

К ЗАДАЧЕ О ПОДКРЕПЛЕНИИ КОНТУРА ОТВЕРСТИЯ В ПЛАСТИНКЕ БЕЗМОМЕНТНЫМ УПРУГИМ СТЕРЖНЕМ

Л. М. Куршин, Г. И. Расторгуев

(Новосибирск)

Форма контура отверстия в пластинке и закон изменения жесткости подкрепляющего безмоментного стержня разыскивается из условия минимума суммарной энергии упругой деформации пластинки и подкрепления. Площадь, охватываемая контуром выреза, и величина объема подкрепляющего элемента считаются заданными. Варьированием функционала, связанного с энергией упругой деформации, в областях с подвижными границами получены краевые условия задачи. Решение построено в виде разложения по малому параметру, в качестве которого принят параметр несимметрии нагрузки. Получающееся таким образом решение существенно отличается от решения, полученного в работе [1].

Задача о рациональном подкреплении контура отверстия в пластинке при плоском напряженном состоянии исследовалась многими авторами. Изгибной жесткостью подкрепляющего элемента, сосредоточенного у контура отверстия, можно пренебречь и считать его безмоментным стержнем. Некоторые оценки вносимой при этом погрешности приведены, например, в [1-4]. Подкрепление отверстий заданной формы (окружность, эллипс) безмоментным упругим стержнем исследовалось в [4-11]. Показано, что уменьшение концентрации напряжений в пластинке может быть достигнуто за счет соответствующим образом подобранной переменной площади сечения подкрепляющего стержня. В задаче об эквивалентном подкреплении [1] разыскивается не только закон изменения площади сечения стержня, но и форма выреза, при которых вне подкрепления сохраняется то же напряженное состояние, что и в пластинке без отверстия. Решение этой задачи существует в ограниченном диапазоне соотношений нагрузок, и объем, занимаемый подкреплением, как правило, в несколько раз превышает объем удаленной части для образования выреза.

1. Постановка задачи. Рассматривается плоское напряженное состояние тонкой пластинки с отверстием (фиг. 1). Напряжения на достаточном удалении от выреза

$$(1.1) \quad \sigma_x = p, \quad \sigma_y = q, \quad \tau_{xy} = 0$$

Контур отверстия L подкреплен безмоментным упругим стержнем с переменной жесткостью при растяжении $G(s)$. Через E , ν , h обозначены модуль упругости, коэффициент Пуассона и толщина пластинки. Разыскиваются форма контура L и закон изменения жесткости стержня $G(s)$ из условия минимума суммарной энергии упругой деформации пластинки и подкрепляющего стержня при заданных площади D , области Ω' , ограниченной контуром L , и величине интеграла H

$$(1.2) \quad \iint_{\Omega'} dx dy = D, \quad \int_L G(s) ds = H$$

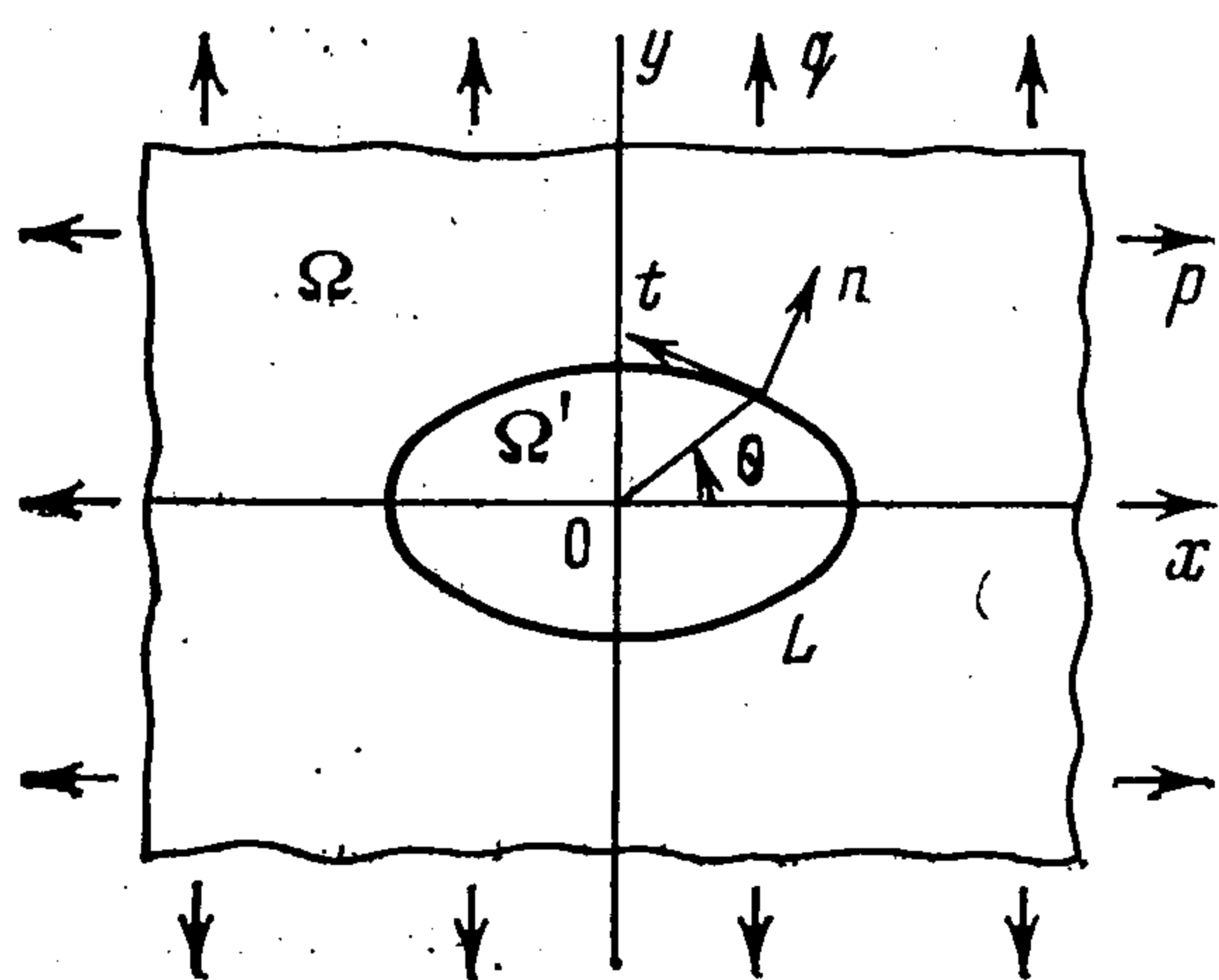
При постоянном модуле упругости материала подкрепления последнее условие означает, что задан объем (или вес) подкрепляющего элемента.

Для неограниченной пластинки под энергией деформации понимаем энергию деформации части пластинки (области Ω), заключенной между контуром отверстия L и некоторым достаточно удаленным фиксированным замкнутым контуром L_1 , вне которого невозмущенное напряженное состояние имеет вид (1.1).

