

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ НЕСОВЕРШЕНСТВ НА ВЫПУЧИВАНИЕ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ КРАТНЫХ КРИТИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

Л. С. С р у б щ и к

(Ростов-на-Дону)

Исследуется выпучивание и послекритическое поведение упругих консервативных пологих оболочек с весьма малыми начальными несовершенствами в форме срединной поверхности при нескольких совпадающих критических нагрузках. В этом случае выпученная форма оболочки в начальной послекритической стадии представляет собой линейную комбинацию многих собственных форм и расчет критических нагрузок связан с необходимостью решения систем нелинейных алгебраических уравнений [1,2].

Анализ проводится на основе уравнений Муштари — Доннела — Власова [3] операторным методом Ляпунова — Шмидта [4-9]. В случае оболочек произвольной формы построены асимптотические представления новых равновесий в начальной послекритической стадии, получены система уравнений разветвления и формулы для определения ее коэффициентов, а также выведены уравнения поверхностей критических нагрузок, как функций параметров несовершенств оболочки.

При неосесимметричном выпучивании осесимметричного равновесия оболочек вращения дано полное решение задачи. Выписаны расчетные формулы для коэффициентов системы уравнений разветвления и построен алгоритм для определения всех ее решений. Показано, что учет связности собственных форм дает существенное снижение верхнего критического давления. Приведены результаты расчетов для сферических и конических оболочек по двум собственным формам.

Согласно расчетам и экспериментам, расхождение теоретических значений верхних критических нагрузок и действительных нагрузок прохлопывания широкого класса упругих оболочек в основном связано с малыми начальными отклонениями их формы от предполагаемой геометрической поверхности [10-12]. Первое исследование выпучивания несовершенных оболочек принадлежит Койтеру, работы которого были продолжены с использованием вариационных принципов рядом авторов (см. обзоры [1,2,13-16], почти все цитируемые в этих обзорах работы ограничены изучением потери устойчивости по одной собственной форме).

1. К постановке задачи. Операторная форма уравнений для возмущений. Система нелинейных уравнений равновесия упругих оболочек с малыми начальными неправильностями в форме срединной поверхности (вариант Муштари — Доннела — Власова [3], стр. 101) может быть представлена в виде

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta^2 w - [w - z, F] + \xi [\zeta, F] &= q \\ \varepsilon^2 \Delta^2 F + 1/2 [w, w] - [z, w] - \xi [\zeta, w] &= 0 \\ \Delta^2 &= \Delta \Delta, \quad \Delta w = l_1 w + l_2 w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[w, F] &= l_1 w l_2 F + l_2 w l_1 F - 2l_3 w l_3 F \\
l_1 w &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} \\
l_2 w &= \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \\
l_3 w &= -\frac{1}{AB} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{BA^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB^2} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta}
\end{aligned}$$

Эти уравнения будем рассматривать вместе с каждым из краевых условий на контуре Γ ([3], стр. 164)

$$\begin{aligned}
(1.2) \quad & 1) w = w_{\rho\rho} - \nu \kappa w_{\rho} = F = F_{\rho} = 0, \quad \rho = 0 \\
& 2) w = w_{\rho} = F = F_{\rho} = 0, \quad 3) w = w_{\rho} = 0 \\
& \Gamma_2 F = \Gamma_3 F = 0, \quad \Gamma_2 F = F_{\rho\rho} - \nu F_{ss} + \kappa \nu F_{\rho} \\
& \Gamma_3 F = F_{\rho\rho\rho} + (2 + \nu) F_{\rho ss} + 3\kappa F_{ss} + (2 + \nu) \kappa_s F_s - \\
& - \kappa^2 (1 - \nu) F_{\rho}
\end{aligned}$$

Все величины, входящие в (1.1), (1.2), безразмерные и связаны с размерными в [3] по формулам

$$\begin{aligned}
a \{w, z, \alpha, \beta, -\rho, s, \kappa^{-1}\} &= \{W, S, \alpha_1, \alpha_2, n, \tau, \kappa_0^{-1}\} \\
\varepsilon^2 &= h (a\gamma)^{-1}, \quad \Psi = E F a^2 \varepsilon h, \quad X = E \gamma \varepsilon^4 q, \quad \gamma^2 = \\
&= 12 (1 - \nu^2)
\end{aligned}$$

