Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 5, 1980

УДК 531.3

МАГНИТОТЕРМОУПРУГОЕ ПОЛЕ В ТЕЛЕ С ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ РАЗРЕЗОМ

Б. А. Кудрявцев, В. З. Партон, Б. Д. Рубинский

(Москва)

Рассматривается задача магнитотермоупругости для бесконечной плоскости из электропроводящего материала с полубесконечным разрезом, который мгновенно возникает в начальный момент времени. Предполагается, что до появления разреза в плоскости существует однородное поле электрического тока в направлении, перпендикулярном линии разреза, которое приводит к концентрации тока и разогреву материала в окрестности вершины непроводящего разреза вследствие омических потерь. Исследование проводится в предположении, что влияние электромагнитного поля на процессы деформации и теплопроводности связано только с действием джоулева тепла и, таким образом, сводится к последовательному решению уравнений электродинамики и термоупругости при соответствующих условиях. Получены точные выражения компонентов электромагнитного поля, обусловленного мгновенным появлением полубесконечного разреза в начальный момент времени. Приближенно определяется нестационарное температурное поле и напряженно-деформированное состояние электропроводящего тела в окрестности вершины полубесконечного разреза.

Экспериментальное изучение процесса теплового разрушения материала в кончике трещины [1, 2] показало, что торможение трещины в реальных электропроводящих материалах путем пропускания импульса тока происходит за счет интенсивного разогрева материала до температуры плавления в малой окрестности вершины трещины с последующим образованием микрократера. Ниже проводится теоретическое исследование этого явления.

1. Рассмотрим задачу определения электромагнитного поля в неограниченной пластинке ($-\infty < x, y < \infty$, $|z| < h$, $2h$ — толщина пластинки) из электропроводного материала, через которую пропускается постоянный ток с вектором плотности $\mathbf{j}_0 = \{0, J_0, 0\}$ ($J_0 = \mathrm{const}$) и в которой мгновенно при $t = 0$ возникает полубесконечный разрез вдоль отрицательной полуоси x.

Магнитное поле в пластинке с током $\mathbf{j}_0$ определяется вектором

$$\mathbf{H}_0 = \{J_0 z, 0, 0\} \tag{1.1}$$

Векторы напряженности электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей и вектор плотности тока после образования разреза представим в виде

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} = \operatorname{rot}\mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}', \quad \mathbf{H}' = \{0, 0, H_z'(x, y, t)\} \tag{1.2}$$

где $\mathbf{H}'$ — возмущение магнитного поля, обусловленное появлением разреза, σ — коэффициент электропроводности.

В пренебрежении токами смещения уравнения Максвелла записываются в виде

$$\text{(1.3)}\qquad \frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\mu_a\frac{\partial H_z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}=\sigma E_x=j_x,\quad \frac{\partial H_z}{\partial x}=-\sigma E_y=-j_y$$

где μ_a — магнитная проницаемость, $\mathbf{j}=(j_x,\ j_y,\ 0)$ — вектор плотности тока.

С учетом последних двух уравнений (1.3) первое из уравнений (1.3) удовлетворяется тождественно, а второе запишется так:

$$\text{(1.4)}\qquad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}-\sigma\mu_a\frac{\partial H_z}{\partial t}=0$$

Считая полубесконечный разрез ($y=0,\ x<0$) непроводящим, и учитывая симметрию магнитного поля $H_z\ (x,\ y,\ t)$ относительно оси y, запишем граничные и начальные условия для H_z'

$$\text{(1.5)}\qquad y=0,\ j_x=\partial H_z'\ /\ \partial y=0\quad (x>0)$$

$$\text{(1.6)}\qquad y=0,\ j_y=J_0-\partial H_z'\ /\ \partial x=0\ (x<0)$$

$$\text{(1.7)}\qquad H_z'\ (x,\ y\ ,\ 0)=0.$$

Применяя преобразование Лапласа по t к уравнению (1.4) и условиям (1.6), (1.7), получим следующую краевую задачу для верхней полуплоскости $y>0$:

$$\text{(1.8)}\qquad \frac{\partial^2 H_z'^*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_z'^*}{\partial y^2}-k^2H_z'^*=0$$

$$y=0,\quad \partial H_z'^*\ /\ \partial x=J_0\ /\ p\quad (x<0),\quad \partial H_z'^*\ /\ \partial y=0\quad (x>0)$$