Рассматриваем функционал

$$(1.3) \quad J = \frac{K}{2} \iint_{\Omega} [u_x^2 + v_y^2 + 2\nu u_x v_y + \gamma_1 (u_y + v_x)^2] dx dy + \\ + \frac{1}{2} \int_L (-u_s^* y_n + v_s^* x_n)^2 G(s) ds - h \int_{L_1} (p x_n u + q y_n v) ds \\ K = Eh / (1 - \nu^2), \quad \gamma_1 = (1 - \nu) / 2$$

Здесь u, v — компоненты вектора перемещения точки пластинки в декартовой системе координат xOy ; звездочкой обозначены соответствующие



Фиг. 1

величины, относящиеся к подкреплению; направление обхода в контурных интегралах против часовой стрелки; s — дуговая координата, отсчитываемая по контуру от некоторой начальной точки; нижними индексами обозначено дифференцирование по соответствующей переменной; $x_n = \cos(n, x)$, $y_n = \cos(n, y)$ — направляющие косинусы нормали n .

В правой части (1.3) первые два слагаемых представляют собой энергии деформации пластинки и подкрепления, последнее слагаемое — работу внешних сил. Необходимыми условиями стационарности функционала Лагранжа J при неподвижном контуре L и неварьируемой жесткости $G(s)$ являются дифференциальные уравнения равновесия в области и статические граничные условия.

Задача об определении формы контура L отверстия в пластинке и закона изменения жесткости $G(s)$ подкрепляющего стержня может быть поставлена как вариационная задача о стационарном значении функционала (1.3) в областях с подвижными границами при дополнительных условиях (1.2). Для решения изопериметрической вариационной задачи составим функционал

$$(1.4) \quad U = J + \lambda_1 \iint_{\Omega'} dx dy + \lambda_2 \int_L G(s) ds$$

где λ_1, λ_2 — постоянные множители Лагранжа. Для первой вариации функционала (1.4) при подвижном контуре L и варьируемой жесткости $G(s)$ получаем

$$(1.5) \quad \delta U = -K \iint_{\Omega} [(u_{xx} + \gamma_1 u_{yy} + \gamma_2 v_{xy}) \delta u + (v_{yy} + \gamma_1 v_{xx} +$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma_2 u_{xy}) \delta v_1] dx dy - K \int_L [T_1(s) \delta u_1 + T_2(s) \delta v_1] ds - \\
& - \frac{K}{2} \int_L [u_x^2 + v_y^2 + 2v u_x v_y + \gamma_1 (u_y + v_x)^2] \delta n ds + \\
& + K \int_{L_1} [T_1(s) \delta u + T_2(s) \delta v] ds + \int_L \left\{ \left[\frac{1}{2} \varepsilon^2(s) + \lambda_2 \right] \delta G_2 + \right. \\
& + \alpha_1'(s) (y_n \delta u_2^* - x_n \delta v_2^*) + \frac{1}{\rho} \alpha_1(s) (x_n \delta u_2^* + y_n \delta v_2^*) + \\
& + \left. \left[\lambda_1 + \frac{1}{\rho} \lambda_2 G(s) - \frac{1}{2\rho} \alpha_2(s) - \beta'(s) \right] \delta n \right\} ds - \\
& - h \int_{L_1} (p x_n \delta u + q y_n \delta v) ds \\
& \delta u_1 = \delta u - u_x \delta x - u_y \delta y, \quad \delta v_1 = \delta v - v_x \delta x - v_y \delta y \\
& \delta u_2^* = \delta u^* - u_s^* \delta t, \quad \delta v_2^* = \delta v^* - v_s^* \delta t, \quad \delta G_2 = \delta G - G_s \delta t \\
& T_1(s) = (u_x + v v_y) x_n + \gamma_1 (u_y + v_x) y_n \\
& T_2(s) = (v_y + v u_x) y_n + \gamma_1 (u_y + v_x) x_n \\
& \alpha_1(s) = \varepsilon(s) G(s), \quad \alpha_2(s) = \varepsilon^2(s) G(s) \\
& \beta(s) = (u_s^* x_n + v_s^* y_n) \alpha_1(s), \quad \gamma_2 = (1 + \nu) / 2
\end{aligned}$$

Здесь δu , δv , δu^* , δv^* , δG — полные вариации соответствующих величин; δx , δy — вариации координат точек контура, отнесенные к системе координат xOy ; δn , δt — вариации точек контура в системе координат, связанной с нормалью n и касательной t к искомому контуру L ; ρ — радиус кривизны контура; $\varepsilon(s) = -u_s^* y_n + v_s^* x_n$ — деформация подкрепляющего стержня.

Рассмотрим подробнее получение вариации (1.5). Варьирование двойных интегралов с переменной областью интегрирования рассматривалось в ряде работ (см., например, соответствующие ссылки в [12]). Поясним вычисление вариаций контурных интегралов, входящих в (1.4), с переменным контуром L

$$J_1 = \int_L G(s) ds, \quad J_2 = \frac{1}{2} \int_L G(s) (-u_s^* y_n + v_s^* x_n)^2 ds$$

В [13] описан прием получения вариации кратного интеграла с подвижными границами, при котором независимые переменные рассматриваются как функции других вспомогательных неварьируемых переменных с фиксированной областью изменения. Распространяя тот же метод на вычисление вариаций контурных интегралов J_1 , J_2 , полагаем, что дуговая координата s и все величины, входящие в подынтегральные выражения, — функции некоторого неварьируемого параметра ξ

$$\begin{aligned}
s &= s(\xi), \quad ds = (x_\xi^2 + y_\xi^2)^{1/2} d\xi, \quad J_1 = \int_{L^*} G[s(\xi)] (x_\xi^2 + y_\xi^2)^{1/2} d\xi \\
J_2 &= \frac{1}{2} \int_{L^*} G[s(\xi)] \left(\frac{u_\xi^* x_\xi + v_\xi^* y_\xi}{x_\xi^2 + y_\xi^2} \right)^2 (x_\xi^2 + y_\xi^2)^{1/2} d\xi
\end{aligned}$$

где L^* — некоторый фиксированный контур. В результате приходим к обычной задаче вычисления вариаций контурных интегралов с неподвижным контуром. Для δJ_1

имеем

$$\begin{aligned} \delta J_1 &= \int_{L^*} \left[\delta G (x_\xi^2 + y_\xi^2)^{1/2} + G \frac{x_\xi \delta x_\xi + y_\xi \delta y_\xi}{(x_\xi^2 + y_\xi^2)^{1/2}} \right] d\xi = \\ &= \int_{L^*} \left[\delta G (x_\xi^2 + y_\xi^2)^{1/2} - \frac{dG}{d\xi} \frac{x_\xi \delta x_\xi + y_\xi \delta y_\xi}{(x_\xi^2 + y_\xi^2)^{1/2}} + \frac{G}{\rho} (y_\xi \delta x_\xi - x_\xi \delta y_\xi) \right] d\xi \\ \frac{1}{\rho} &= \frac{x_\xi y_{\xi\xi} - x_{\xi\xi} y_\xi}{(x_\xi^2 + y_\xi^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Возвращаясь к исходной переменной s и учитывая равенства]

$$\delta n = x_n \delta x + y_n \delta y, \quad \delta t = x_s \delta x + y_s \delta y, \quad x_n = y_s, \quad y_n = -x_s$$

