2.480		

Автор благодарит В. М. Александрова за внимание к работе и обсуждение результатов.

Поступила 7 I 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М. Метод однородных решений в контактных задачах теории упругости для тел конечных размеров. Изв. Сев.-Кавказск. научн. центра высшей школы. Сер. естеств. наук, 1974, № 4.
2. Зильберглет А. С., Нуллер Б. М. Обобщенная ортогональность однородных решений в динамических задачах теории упругости. Докл. АН СССР, 1977, т. 234, № 2.
3. Белоконов А. В., Ватульян Т. И. Динамическая контактная задача для конечного цилиндра. В сб.: Тезисы докл. Всес. научно-техн. конф. «Жесткость машиностроительных конструкций», Брянск, 1976, М., 1976 (Моск. ин-т хим. машиностр.).
4. Мартиросян З. А. О двух контактных задачах для круглых упругих цилиндров конечной длины. Изв. АН АрмССР. Механика, 1978, т. 31, № 5.
5. Мелконян А. П. Об одной смешанной осесимметричной задаче теории упругости для цилиндра конечной длины. Изв. АН АрмССР. Механика, 1971, т. 24, № 2.
6. Баблоян А. А., Мелконян А. П. Об одной осесимметричной контактной задаче для цилиндра конечной длины. Изв. АрмССР. Механика, 1973, т. 26, № 5.
7. Баблоян А. А., Мелконян А. П. О двух смешанных осесимметричных задачах теории упругости. Изв. АН АрмССР. Механика, 1969, т. 22, № 5.
8. Златин А. Н. Растяжение цилиндра, содержащего периодически расположенные дискообразные трещины. Докл. АН СССР, 1978, т. 241, № 6.
9. Бородачев Н. М. О вдавливании штампа в торец полубесконечного упругого цилиндра. Прикл. механ., 1967, т. 3, вып. 9.
10. Тихонов А. Н., Самарский А. Г. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.
11. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений. М., «Наука», 1971.
12. Бабешко В. А., Векслер В. Е. Возбуждение вибрирующим штампом волн в слое. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
13. Чебаков М. И. Метод однородных решений в смешанной задаче для кругового цилиндра конечных размеров. ПММ, 1979, т. 43, вып. 6.
14. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., «Наука», 1974.
15. Александров В. М., Чебаков М. И. Смешанные задачи механики сплошных сред, связанные с интегральными преобразованиями Ханкеля и Мелера — Фока. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
16. Чебаков М. И. О дальнейшем развитии «метода больших λ » в теории смешанных задач. ПММ, 1976, т. 40, вып. 3.
17. Чебаков М. И. К задаче Рейсснера — Сагочи. Прикл. механ., 1973, т. 9, вып. 12.