Здесь

$$H_z'^*(x,y,p)=\int\limits_0^\infty \exp(-pt)\,H_z'(x,y,t)\,dt,\quad k^2=p\sigma\mu_a$$

Решение уравнения (1.8) можно представить в виде

$$\text{(1.9)}\qquad H_z'^*(x,y,p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-ia-\infty}^{-ia+\infty}A(\lambda)\exp\left(-i\lambda x-y\sqrt{\lambda^2+k^2}\right)d\lambda,$$

$$k>a>0$$

где интегрирование производится по прямой $\operatorname{Im}\lambda=-a$ комплексной плоскости $\lambda=\xi+i\eta$ с разрезами $k<\eta<\infty,\ -\infty<\eta<-k$ вдоль мнимой оси.

Тогда граничные условия (1.5), (1.6) приводят к парным уравнениям, решение которых [3]

$$\text{(1.10)}\qquad A(\lambda)=\frac{J_0}{2p\sqrt{2\pi k}}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\frac{\lambda+2ik}{\lambda^2\sqrt{\lambda+ik}}$$

Интеграл, получающийся подстановкой (1.10) в (1.9), можно вычислить стандартным методом, замыкая путь интегрирования дугой окружности, расположенной в верхней (при $x<0$) и нижней (при $x>0$) полуплоскости. В результате имеем

$$
(1.11)\qquad H_z'^*(x,y,p)|_{x<0}=\frac{J_0x}{p}\exp(-ky)-
$$

$$
-\frac{J_0}{2\pi p\sqrt{k}}\int_k^\infty\frac{(\eta+2k)\exp(\eta x)\sin(y\sqrt{\eta^2-k^2})}{\eta^2\sqrt{\eta-k}}d\eta
$$

$$
H_z'^*(x,y,p)|_{x>0}=-\frac{J_0}{2\pi p\sqrt{k}}\int_k^\infty\frac{(2k-\eta)\exp(-\eta k)\cos(y\sqrt{\eta^2-k^2})}{\eta^2\sqrt{\eta-k}}d\eta
$$

Выполним замену переменной интегрирования в формулах (1.11)

$$
\eta=\sqrt{\xi^2+k^2}
$$

и преобразуем результат к виду, удобному для выполнения обратного преобразования Лапласа. С учетом выражений

$$
\int_0^\infty\frac{\xi\exp(-x\sqrt{\xi^2+k^2})\cos(\xi y)}{\sqrt{\xi^2+k^2}(\sqrt{\xi^2+k^2}-k)^{1/2}}d\xi=\sqrt{\frac{\pi}{2}}F(x,y)
$$

$$
\int_0^\infty\frac{\xi\exp(-x\sqrt{\xi^2+k^2})\sin(\xi y)}{\sqrt{\xi^2+k^2}(\sqrt{\xi^2+k^2}+k)^{1/2}}d\xi=\sqrt{\frac{\pi}{2}}F(-x,y)
$$

$$
F(x,y)=\frac{(\sqrt{x^2+y^2}+x)^{1/2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\exp(-k\sqrt{x^2+y^2})
$$