и обозначения в (1.5), получаем

$$\delta J_1 = \int_L \left(\delta G_2 + \frac{G}{\rho} \delta n \right) ds$$

Аналогичные действия выполняем при вычислении δJ_2

$$\begin{aligned} \delta J_2 &= \frac{1}{2} \int_{L^*} \left[\delta G \frac{(u_\xi^* x_\xi + v_\xi^* y_\xi)^2}{(x_\xi^2 + y_\xi^2)^{3/2}} + \right. \\ &+ 2G \frac{u_\xi^* x_\xi + v_\xi^* y_\xi}{(x_\xi^2 + y_\xi^2)^{3/2}} (x_\xi \delta u_\xi^* + y_\xi \delta v_\xi^* + u_\xi^* \delta x_\xi + v_\xi^* \delta y_\xi) - \\ &\left. - 3G \frac{(u_\xi^* x_\xi + v_\xi^* y_\xi)^2}{(x_\xi^2 + y_\xi^2)^{5/2}} (x_\xi \delta x_\xi + y_\xi \delta y_\xi) \right] d\xi \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, переходя к переменной s и принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} \delta x &= x_s \delta t + y_s \delta n, \quad \delta y = y_s \delta t - x_s \delta n \\ x_{ss} &= -y_s / \rho, \quad y_{ss} = x_s / \rho \end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned} \delta J_2 &= \int_L \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon^2 \delta G_2 + \alpha_1'(s) (y_n \delta u_2^* - x_n \delta v_2^*) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\rho} \alpha_1(s) (x_n \delta u_2^* + y_n \delta v_2^*) - \left[\frac{1}{2\rho} \alpha_2(s) + \beta'(s) \right] \delta n \right\} ds \end{aligned}$$

где обозначения совпадают с принятыми в (1.5).

Условию стационарности функционала (1.4) соответствуют дифференциальные уравнения равновесия в области Ω и статические условия на достаточно удаленном контуре L_1 для пластинки. Учитывая непрерывность перемещений $u = u^*$, $v = v^*$ на границе L , в силу произвольности вариаций δu , δv (δu^* , δv^*) получаем уравнения равновесия элемента стержня, взаимодействующего с прилегающей пластинкой

$$(1.6) \quad -h\sigma_n + \alpha_1(s) / \rho = 0, \quad h\tau_{tn} + \alpha_1'(s) = 0$$

Здесь σ_n , τ_{tn} — нормальная и касательная компоненты вектора напряжения, действующего на площадке с нормалью n . За счет варьирования жесткости подкрепления $G(s)$ имеем условие на L

$$(1.7) \quad 1/2 \varepsilon^2(s) + \lambda_2 = 0$$

из которого следует постоянство деформации (ранонапряженность) подкрепляющего стержня

$$(1.8) \quad \varepsilon(s) = -u_s^* y_n + v_s^* x_n = C_1 \quad (C_1 = \text{const})$$

Вследствие произвольности вариации δn находим условие на контуре отверстия

$$(1.9) \quad K \{T_1(s) u_n + T_2(s) v_n - 1/2 [u_x^2 + v_y^2 + 2\nu u_x v_y + \\ + \gamma_1(u_y + v_x)^2]\} - \rho^{-1} \alpha_2(s) - \beta'(s) + \lambda_1 = 0$$

При этом учитывалось соотношение (1.7).

В выражении (1.9) перейдем к напряжениям σ_n , σ_t , τ_{tn} , где σ_t — нормальная компонента вектора напряжения, действующего на площадке с нормалью t , совпадающей с касательным к контуру направлением. Для этого используем уравнения (1.6), обозначения (1.5), дифференциальные уравнения равновесия пластинки, условия непрерывности перемещений на L , обобщенный закон Гука и соотношения упругости Коши. При дифференцировании направляющих косинусов x_n , y_n учитываем, что

$$x_{ns} = -y_n / \rho, \quad y_{ns} = x_n / \rho, \quad x_{nn} = y_{nn} = 0$$

т. е. что в отличие от производных по дуговой координате s производные по нормали к контуру, так же как и по любой другой прямой линии, равны нулю. В результате условие (1.9) на L примет вид

$$(1.10) \quad -1/2 (\sigma_n + \sigma_t)^2 + (1 + \nu) (\tau_{tn}^2 - \sigma_n \sigma_t) + 2(1 + \nu) \sigma_n^2 + \\ + \sigma_n \rho [(2 + \nu) \partial \sigma_n / \partial n + \partial \sigma_t / \partial n] = C_2 \quad (C_2 = \text{const})$$

В качестве естественных условий вариационной задачи о стационарном значении функционала U при подвижном контуре L и варьируемой жесткости $G(s)$ кроме обычных уравнений и граничных условий для рассматриваемой задачи получаем, как и в [1], дополнительные условия (1.8), (1.10) на L . Эти условия позволяют определить закон изменения жесткости при растяжении $G(s)$ подкрепления и форму контура L .

Замечание 1. Если рассмотреть задачу об определении формы неподкрепленного отверстия в пластинке при тех же условиях нагружения (1.1) из условия минимума энергии упругой деформации при заданной площади охватываемого контуром отверстия, то в качестве дополнительного условия на контуре получается условие постоянства интенсивности напряжений. Этот результат можно получить из условия стационарности в области Ω с подвижной границей L функционала (1.4), в котором необходимо опустить слагаемые, связанные с подкреплением. Такое же условие было получено в работе [14], где за критерий оптимальной формы отверстия был принят минимум максимального значения интенсивности напряжений в области, занимаемой пластинкой, с присоединенной границей. В работе [15] показано, что равнонапряженный контур отверстия является оптимальным с точки зрения минимизации напряжений в пластинке. Задача об определении формы равнопрочного контура неподкрепленного отверстия в пластинке, растянутой в двух направлениях, решена в [16].

Замечание 2. Интегральный критерий определения подкрепления отверстия в другой форме предложен для оболочек в [17] и применительно к подкреплению кругового отверстия в пластинке в [18]. Жесткостные характеристики подкрепляющего стержня

жня, постоянные по контуру отверстия заданной формы, разыскивались из условия минимума энергии дополнительного (обусловленного наличием подкрепленного отверстия) напряженного состояния оболочки (пластинки).

2. Преобразование уравнений с применением комплексного представления напряжений и перемещений. Решение для случая равностороннего растяжения пластинки. Пусть отображение внешности единичного круга $|\zeta| \geq 1$ в плоскости ζ на внешность искомого контура L в плоскости $z = x + iy$ осуществляется посредством функции

$$(2.1) \quad \frac{z}{B} = \omega(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \zeta^{1-2k} \quad (b_0 = 1)$$

где B — действительная величина, определяющая масштаб, b_k — неизвестные действительные коэффициенты. Обозначим в дальнейшем комплексную переменную ζ на единичной окружности через $\tau = \exp(i\theta)$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

Пусть $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ — функции Колосова — Мусхелишвили в преобразованной области $|\zeta| \geq 1$, описывающие плоское напряженное состояние в пластинке. Согласно [19], и с учетом симметрии эти функции имеют вид

$$(2.2) \quad \Phi(\zeta) = \Gamma + \sum_{k=1}^{\infty} R_k \zeta^{-2k}, \quad \Psi(\zeta) = \Gamma' + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \zeta^{-2k}$$

Здесь R_k , Q_k — некоторые действительные коэффициенты; постоянные Γ , Γ' определяются из условий на бесконечности (1.1)

$$(2.3) \quad \Gamma = (p + q) / 4, \quad \Gamma' = -(p - q) / 2$$

Неизвестную функцию $G(s)$ (жесткость при растяжении подкрепляющего стержня) ищем в виде разложения в ряд Фурье

$$(2.4) \quad \frac{G}{A} = \sum_{k=0}^{\infty} F_k \cos(2k\theta) \quad (F_0 = 1)$$

где F_k — неизвестные коэффициенты. В дальнейшем вместо (2.4) будем использовать функцию комплексного переменного τ (точки единичной окружности)

$$(2.5) \quad g(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k \tau^{-2k} \quad (F_0 = 1)$$

такую, что $G/A = \operatorname{Re} g(\tau)$.