Здесь a — характерный размер области D , z — срединная поверхность идеальной оболочки, $z(s) = 0$ при $s \in \Gamma$, $\xi \zeta(\alpha, \beta)$ — безразмерный начальный полог и $|\xi| \ll 1$. Функции $q(\alpha, \beta)$, $z(\alpha, \beta)$ считаются достаточно гладкими. Краевые условия соответствуют: 1) подвижной шарнирной опоре, 2) скользящему заземлению края, 3) абсолютно глухой заделке края.

Обозначим через $x^* \equiv (w^*, F^*)$ основное решение задачи (1.1), (1.2) при $\xi = 0$ и исследуем потерю устойчивости соответствующего равновесия при изменении нагрузки. Предполагаем, что нагрузка зависит от единственного параметра p и потеря устойчивости основного равновесия идеальной оболочки проявляется через выпучивание в точке бифуркации p_0 . Полагая

$$(1.3) \quad w = w^* + \omega, \quad F = F^* + \psi, \quad p = p_0 + \lambda$$

из (1.1), (1.2) для малых возмущений ω, ψ, λ получим вместе с краевыми условиями вида (1.2) систему уравнений в операторной форме

$$\begin{aligned}
(1.4) \quad & M_0 x = P x + \sum_{m=1} \lambda^m C_m x - \xi T x + \xi \sum_{m=0} \lambda^m R_m \\
& M_0 x \equiv (\varepsilon^2 \Delta^2 \omega + [z, \psi] - [w^*(p_0), \psi] - [F^*(p_0), \omega], \\
& - \varepsilon^2 \Delta^2 \psi + [z, \omega] - [w^*(p_0), \omega]), \quad x = (\omega, \psi) \\
& P x = ([\omega, \psi], 1/2 [\omega, \omega]), \quad T x = ([\zeta, \psi], [\zeta, \omega]) \\
& - R_m = ([\zeta, F_m^*], [\zeta, w_m^*]), \quad C_m x = ([w_m^*, \psi] + \\
& + [F_m^*, \omega], [w_m^*, \omega]); \quad \{w_m^*, F_m^*\} = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial p^m} \{w^*, F^*\} \Big|_{p=p_0}
\end{aligned}$$

2. Применение операторного метода Ляпунова — Шмидта. В результате линеаризации задач (1.1), (1.2) относительно x^* вместе с краевыми условиями вида (1.2) имеем систему

$$(2.1) \quad M_0 x = 0, \quad x = (\omega, \psi)$$

Пусть собственному значению ρ_0 оператора M_0 отвечает система из n собственных вектор-функций. Ортонормируя ее относительно метрики пространства E^1 , которое введено в [9], и обозначая полученные собственные вектор-функции через $\varphi_i \equiv (\omega_i, \psi_i)$, имеем

$$(2.2) \quad \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_{E^1} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Тогда в силу формальной самосопряженности оператора M_0 можно построить оператор Шмидта M_1 в виде [5-7]

$$(2.3) \quad M_1 x = M_0 x + \sum_{i=1}^n a_i \mu_i \varphi_i, \quad \mu_i = \langle x, \varphi_i \rangle_{E^1}$$

$$a_i \int_D (\omega_i^2 + \psi_i^2) A B d\alpha d\beta = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Теперь при помощи (2.3) получаем уравнение

$$(2.4) \quad M_1 x = \Pi x + \sum_{m=1}^n \lambda^m C_m x - \xi T x + \xi \sum_{m=0}^n \lambda^m R_m + \sum_{i=1}^n a_i \mu_i \varphi_i$$