после дальнейших преобразований, состоящих в замене переменной и интегрировании по частям, получаем

$$
(1.12)\qquad H_z'^*(x,y,p)|_{x<0}=\frac{J_0}{p}x\exp(-ky)-
$$

$$
-\frac{J_0}{p\sqrt{2\pi k}}\Big[(\sqrt{x^2+y^2}-|x|)^{1/2}\exp(-k\sqrt{x^2+y^2})-
$$

$$
-k|x|\int_{|x|}^\infty F(-\xi,y)\,d\xi\Big]
$$

$$
H_z'^*(x,y,p)|_{x>0}=-\frac{J_0}{p\sqrt{2\pi k}}\Big[(\sqrt{x^2+y^2}+x)^{1/2}\exp(-k\sqrt{x^2+y^2})-
$$

$$
-kx\int_x^\infty F(\xi,y)\,d\xi\Big]
$$

Выполним переход к оригиналу в (1.12), используя соотношения [4, 5], содержащие функции параболического цилиндра $D_\nu(z)$ ($\nu=-1/2,\ 3/2$). Используя интегральное представление для функций параболического цилиндра $D_{-1/2}(z)$ [6], получим выражение для компоненты H_z вектора магнитного поля в виде

$$
(1.13)\qquad \frac{H_z'(x,y,t)\sqrt{\sigma\mu_a}}{J_0\sqrt{2t}}\bigg|_{x<0}=-z\cos\theta\,\mathrm{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)-G^-(z,\theta)
$$

$$
\frac{H_z'(x,y,t)\sqrt{\sigma\mu_a}}{J_0\sqrt{2t}}\bigg|_{x>0}=-G^+(z,\theta)\qquad\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)
$$

$$G^{\pm}(z,\theta)=\frac{1}{\pi}\left[\sqrt{2z}\cos\frac{\theta}{2}\exp\left(-\frac{z^2}{4}\right)D_{-3/2}(z)\mp\right.$$
$$\mp\sqrt{\frac{2}{\pi}}z^2\cos\theta\int_1^{\infty}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\xi^2\right)\left(\arcsin\sqrt{\frac{\xi-1}{\xi-\sin\theta}}\pm\right.$$
$$\left.\left.\pm\arcsin\sqrt{\frac{\xi-1}{\xi+\sin\theta}}\right)d\xi\right]$$
$$z=\sqrt{(x^2+y^2)\,\sigma\mu_n\,/\,2t},\quad \theta=\operatorname{arctg}(y\,/\,x)$$

Компоненты вектора плотности тока легко определяются на основании (1.13) и последних двух уравнений (1.3). Из полученных результатов следует, что вершина разреза является концентратором электрического поля и тока, а компонента H_z вектора магнитного поля остается ограниченной при

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$$

Компоненты вектора имеют особенность в вершине разреза следующего вида;

$$\text{(1.14)}\qquad \frac{j_x}{J_0}\sim-\frac{1}{\pi}\frac{\sin(\theta/2)}{\sqrt{2z}}D_{-3/2}(0)$$
$$\frac{j_y}{J_0}\sim\frac{1}{\pi}\frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{2z}}D_{-3/2}(0),\quad z\to 0$$

где

$$D_{-3/2}(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{3/4}\Gamma(5/4)}$$

2. Перейдем к определению температурного поля, обусловленного действием джоулевых источников в бесконечной тонкой пластинке толщины $2h$. Если на поверхностях $z=\pm h$ пластинки происходит теплообмен с внешней средой нулевой температуры в соответствии с законом Ньютона, то для симметричного относительно срединной поверхности $z=0$ распределения уравнение теплопроводности имеет вид [7]

$$\text{(2.1)}\qquad \nabla^2T^*-\frac{\alpha}{\lambda h}T^*-\frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial T^*}{\partial t}=-\frac{Q}{\lambda}$$
$$T^*(x,y,t)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}T\,dz,\quad Q=\frac{1}{\sigma}(j_x^2+j_y^2),\quad \varkappa^2=\lambda/(c\rho)$$

Здесь T^* — среднее по толщине значение температуры, Q — удельная мощность джоулева тепла, λ — коэффициент теплопроводности, c — удельная теплоемкость, ρ — плотность, α — коэффициент теплоотдачи с поверхностей $z=\pm h$.