С применением введенных функций (2.1) — (2.3), (2.5) краевые условия (1.6), (1.8), (1.10) преобразуются соответственно к виду

$$(2.6) \quad \begin{aligned} & -4(1+\nu)^{-1} \operatorname{Re} \Phi(\tau) + \mu [(1+\nu)^{-1} + \lambda N |\omega'(\tau)|^{-3} \operatorname{Re} g(\tau)] = 0 \\ & \operatorname{Im} [P(\tau) + \lambda \mu \tau g'(\tau) |\omega'(\tau)|^{-1}] = 0 \\ & \operatorname{Re} [2(1-\nu) \Phi(\tau) - (1+\nu) P(\tau)] - \mu = 0 \quad (\mu = \text{const}) \\ & - (1+\nu)^{-1} \{4M \operatorname{Re} \Phi(\tau) + \mu [8(3-\nu)(1+\nu)^{-1} \operatorname{Re} \Phi(\tau) - \\ & - M]\} - \operatorname{Re} [P^2(\tau)] + 4(1-\nu)(7-\nu)(1+\nu)^{-2} [\operatorname{Re} \Phi(\tau)]^2 - \\ & - C = 0 \quad (C = \text{const}) \end{aligned}$$

Здесь

$$(2.7) \quad \begin{aligned} N &= |\omega'(\tau)|^2 + \operatorname{Re} [\tau \omega''(\tau) \overline{\omega'(\tau)}] \\ P(\tau) &= -\tau^2 [\overline{\omega(\tau)} \Phi'(\tau) + \omega'(\tau) \Psi(\tau)] / \overline{\omega'(\tau)} \\ M &= N^{-1} \operatorname{Re} \{ - (5 + \nu) (1 + \nu)^{-1} \tau |\omega'(\tau)|^2 \Phi'(\tau) + \\ &+ \tau^3 [\overline{\omega(\tau)} (\Phi''(\tau) \omega'(\tau) - \Phi'(\tau) \omega''(\tau)) + (\omega'(\tau))^2 \Psi'(\tau)] \} \\ \mu &= 2E\varepsilon / (p + q), \quad \lambda = A / (EhB) \end{aligned}$$

Получили четыре функциональных уравнения (2.6) для определения функций

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \Phi(\tau) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} R_k \tau^{-2k}, \quad \Psi(\tau) = -V + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \tau^{-2k} \\ \omega(\tau) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \tau^{1-2k}, \quad g(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k \tau^{-2k} \quad (b_0 = F_0 = 1) \end{aligned}$$

где $\Phi(\tau)$, $\Psi(\tau)$ — граничные значения соответствующих безразмерных функций $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$, получаемых из (2.2), (2.3) делением последних на $(p + q) / 2$. Неизвестными являются коэффициенты R_k , Q_k , b_k , F_k в (2.8), постоянная C в последнем условии (2.6) и параметр μ , связанный обозначением (2.7) с деформацией ε подкрепления. Параметры относительной жесткости при растяжении λ и несимметрии нагрузки

$$(2.9) \quad V = (p - q) / (p + q)$$

считаются заданными.

Заметим, что первое, второе и четвертое условия (2.6) соответствуют (1.6), (1.10) лишь в учетом третьего условия (2.6) постоянства деформации подкрепляющего стержня.

В частном случае, когда напряжения в пластине на бесконечности одинаковы ($p = q$), решением рассматриваемой задачи является круговое отверстие, подкрепленное упругим стержнем постоянной жесткости. Из первого и второго условий (2.6) при $V = 0$, $b_k = F_k = 0$ ($k \geq 1$) имеем

$$(2.10) \quad R_k = 0 \quad (k \geq 1), \quad Q_k = 0 \quad (k \geq 2), \quad Q_1 = \frac{1 - \lambda(1 - \nu)}{1 + \lambda(1 + \nu)}$$

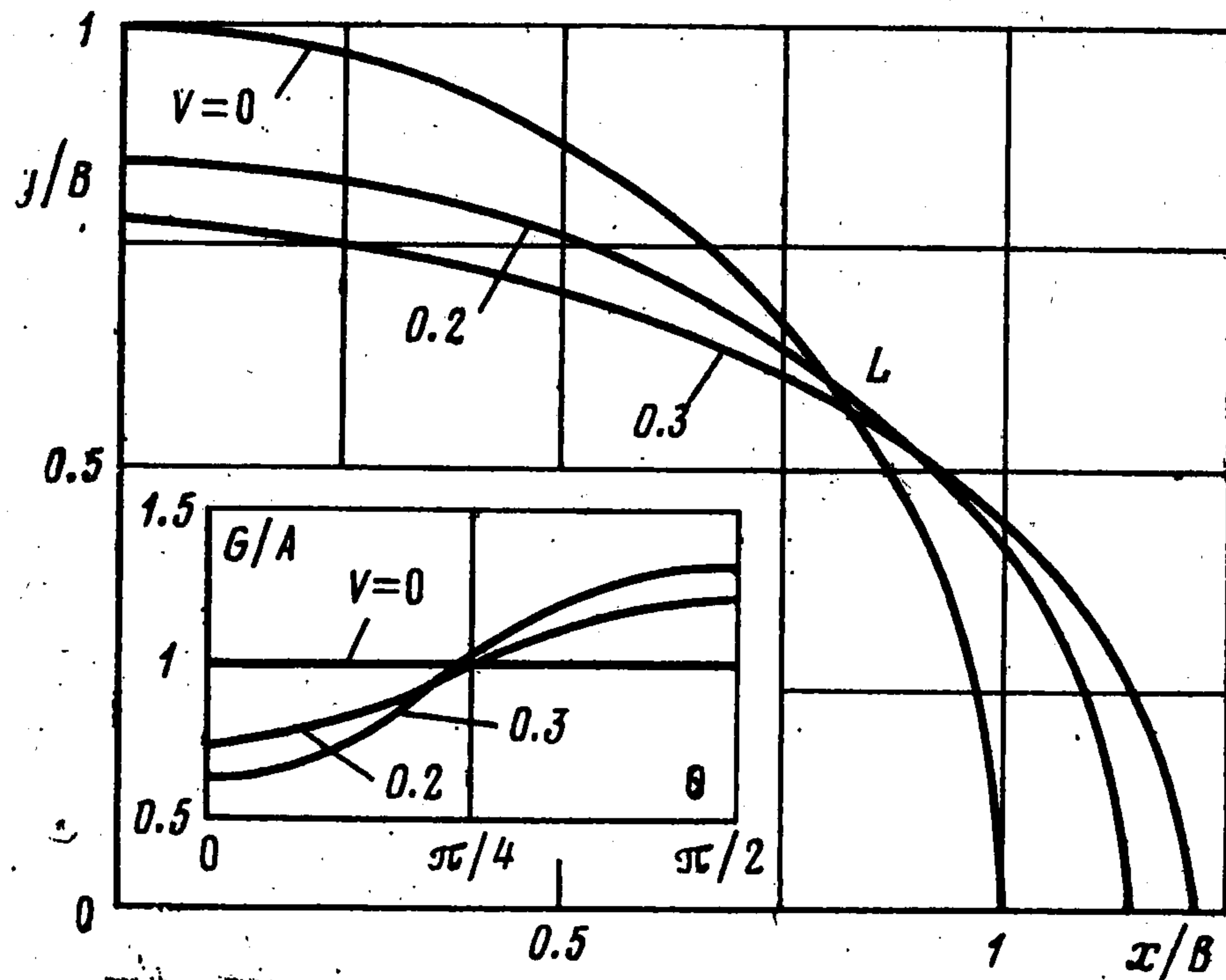
Значения постоянных μ , C получаем из третьего и четвертого условий (2.6)

$$(2.11) \quad \mu = \frac{2}{1 + \lambda(1 + \nu)}, \quad C = - \left(\frac{5 - 3\nu}{1 + \nu} \left(2Q_1 + \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \right) - 3Q_1^2 \right)$$