Разыскивая решение x в виде ряда

$$(2.5) \quad x = \sum_{k+j+\delta \geq 1} x_{(k)j\delta} \mu_1^{k_1} \mu_2^{k_2} \dots \mu_n^{k_n} \lambda^j \xi^\delta; \quad (k) = k_1, k_2, \dots, k_n$$

$$k = k_1 + k_2 + \dots + k_n, \quad x_{(k)j\delta} = (\omega_{(k)j\delta}, \psi_{(k)j\delta});$$

$$k, j, \delta \geq 0$$

где μ_i, λ, ξ — малые числа, для определения $x_{(k)j\delta}$ из (2.4) находим уравнения

$$(2.6) \quad M_1 x_{(1)00} = a_i \varphi_i \quad (k_i = 1, k_j = 0, i \neq j, i = 1, 2, \dots, n)$$

$$M_1 x_{(0)10} = 0, \quad M_1 x_{(0)01} = R_0, \quad M_1 x_{(k)j\delta} = \sum_{\eta+i=j} C_i x_{(k)\eta\delta} +$$

$$+ \sum' \left([\omega_{(l)\eta r}, \psi_{(m)\gamma t}], \frac{1}{2} [\omega_{(l)\eta r}, \omega_{(m)\gamma t}] \right) - ([\zeta, \psi_{(k)j\beta}], [\zeta, \omega_{(k)j\beta}]) -$$

$$- \rho_0 ([\zeta, F_j^*], [\zeta, w_j^*]) \equiv f_{(k)j\delta}, \quad k + j + \delta \geq 2, \beta = \delta - 1$$

$$(m) = m_1, m_2, \dots, m_n; (l) = l_1, l_2, \dots, l_n$$

Здесь $\rho_0 = 1$, если $(k) = 0, \delta = 1, j \geq 1$, и $\rho_0 = 0$ во всех остальных случаях. Краевые условия имеют вид (1.2). Суммирование под знаком \sum' происходит по всем индексам $m_i + l_i = k_i, \eta + \gamma = j, r + t = \delta$, где $m_i, l_i, \eta, \gamma, r, t$ — целые неотрицательные числа. По обобщенной лемме Шмидта [5] существует обратный линейный ограниченный оператор M_1^{-1} . Поэтому все задачи (2.6), (2.7) разрешимы. В частности, имеем $x_{(1)00} = \varphi_i$ при $k_i = 1, k_j = 0, (i \neq j)$ и $x_{(0)10} = 0$. При помощи (2.6) из выражений для μ_i в (2.3) получаем систему уравнений разветвления [6]

$$(2.7) \quad \Phi_i \equiv a_0^{(i)} \xi + \lambda c_m^{(i)} \mu_m + a_{mi}^{(i)} \mu_m \mu_l + b_{mik}^{(i)} \mu_m \mu_l \mu_k + \dots \equiv 0$$

где i изменяется от 1 до n и принято обычное правило суммирования. Применяя (25.6) в [5], из (2.5), (2.6) для определения коэффициентов в (2.3) находим формулы (6) работы [9], но с заменой в них ψ_0^* , ψ_1^* соответственно на F_0^* , F_1^* .

Условия (2.2) при $i = j$ позволяют вычислить постоянные множители $e_i \neq 0$, с точностью до которых определяются собственные вектор-функции $\varphi_i = e_i X_i$, где X_i также удовлетворяют системе (2.1). При помощи замены переменных

$$\begin{aligned} v_i &= \mu_i e_i, \quad \varphi_i = e_i X_i, \quad a_0^{(i)} = e_i D^{(i)}, \quad c_m^{(i)} = e_i e_m C_m^{(i)} \\ a_{ml}^{(i)} &= e_i e_m e_l A_{ml}^{(i)}, \quad b_{mlk}^{(i)} = e_i e_m e_l e_k B_{mlk}^{(i)} \end{aligned}$$

можно убедиться, что система уравнений разветвления (2.7) и асимптотические представления (2.5) приводятся к виду, не зависящему от амплитуд e_i . Следовательно, при вычислениях в качестве e_i можно взять произвольные не равные нулю числа. В частности, можно положить $e_i = 1$ или $e_i = [\max_D |X_i|]^{-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Этот простой факт позволяет устранить неопределенность, получающуюся в теории Койтера для линейной комбинации выпученных форм в начальной послекритической стадии ([17], стр. 62).