После включения постоянного тока с вектором плотности $\mathbf{j}_0=\{0,J_0,0\}$ в неограниченной пластинке без разреза установится постоянная температура $T_0^*=J_0^2h\,/\,(\alpha\sigma)$, которая удовлетворяет уравнению (2.1) с правой частью вида $-J_0^2\,/\,(\lambda\sigma)$. Таким образом, функцию $T^*(x,y,t)$ необходимо искать при условии

$$\text{(2.2)}\qquad T^*(x,\ y,\ 0)=T_0^*$$

Решение уравнения (2.1) при начальном условии (2.2) имеет вид [8],

$$T^*(x, y, t) = T_0^* \exp(-\alpha_0 t) + \tag{2.3}$$

$$+ \frac{1}{4\pi\lambda\sigma} \int_0^t \iint_{-\infty}^{\infty} [j_x^2(x', y', t') + j_y^2(x', y', t')] \times$$

$$\times \exp\left[-\alpha_0(t - t') - \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{4\varkappa^2(t - t')}\right] \frac{dx'\, dy'\, dt'}{t - t'}, \quad \alpha_0 = \frac{\alpha\varkappa^2}{\lambda h}$$

Вводя переменные z, θ, t, z', θ', t' по формулам

$$x = \frac{z\sqrt{2t}}{\sqrt{\sigma\mu_a}} \cos\theta, \quad y = \frac{z\sqrt{2t}}{\sqrt{\sigma\mu_a}} \sin\theta, \quad t = t'$$

$$x' = \frac{z'\sqrt{2t'}}{\sqrt{\sigma\mu_a}} \cos\theta', \quad y' = \frac{z'\sqrt{2t'}}{\sqrt{\sigma\mu_a}} \sin\theta', \quad t' = t'$$

преобразуем выражение (2.3) с учетом того, что функция $(j_x^2 + j_y^2)$ симметрична по y и зависит только от z и θ. Тогда выражение (2.3) принимает вид

$$T^*(z, \theta, t) = T_0^* \exp(-\alpha_0 t) + \tag{2.4}$$

$$+ \frac{T_0^* t\alpha_0}{2\pi a^2} \int_0^\infty \int_0^\pi \left[\frac{j_x^2(z', \theta')}{J_0^2} + \frac{j_y^2(z', \theta')}{J_0^2}\right] [P(z, \theta, t, z', \theta') +$$

$$+ P(z, \theta, t, z', -\theta')]\, z'\, dz'\, d\theta'$$

$$P(z, \theta, t, z', \theta') = \int_1^\infty \exp\left[-\alpha_0 t(1 - \gamma) - \right. \tag{2.5}$$

$$\left. - \frac{z^2 - 2zz'\sqrt{\gamma}\cos(\theta - \theta') + \gamma z'^2}{2a^2(1 - \gamma)}\right] \frac{\gamma\, d\gamma}{1 - \gamma}, \quad a^2 = \varkappa^2\sigma\mu_a$$

Последняя формула с учетом выражений (1.13), (1.3) позволяет определить температуру любой точки плоскости с полубесконечным непроводящим разрезом.

При помощи формул (1.14) найдем приближенное выражение для температуры в окрестности точки $z = 0$. Имеем при $z \to 0$

$$j_x^2(z', \theta') + j_y^2(z', \theta') \cong \frac{J_0^2}{4\pi\sqrt{2}\Gamma^2(5/4)} \frac{1}{z'} \tag{2.6}$$

Подставляя (2.6) в (2.4) и изменяя порядок интегрирования, получим

$$T^*(z, t) \cong T_0^* \exp(-\alpha_0 t) + \tag{2.7}$$

$$+ \frac{T_0^* \alpha_0 t}{8\sqrt{\pi}\Gamma^2(5/4)\, a} \int_0^1 \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{1 - \gamma}} \exp\left[-\alpha_0 t(1 - \gamma) - \right.$$

$$\left. - \frac{z^2}{4a^2(1 - \gamma)}\right] I_0\left(\frac{z^2}{4a^2(1 - \gamma)}\right) d\gamma$$

Здесь $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя.