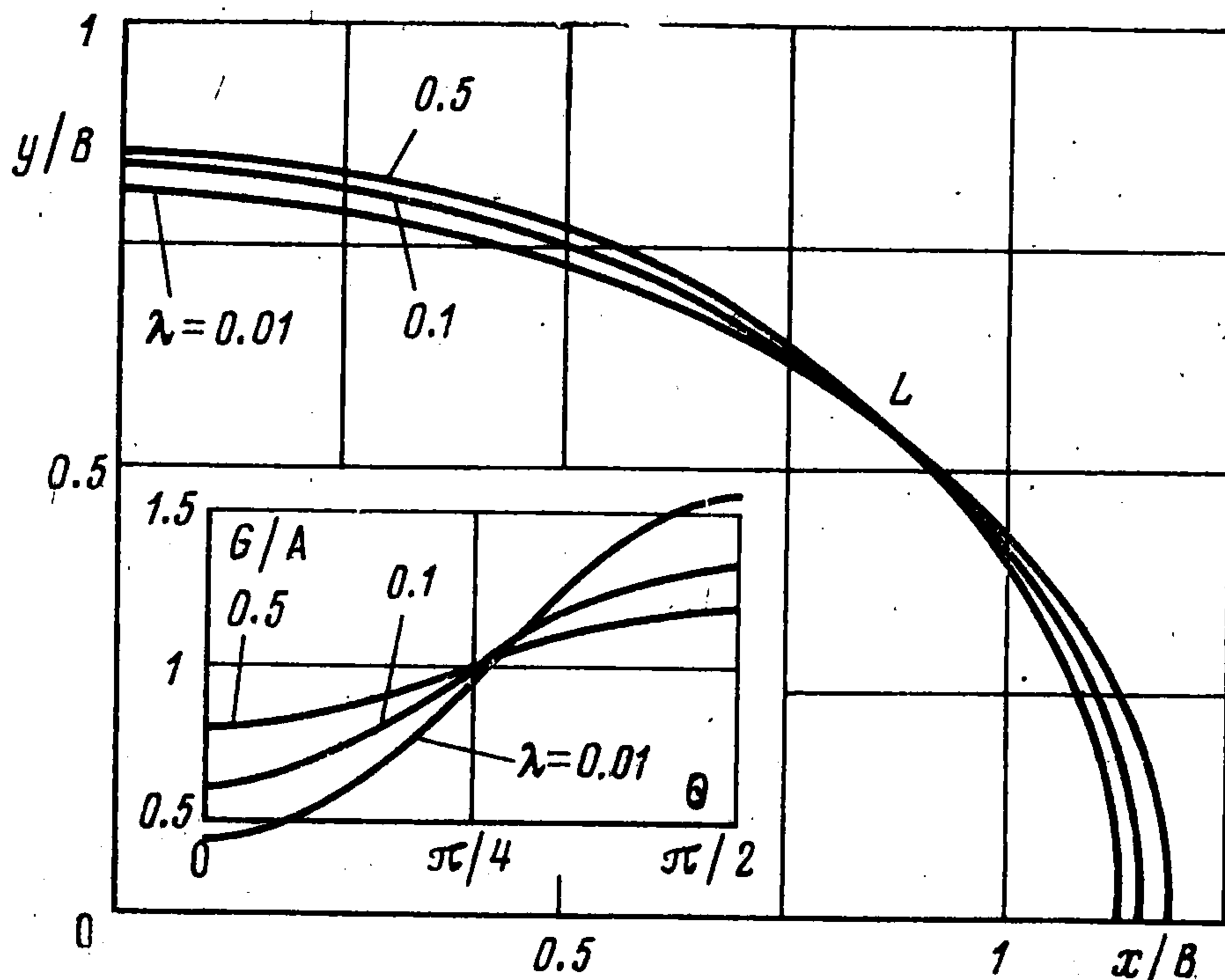
В задаче об эквивалентном подкреплении [1] в случае равностороннего растяжения решением является круговое отверстие, подкрепленное упругим стержнем постоянной жесткости. Однако значение параметра λ строго определено и равно $(1 - \nu)^{-1}$. В рассматриваемой задаче параметр $\lambda = A / (EhB)$ задается.

3. Построение приближенного решения методом малого параметра. При решении обратных краевых задач теории упругости, когда неизвестна граница области, определяемая из некоторых дополнительных условий, достаточно эффективным оказывается метод малого параметра [20, 21].

Пусть в направлениях осей Ox , Oy в пластинке на бесконечности действуют напряжения (1.1), причем параметр (2.9) несимметрии нагрузки V считается малым. Разыскиваем коэффициенты R_k , Q_k , b_k , F_k в (2.8)