Таким образом, задача о построении смежных с x^* форм равновесия в окрестности p_0 сводится к задаче об отыскании всех действительных решений системы (2.7). После того как решения этой системы найдены, асимптотические представления равновесий получаются из (2.5). В случае несовершенной оболочки ($\xi \neq 0$) в достаточно малой окрестности точки бифуркации p_0 образуются поверхности значений критических нагрузок $p^* (A_1, A_2, \dots, A_n)$, где $A_i = a_0^{(i)}$. Для их определения систему (2.7) будем решать совместно с необходимым условием потери устойчивости основного равновесия [18]

$$(2.8) \quad \Phi_{n+1} \equiv \det \|\partial \Phi_i / \partial \mu_j\| = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

Такой способ позволяет, не отыскивая всех ветвей решений системы (2.7), находить поверхности значений критических нагрузок как функций n параметров, характеризующих несовершенства оболочки.

Пусть A_i — функции некоторого параметра s и пусть при некотором значении $s = s_0$ вектор $X_0 = \{\mu_1^0, \mu_2^0, \dots, \mu_n^0, \lambda\}$ — решение системы (2.7), (2.8). Дифференцируя ее уравнения по s , получаем систему

$$(2.9) \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mu_j} \frac{\partial \mu_j}{\partial s} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial s} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n+1)$$

При $s_1 = s_0 + \Delta s$ решение (2.7), (2.8) находится при помощи ньютоновских итераций

$$(2.10) \quad \begin{aligned} X_{k+1} &= X_k - D^{-1}(X_k, s_1) \Phi(X_k, s_1) \\ X_k &= \{\mu_1^{(k)}, \mu_2^{(k)}, \dots, \mu_n^{(k)}, \lambda\}, \quad \Phi = \{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n+1}\} \end{aligned}$$

Здесь D^{-1} — матрица, обратная к матрице системы (2.9), и $k = 0, 1, \dots, l$, где l — заданное число итераций.

Формулы (2.10) позволяют строить критические значения $p^*(s)$ вдоль некоторого заданного пути, определяемого законом изменения A_i от s . Вдоль этого пути значение p^* — предельная точка, за исключением случая, когда ранг всей матрицы меньше $n + 1$ и p^* ($\neq p_0$) является точкой вторичной бифуркации. При подходе к ней сходимость итераций (2.10) падает, так как $\det(D)$ стремится к нулю. Отметим, что точки вторичной бифуркации вызывают особый интерес [2], так как характеризуются резким качественным изменением поведения системы.

3. Неосесимметричное выпучивание оболочек вращения по многим собственным формам. В работе [19] представлено основанное на теории Койтера решение задачи о начальном этапе неосесимметричного выпучивания по одной собственной форме жестко заземленного сферического купола при действии нагрузки, равномерно распределенной по круговой области с центром в вершине. В данном параграфе получены расчетные формулы для анализа начальной стадии неосесимметричного выпучивания по многим собственным формам осесимметричного равновесия x^* произвольных замкнутых в вершине оболочек вращения.

Уравнения равновесия оболочки вращения под действием осесимметричной нагрузки $q = q(r, p)$ выводим из (1.1), (1.2) при $A = 1, B = \alpha = r, \beta = \theta$. Полученные краевые задачи при $\xi = 0$ и любых p имеют осесимметричное решение $x^*(r) = (w^*(r), F^*(r))$, которое определяется из системы нелинейных уравнений с краевыми условиями

$$(3.1) \quad \varepsilon^2 Au + uv - \theta_* v + \varphi(r) = 0, \quad \varepsilon^2 Av - \frac{1}{2} u^2 + \theta_* u = 0$$

$$A(\cdot) \equiv -r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r(\cdot), \quad \varphi(r) = \varphi(r, p) = \int_0^r q(\tau, p) \tau d\tau$$

$$u(r, p) = \frac{\partial w^*}{\partial r}, \quad v(r, p) = \frac{\partial F^*}{\partial r}, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \theta_*(r)$$

$$1) \left[\frac{du}{dr} + vu \right]_{r=1} = v(1) = 0, \quad 2) u(1) = v(1) = 0$$

$$3) u(1) = \left[\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} v \right]_{r=1} = 0, \quad \left| \frac{u}{r}, \frac{v}{r} \right|_{r=0} < \infty$$