Тогда приближенное значение температуры в вершине трещины ($z = 0$) будет

$$T^*(0,t) \cong T_0^* \exp(-\alpha_0 t) + \frac{T_0^*\alpha_0 t}{8\sqrt{\pi}\Gamma^2(5/4)\,a}\int_0^1 \frac{\sqrt{\gamma}\exp(-\alpha_0 t(1-\gamma))}{\sqrt{1-\gamma}}\,d\gamma = T_0^*\exp(-\alpha_0 t) + T_0^*\exp\left(-\frac{\alpha_0}{2}t\right)\frac{\alpha_0 t\sqrt{\pi}}{16\Gamma^2(5/4)\,a}\left[I_0\left(\frac{\alpha_0 t}{2}\right)+I_1\left(\frac{\alpha_0 t}{2}\right)\right] \tag{2.8}$$

Формула (2.8) показывает, что температура в вершине трещины неограниченно возрастает пропорционально $\sqrt{t}$ при $t \to \infty$.

Приведем оценку напряженного состояния в окрестности точки $r = 0$. Согласно (2.7), температура в окрестности вершины разреза не зависит от θ и, следовательно, температурные напряжения в полярной системе координат r, θ будут определяться по формулам

$$\sigma_r = -2\mu\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad \sigma_\theta = -2\mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} \tag{2.9}$$

где $\Phi(r, t)$ — термоупругий потенциал, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Phi}{dr}\right) = (1+\nu)\,\alpha_t T(r,t) \tag{2.10}$$

Здесь μ, ν, α_t — модуль сдвига, коэффициент Пуассона и коэффициент линейного расширения.

Проинтегрировав (2.10) и подставив в (2.9), получим температурные напряжения

$$\sigma_r = -2\mu(1+\nu)\,\alpha_t\frac{1}{r^2}\int_0^r \xi T(\xi,t)\,d\xi \tag{2.11}$$

$$\sigma_\theta = -2\mu(1+\nu)\,\alpha_t\left[T(r,t) - \frac{1}{r^2}\int_0^r \xi T(\xi,t)\,d\xi\right]$$

В окрестности вершины трещины напряжения (2.11) будут сжимающими, и при отсутствии внешней механической нагрузки трещина, возникающая в начальный момент времени, не будет развиваться. Таким образом, торможение трещины в неограниченной пластинке, через которую пропускается постоянный ток, происходит вследствие возникновения сжимающих температурных напряжений в окрестности ее вершины, а также за счет интенсивного разогрева материала в этой зоне до температуры плавления. При возникновении трещины в пластинке, нагруженной внешними механическими усилиями, наличие температурных сжимающих напряжений, обусловленных пропусканием постоянного электрического тока, приведет к уменьшению коэффициента интенсивности и к последующему торможению трещины за счет роста этих напряжений и увеличения температуры в окрестности ее вершины. Следует также отметить, что представленное решение задачи справедливо только для открытой трещины нормального разрыва, края которой не соприкасаются.

Авторы благодарят С. С. Григоряна на обсуждение результатов работы и замечания.

Поступила 27VII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Финкель В. М., Головнин Ю. И., Слетков А. А.* Разрушение вершины трещины сильным электромагнитным полем. Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 2.
2. *Финкель В. М., Головнин Ю. И., Слетков А. А.* О возможности торможения быстрых трещин импульсами тока. Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 4.
3. *Нобл Б.* Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
5. *Бейтмен Г., Эрдейн А.* Таблицы интегральных преобразований, т. 1. М., «Наука», 1969.
6. *Бейтмен Г., Эрдейн А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М., «Наука», 1966.
7. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Громовык В. И., Лозбень В. Л.* Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи. Киев, «Наукова думка», 1974.
8. *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики. М., «Высшая школа», 1964.
9. *Новацкий В.* Теория упругости. М., «Мир», 1975.