Фиг. 2



Фиг. 3

и постоянные μ , C в условиях (2.6) в виде разложений по степеням V

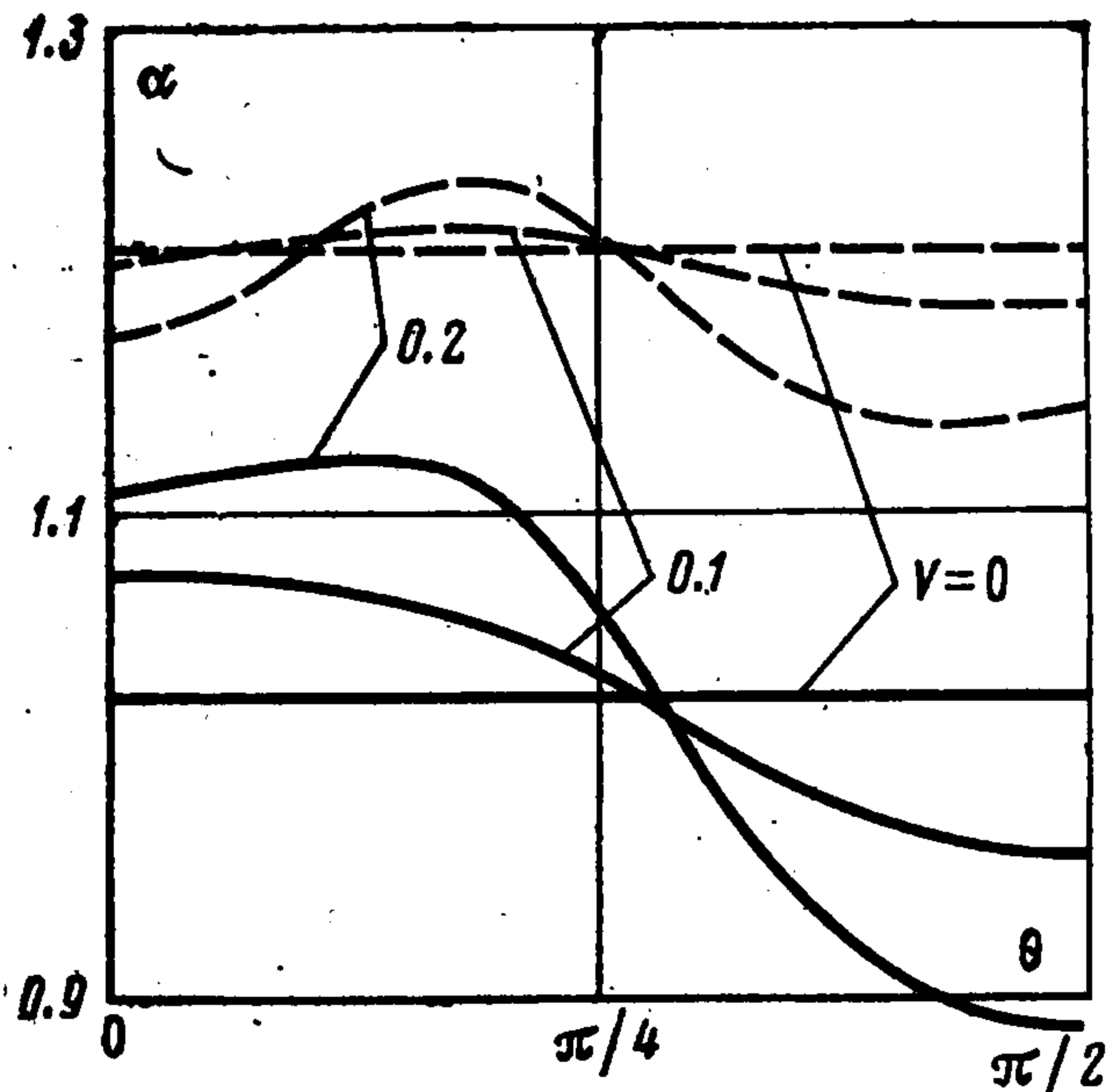
$$(3.1) \quad R_k = \sum_{j=k}^{\infty} R_k^{(2j-k)} V^{2j-k}, \quad Q_k = \sum_{j=k}^{\infty} Q_k^{(2j-k-1)} V^{2j-k-1}$$

$$b_k = \sum_{j=k}^{\infty} b_k^{(2j-k)} V^{2j-k}, \quad F_k = \sum_{j=k}^{\infty} F_k^{(2j-k)} V^{2j-k} \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

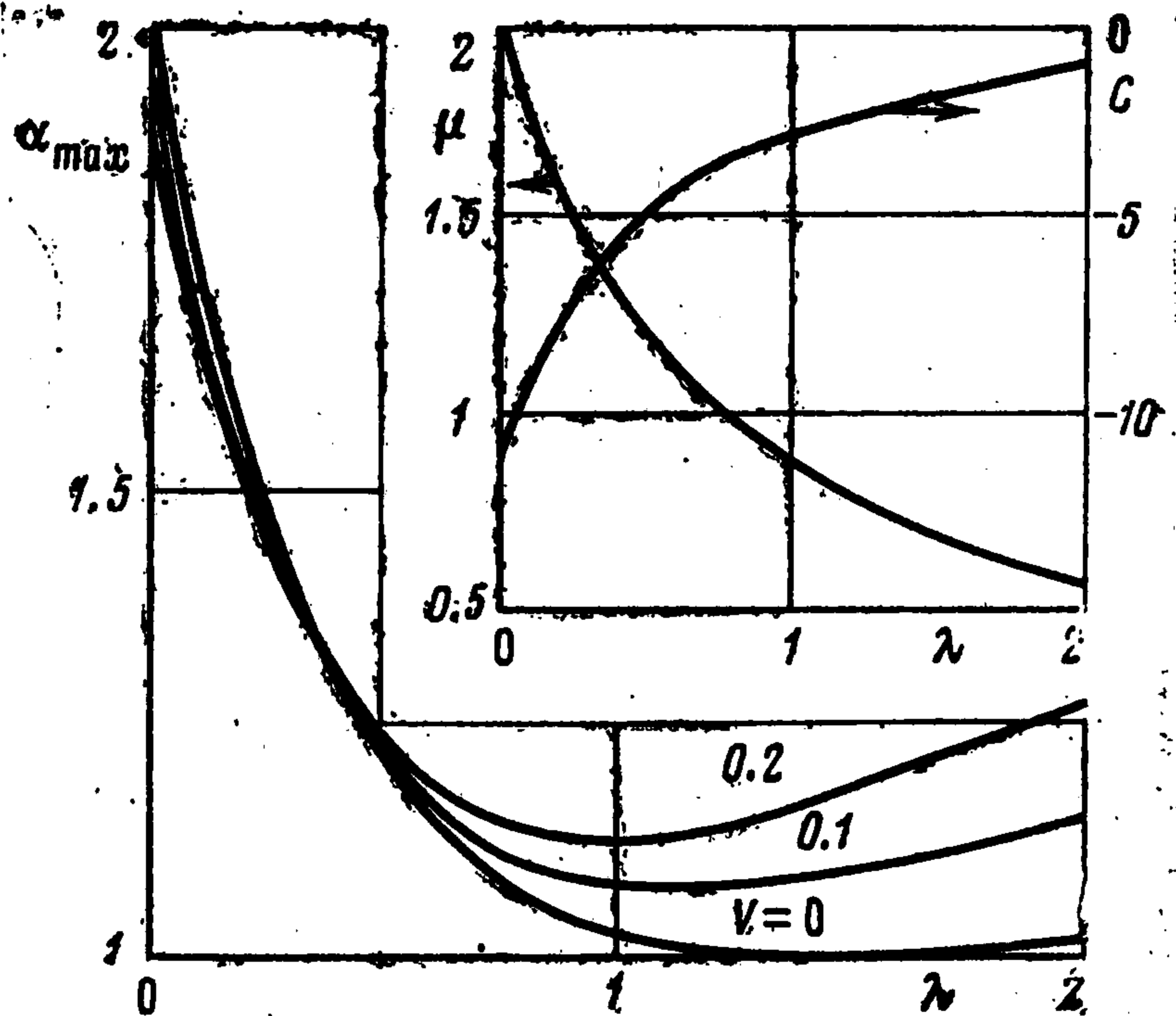
$$\mu = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{(2j)} V^{2j}, \quad C = \sum_{j=0}^{\infty} C^{(2j)} V^{2j}$$

При $V = 0$, т. е. при $p = q$, остаются только коэффициенты нулевого приближения $Q_1 = Q_1^{(0)}$, $\mu = \mu^{(0)}$, $C = C^{(0)}$, совпадающие с соответствующими величинами в (2.10), (2.11).