Предположим, что потеря устойчивости докритического равновесия идеальной оболочки вращения проявляется в точке бифуркации p_0 через неосесимметричное выпучивание. Следуя [20], будем разыскивать решение краевых задач (2.1), (1.2) при $A = 1, B = \alpha = r, \beta = \theta$ в виде

$$(3.2) \quad (\omega, \psi) = \cos n\theta x_n(r), \quad x_n(r) = (w_n, f_n)$$

Здесь n — целое число. После разделения переменных для определения $w_n(r), f_n(r)$ получим систему с краевыми условиями [20]

$$(3.3) \quad l_n^{(1)} x_n \equiv \varepsilon^2 L_n^2 w_n + \frac{1}{r} (\theta_* - u_0)' \left(f_n' - \frac{n^2}{r} f_n \right) +$$

$$+ \frac{1}{r} (\theta_* - u_0) f_n'' - \frac{1}{r} v_0' \left(w_n' - \frac{n^2}{r} w_n \right) - \frac{1}{r} v_0 w_n'' = 0$$

$$l_n^{(2)} x_n \equiv -\varepsilon^2 L_n^2 f_n + \frac{1}{r} (\theta_* - u_0)' \left(w_n' - \frac{n^2}{r} w_n \right) + \frac{1}{r} (\theta_* - u_0) w_n'' = 0$$

$$L_n(\) = (\)'' + \frac{1}{r} (\)' - \frac{n^2}{r^2} (\), \quad f_n = O(r^2), \quad w_n = O(r^2)$$

$$u(p_0) = u_0, \quad v(p_0) = v_0, \quad (\)' = \frac{\partial (\)}{\partial r}$$

$$1) w_n = w_n'' + v w_n' = f_n = f_n' = 0, \quad 2) w_n = w_n' = f_n = f_n' = 0$$

$$3) w_n = w_n' = f_n'' - v f_n' + v n^2 f_n = 0, \quad f_n''' - (2 + v) n^2 f_n' + 3n^2 f_n + (v - 1) f_n' = 0$$

Точно такие же задачи получаются, если искать решение в виде (3.2), но с заменой $\cos n\theta$ на $\sin n\theta$.

Пусть собственному значению p_0 задач (3.3) отвечают две собственные вектор-функции x_s, x_m . Тогда тому же значению исходной линеаризованной задачи отвечает четыре собственные вектор-функции, которые запишем в виде

$$\varphi_1 = \cos s\theta (\gamma_1, \delta_1), \quad \varphi_2 = \cos m\theta (\gamma_2, \delta_2), \quad \varphi_3 = \sin m\theta (\gamma_1, \delta_2)$$

$$\varphi_4 = \sin s\theta (\gamma_1, \delta_1), \quad \gamma_i = \gamma_i(r), \quad \delta_i = \delta_i(r), \quad i = 1, 2$$

Здесь s, m — целые числа, причем $s \neq \frac{1}{2} m, s < m$. Можно показать, что только две из собственных вектор-функций φ_i линейно-независимы. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать случай взаимодействия двух форм φ_1 и φ_2 , содержащих только косинусы. При $k = 2, k_1 = k_2 = 1, j = \delta = 0$ из (2.6) для $x_{1100} = (\omega_{1100}, \psi_{1100})$ имеем

$$(3.4) \quad M_1 x_{1100} = ([\omega_1, \psi_2] + [\omega_2, \psi_1], [\omega_1, \omega_2]) = f_{1100}$$

Отсюда, применяя φ_1 и φ_2 и разыскивая решение x_{1100} в виде

$$(3.5) \quad x_{1100} = E(r) \cos(m-s)\theta + F(r) \cos(m+s)\theta$$

для определения $E = (E_1, E_2)$ получаем систему

$$(3.6) \quad l_{m-s}^{(1)} E = \frac{1}{2} (I_1 - I_2), \quad l_{m-s}^{(2)} E = \frac{1}{2} (I_3 - I_4)$$

с краевыми условиями в (3.3), но с заменой индекса n на $m-s$ и x_n на E , а для определения $F = (F_1, F_2)$ — систему

$$(3.7) \quad l_{m+s}^{(1)} F = \frac{1}{2} (I_1 + I_2), \quad l_{m+s}^{(2)} F = \frac{1}{2} (I_3 + I_4)$$

с краевыми условиями в (3.3), но с [заменой x_n на F и индекса n на $m+s$. Здесь

$$(3.8) \quad rI_1 = [\gamma_1, \delta_2, m] + [\delta_2, \gamma_1, s] + [\delta_1, \gamma_2, m] + [\gamma_2, \delta_1, s]$$

$$r^2 I_2 = 2sm ([\delta_2] [\gamma_1] + [\delta_1] [\gamma_2])$$

$$rI_3 = [\gamma_1, \gamma_2, m] + [\gamma_2, \gamma_1, s], \quad r^2 I_4 = 2sm [\gamma_1] [\gamma_2]$$

$$[\gamma_1, \delta_2, m] = \gamma_1'' (\delta_2' - m^2 \delta_2 / r), \quad [\gamma_1] = \gamma_1' - \gamma_1 / r$$

Для $m - s = 1$ при помощи замены переменных

$$(3.9) \quad x = rE_1' - E_1, \quad y = rE_2' - E_2, \quad |x/r, y/r|_{r=0} < \infty$$

система (3.6) преобразуется в краевые задачи

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \varepsilon^2 (rx'' - x' - 3x/r) + (\theta_* - u_0)y - v_0x &= V_1(r) \\ -\varepsilon^2 (ry'' - y' - 3y/r) + (\theta_* - u_0)x &= V_2(r) \\ 2V_1 &= r(\gamma_1'\delta_2' + \delta_1'\gamma_2') + 2s(m/r)(\gamma_1\delta_2 + \delta_1\gamma_2) - \\ &- m^2\gamma_1'\delta_2 - m^2\delta_1'\gamma_2 - s^2\gamma_1\delta_2' - s^2\delta_1\gamma_2', \quad 2V_2 = \\ &= r\gamma_1'\gamma_2' - m^2\gamma_1'\gamma_2 - s^2\gamma_1\gamma_2' + 2sm\gamma_1\gamma_2/r, \quad 1) x'(1) + \\ &+ vx(1) = y(1) = 0 \\ 2) x(1) = y(1) = 0, \quad 3) x(1) = y'(1) - vy(1) &= 0 \end{aligned}$$

Далее из (2.6) при $k = k_1 = 2, k_2 = 0, j = \delta = 0$ имеем

$$(3.11) \quad M_1 x_{2000} = ([\omega_1, \psi_1], 1/2 [\omega_1, \omega_1])$$

Такого типа уравнение получается при исследовании выпучивания по одной собственной форме. Следуя [19], ищем решение (3.11) в виде

$$(3.12) \quad x_{2000} = \int_1^r \sigma_1(r) dr + B(r) \cos 2s\theta$$

Здесь $\sigma_1 = (-\beta_1, \alpha_1)$, определяется из задачи

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \varepsilon^2 [(r\beta_1)'] - \beta_1/r - v_0\beta_1 + (u_0 - \theta_*)\alpha_1 &= g_1(r) \\ \varepsilon^2 [(r\alpha_1)'] - \alpha_1/r - u_0\beta_1 + \theta_*\beta_1 &= g_2(r) \\ g_1(r) &= 1/2 [s^2(\gamma_1\delta_1/r)' - \gamma_1'\delta_1'] \\ g_2(r) &= 1/4 [s^2(\gamma_1^2/r)' - \gamma_1'^2], \quad |\alpha_1/r, \beta_1/r|_{r=0} < \infty \\ 1) \beta_1'(1) + v\beta_1(1) = \alpha_1(1) = 0, \quad 2) \beta_1(1) = \alpha_1(1) = 0 \\ 3) \beta_1(1) = \alpha_1'(1) - v\alpha_1(1) = 0 \end{aligned}$$

а вектор-функция $B = (B_1, B_2)$ — из системы

$$(3.14) \quad \begin{aligned} l_{2s}^{(1)}B &= h_1(r), \quad l_{2s}^{(2)}B = h_2(r) \\ h_1 &= [\gamma_1, \delta_1, s] + [\delta_1, \gamma_1, s] + 2s^2[\delta_1][\gamma_1] \\ h_2 &= [\gamma_1, \gamma_1, s] + s^2[\gamma_1, \gamma_1] \end{aligned}$$

с краевыми условиями в (3.3), но с заменой индекса n на $2s$ и x_n на B .