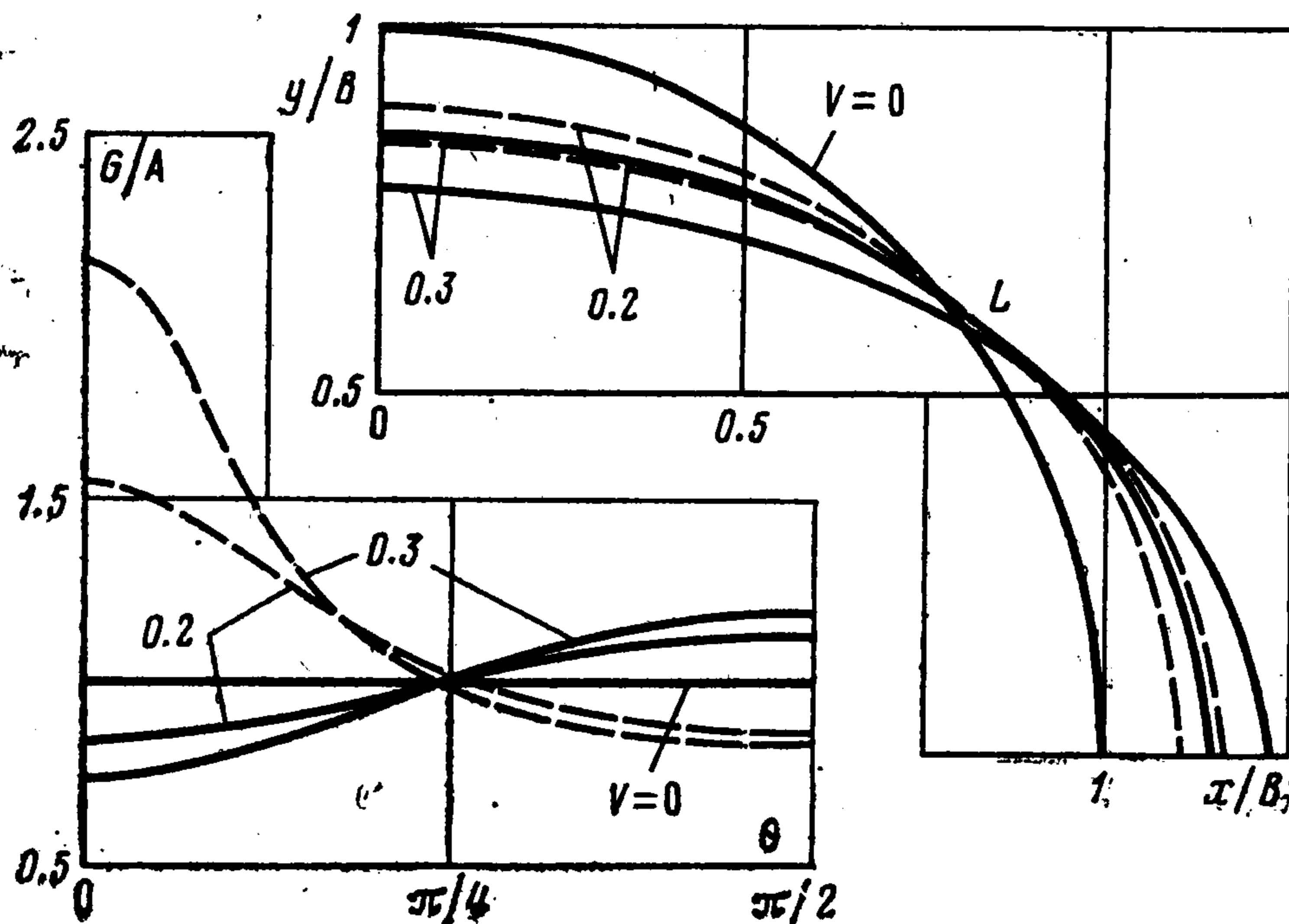
Подставляя (2.8), (3.1) в краевые условия (2.6), получаем при одинаковых степенях τ системы уравнений для величин нулевого приближения при V^0 , первого при V^1 , второго при V^2 и т. д. Поскольку коэффициенты предыдущих приближений вычисляются, то система уравнений для определения коэффициентов последующего приближения оказывается линейной.



Фиг. 4



Фиг. 5



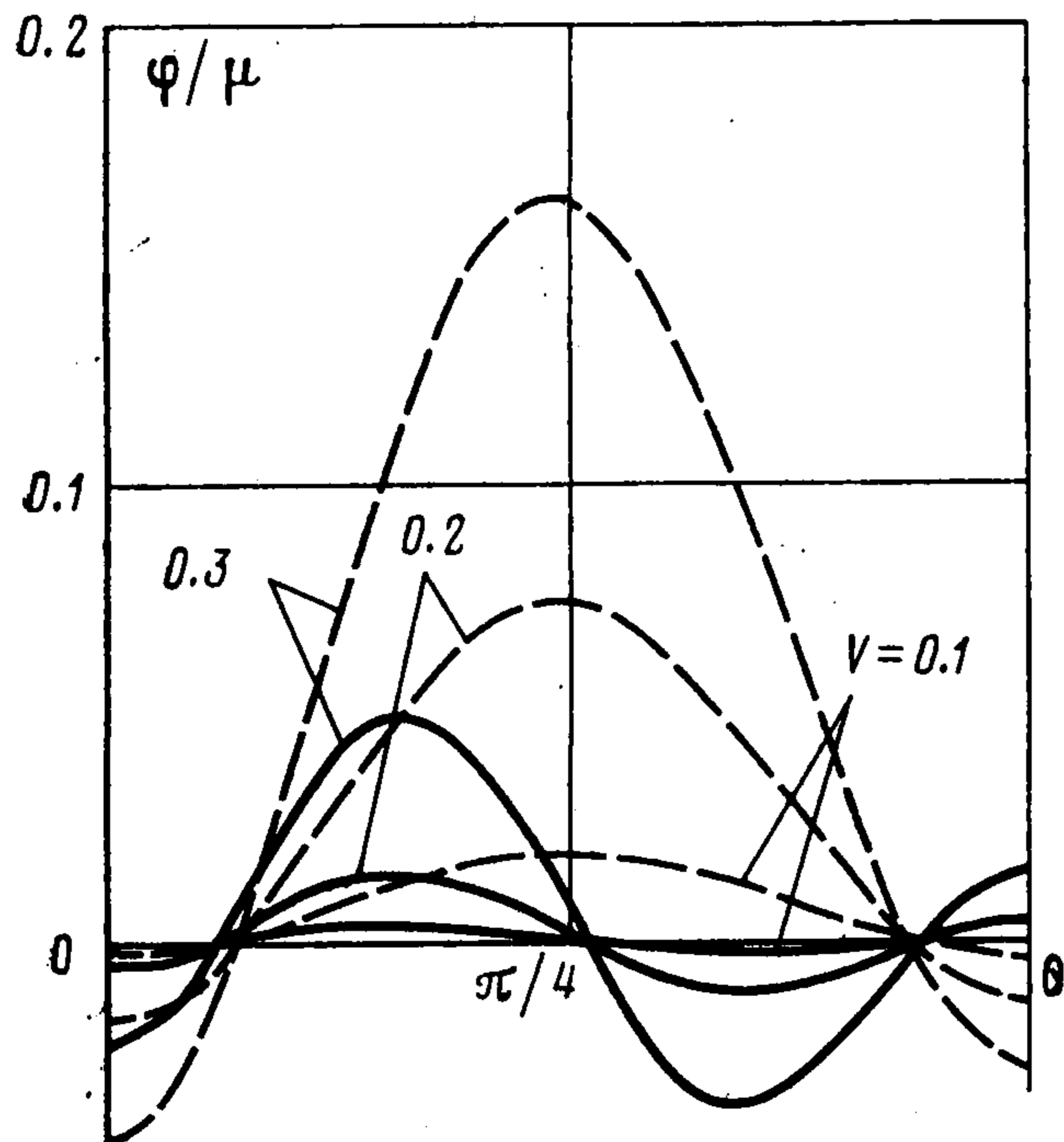
Фиг. 6

При фактическом решении были вычислены коэффициенты нулевого, первого и второго приближений. Результаты расчета представлены на фиг. 2—7. Коэффициент Пуассона ν был принят равным 0.3.