Вектор-функция x_{0200} строится в виде (3.12), но с заменой s на m , σ_1 на $\sigma_2 \equiv (-\beta_2, \alpha_2)$ и B на $D \equiv (D_1, D_2)$, которые определяются соответственно из задач (3.3) — (3.14), но с заменой там s_1, γ_1, δ_1 соответственно на m, γ_2, δ_2 .

Коэффициенты системы уравнений разветвлений выводятся из формул (6) в [9] при $n = 2$. Опуская громоздкие выкладки, приведем окончательные формулы для вычисления этих коэффициентов

$$(3.15) \quad c_i^{(i)} = 4\pi \int_0^1 \beta_i \frac{\partial \varphi}{\partial p} dr, \quad c_2^{(1)} = c_1^{(2)} = 0, \quad a_{mi}^{(i)} = 0$$

$$b_{222}^{(1)} = b_{112}^{(1)} = b_{111}^{(2)} = b_{122}^{(2)} = 0 \quad (i, m, l = 1, 2)$$

$$b_{111}^{(1)} = -4\pi \int_0^1 \left\{ g_1 \beta_1 - \alpha_1 g_2 - \frac{1}{2} r (h_1 B_1 + h_2 B_2) \right\} dr$$

$$b_{222}^{(2)} = -4\pi \int_0^1 \left\{ G_1 \beta_2 - \alpha_2 G_2 - \frac{1}{2} r (H_1 D_1 + H_2 D_2) \right\} dr$$

$$b_{122}^{(1)} = \frac{\pi}{2} \left\{ I - 8 \int_0^1 (\beta_2 g_1 - \alpha_2 g_2) dr \right\},$$

$$b_{112}^{(2)} = \frac{\pi}{2} \left\{ I - 8 \int_0^1 (\beta_1 G_1 - \alpha_1 G_2) dr \right\}, \quad b_{122}^{(1)} = b_{112}^{(2)}$$

$$I = \int_0^1 \{ E_1 (I_1 - I_2) + E_2 (I_3 - I_4) + F_1 (I_1 + I_2) + F_2 (I_3 + I_4) \} dr$$

где G_i, H_i получаются из выражений для g_i, h_i соответственно при помощи замены s, γ_1, δ_1 на m, γ_2, δ_2 .

При доказательстве формул (3.15) применяется тождество

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \{ [E_1, \delta_1, s] + [\delta_1, E_1, m - s] - 2(m - s)s [E_1] [\delta_1] r^{-1} \} \gamma_2 dr = \\ & = \{ E_1' \delta_1' \gamma_2 - s^2 E_1' \delta_1 \gamma_2 + 2(m - s)s E_1 (\delta_1' \gamma_2 - \delta_1 \gamma_2 r^{-1}) - E_1 \delta_1' \gamma_2' + \\ & + E_1 (\delta_1 \gamma_2 r^{-1})' \} \int_0^1 E_1 \{ [\gamma_2, \delta_1, s] + [\delta_1, \gamma_2, m] - 2ms [\gamma_2] [\delta_1] r^{-1} \} dr \end{aligned}$$

которое проверяется интегрированием по частям. Равенство $b_{122}^{(1)} = b_{112}^{(2)}$ выводится из двух предшествующих ему формул в (3.15). Это равенство — следствие консервативности конструкции. При выводе (3.15) предполагается, что $s \neq \frac{1}{2} m$ и $s \neq \frac{1}{3} m$ ($s < m$).