На фиг. 2 представлены контуры L отверстий при $\lambda = A / (EhB) = 0.3$ и соответствующие безразмерные жесткости при растяжении G / A подкрепляющего стержня в зависимости от угла θ . На фиг. 3 изображены контуры L и жесткости G / A подкрепления при $V = (p - q) / (p + q) = 0.2$ и разных значениях λ . На фиг. 4 показано распределение коэффициента концентрации напряжений α в пластинке по контуру L выреза

(по углу θ) при $\lambda = 0.5$ (штриховые линии), $\lambda = 1.0$ (сплошные линии) для ряда значений параметра нагрузки V .

Коэффициент концентрации напряжений α вычислялся как отношение интенсивности напряжений в данной точке к интенсивности напряжений на бесконечности



Фиг. 7

$$(3.2) \quad \alpha = \sigma_i / \sigma_{i\infty}, \quad \sigma_i = (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2)^{1/2} \\ \sigma_{i\infty} = (p^2 + q^2 - pq)^{1/2}$$

На фиг. 5 представлены зависимости максимального значения коэффициента концентрации напряжений α_{\max} на контуре выреза в пластинке от параметра относительной жесткости λ для значений V , указанных на кривых. Кривые имеют минимум, причем при увеличении параметра несимметрии нагрузки V величина наименьшего возможного значения α_{\max} возрастает. Приведе-

ны также зависимости параметра $\mu = 2E\varepsilon / (p + q)$, связанного с деформацией подкрепляющего стержня, и постоянной C в последнем условии (2.6) от λ при $V = 0.2$. Изменение μ , C по V в диапазоне $0 \leq V \leq 0.3$ несущественно.

Представляет определенный интерес сопоставить полученное решение с решением задачи определения эквивалентного подкрепления [1], выбранного также в виде безмоментного стержня. Параметр λ примем равным $(1 - \nu)^{-1} \approx 1.429$ (для $\nu = 0.3$), и оба решения при $V = 0$ будут совпадать.

На фиг. 6 изображены контуры отверстий в задаче об эквивалентном подкреплении (штриховые линии) и найденных отверстий (сплошные линии) для ряда значений V . Приведены также для сравнения жесткости при растяжении эквивалентного подкрепления и подкрепления, полученного из условия минимума энергии пластинки с подкреплением.

У найденного подкрепления наибольшая жесткость соответствует точкам пересечения контура отверстия с осью симметрии Oy вдоль направления действия наименьшей силы ($\theta = \pi/2$, $\theta = 3\pi/2$), а наименьшая — точкам $\theta = 0$, $\theta = \pi$. У эквивалентного подкрепления наблюдается качественно другая картина: наибольшая жесткость — в точках $\theta = 0$, $\theta = \pi$, наименьшая — при $\theta = \pi/2$, $\theta = 3\pi/2$. Эквивалентное подкрепление работает в более напряженных условиях. Например, при $V = 0.1$ максимальное напряжение в эквивалентном подкреплении, отнесенное к интенсивности напряжений в пластинке на бесконечности, имеет место в точках $\theta = \pi/2$, $\theta = 3\pi/2$ и равно 0.818. Аналогичное напряжение в найденном подкреплении, постоянное по контуру, равно 0.690. Но по сравнению с задачей об эквивалентном подкреплении наибольшее значение коэффициента концентрации напряжений (3.2) в пластинке на контуре выреза больше 1 и равно 1.091.

Как показали расчеты, контуры отверстий и кривые жесткостей при растяжении для решений первого и второго приближений практически совпадают примерно до значения параметра нагрузки V (малого парамет-

ра), равного 0.3. Однако второе приближение существенно улучшает точность выполнения условий (2.6).

На фиг. 7 для $\lambda = 0.3$ приведено изменение в зависимости от угла θ величины φ / μ , где через $\varphi(\theta)$ обозначена левая часть третьего условия (2.6). Штриховые линии соответствуют первому приближению, сплошные — второму.

Авторы благодарят Н. В. Баничука за обсуждение результатов работы.

Поступила 9 VII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mansfield E. H.* Neutral holes in plane sheet: reinforced holes which are elastically equivalent of the uncut sheet. Aeronaut. Res. Council Repts and Mem., 1950, No. 2815.
2. *Шереметьев М. П.* Плосконапряженное состояние пластинки с подкрепленным круговым отверстием. Инж. сб., 1953, т. 14.
3. *Савин Г. Н., Тульчий В. И.* Пластинки, подкрепленные составными кольцами и упругими накладками. Киев, «Наукова думка», 1971.
4. *Radok J. R. M.* Problems of plane elasticity for reinforced boundaries. Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1955, vol. 22, No. 2.
5. *Wells A. A.* On the plane stress-distribution in an infinite plate with a rim-stiffened elliptical opening. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1950, vol. 3, pt. 1.
6. *Mansfield E. H.* Optimum design for reinforced circular holes. Aeronaut. Res. Council Current Papers, 1956, No. 239.
7. *Mansfield E. H., Hanson C. J.* Optimum reinforcement around a circular hole in a flat sheet under uniaxial tension. Aeronaut. Res. Council Repts and Mem., 1973, No. 3723.
8. *Hicks R.* Reinforced elliptical holes in stressed plates. J. Roy. Aeronaut. Soc., 1957, vol. 61, No. 562.
9. *Hicks R.* Variably reinforced circular holes in stressed plates. Aeronaut. Quatr., 1958, vol. 9, pt. 3.
10. *Савин Г. Н., Флейшман Н. П.* Пластинки, края которых подкреплены тонкими ребрами. Прикл. механ., 1961, т. 7, вып. 4.
11. *Тульчий В. И.* Об оптимальном подкреплении отверстий в пластинах. Прикл. механ., 1965, т. 1, вып. 3.
12. *Куршин Л. М.* К задаче об определении формы сечения стержня максимальной крутильной жесткости. Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 3.
13. *Bolza O.* Vorlesungen über Variationsrechnung. Leipzig, Koehler, 1949.
14. *Баничук Н. В.* Условия оптимальности в задаче отыскания форм отверстий в упругих телах. ПММ, 1977, т. 41, вып. 5.
15. *Wheeler L.* On the role of constant-stress surface in the problem of minimizing elastic stress concentration. Internat. J. Solids and Struct., 1976, vol. 12, No. 11.
16. *Черепанов Г. П.* Некоторые задачи теории упругости и пластичности с неизвестной границей. В кн.: Приложение теории функций в механике сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1965.
17. *Михайловский Е. И.* Об оптимальном подкреплении края оболочки. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 1.
18. *Михайловский Е. И., Чаунин М. П.* Рациональное подкрепление кругового отверстия в растягиваемой плоской пластине. Проблемы прочности, 1978, № 1.
19. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
20. *Александров А. Я., Горбатый А. В., Куршин Л. М.* К решению задачи эквивалентного подкрепления отверстий. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 4.
21. *Баничук Н. В.* Об одной вариационной задаче с неизвестной границей и определении оптимальных форм упругих тел. ПММ, 1975, т. 39, вып. 6.