Теперь предположим, что собственному значению p_0 задач (3.3) отвечает n собственных вектор-функций. Тогда для собственного значения p_0 исходной линеаризованной задачи (2.1) имеем n собственных вектор-функций вида

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \varphi_i &= \cos m_i \theta (\gamma_i, \delta_i), \quad \gamma_i = \gamma_i(r), \quad \delta_i = \delta_i(r) \\ i &= 1, 2, \dots, n, \quad m_1 < m_2 < \dots < m_n \end{aligned}$$

Здесь $m_i \neq \frac{1}{2} m_j, m_i \neq \frac{1}{3} m_j, (j > i)$. Собственные вектор-функции $\sin m_i \theta (\gamma_i, \delta_i)$ не включены в систему (3.16) ввиду их линейной зависимости от φ_i . Определение коэффициентов ряда (2.5) сводится к решению задач либо вида (3.4) — (3.10), либо вида (3.11) — (3.14). Вычисление коэффициентов системы уравнений разветвления проводится по формулам (3.15) с соответствующей заменой индексов (s на m_i, m на m_j).

В результате получаем, что система (2.7) приводится к виду

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \Phi_i &\equiv \mu_i \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} \mu_k^2 + \lambda \right) + \xi d_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ d_i &= A_i c_i^{-1}, \quad a_{ik} = h_{ik} c_i^{-1}, \quad c_i \neq 0, \quad h_{ik} = h_{ki} \end{aligned}$$

В случае нарушения условий $m_i \neq 1/2 m_j$ или $m_i \neq 1/3 m_j$ некоторые из нулевых коэффициентов в (3.15) уже не будут равны нулю и вид системы разветвления (3.17) изменится (см., например, [2, 17]).

Чтобы найти решения системы (3.17), аналогично [9] положим

$$(3.18) \quad d_1 = \dots = d_m = 0, \quad d_n \neq 0, \quad m = n - 1$$

Первая группа из 2^m семейств решений системы (3.17), (3.18), (2.8) представлена формулами (9) в [9]. Чтобы найти вторую группу семейств решений, положим

$$(3.19) \quad \mu_{k_1} = \mu_{k_2} = \dots = \mu_{k_l} = 0, \quad 1 \leq k_j \leq m; \quad j = 1, 2, \dots, l$$

Приравняем нулю выражение в круглых скобках первых m уравнений системы (3.17), (3.18). В полученной системе линейных относительно μ_i^2 уравнений выделим матрицу, которая получается из матрицы коэффициентов a_{ik} путем вычеркивания столбцов с номерами k_1, k_2, \dots, k_l и строк с номерами $k_1, k_2, \dots, k_{l-1}, n$. Выделенную матрицу порядка $n - l$ обозначим через $E^{k_1 k_2 \dots k_l}$, а ее определитель — через E , т. е.

$$(3.20) \quad E = \det (E^{k_1 k_2 \dots k_l}) = \det \| a_{rs} \|, \quad 1 \leq r \leq m \\ r \neq k_1, k_2, \dots, k_{l-1}, n; \quad 1 \leq s \leq n, \quad s \neq k_1, k_2, \dots, k_{l-1}, \\ k_l; \quad k_l \neq n$$

Решая систему уравнений с матрицей $E^{k_1 k_2 \dots k_l}$, при $i \neq k_j$ ($j = 1, 2, \dots, l$) получаем

$$(3.21) \quad \mu_i^2 = -\lambda E^{-1} H_i, \quad H_i = \sum_{r=1}^{m'} E_{ri}$$

Здесь E_{ri} — алгебраическое дополнение к элементу a_{ri} матрицы $E^{k_1 k_2 \dots k_l}$, а штрих означает, что суммирование проводится по индексам, не совпадающим с k_1, k_2, \dots, k_{l-1} . Подставляя (3.21) в последнее уравнение (3.17), получим

$$(3.22) \quad p_0 - p = -\lambda = E H_n^{-1/3} \left\{ \xi d_n \left(E - \sum_{t=1}^{n''} a_{nt} H_t \right) \right\}^{2/3}$$

Здесь двойной штрих означает, что суммирование проводится по индексам, не совпадающим с k_1, k_2, \dots, k_l . Все семейства решений этой группы получаются изменением числа l в (3.19) и выборкой l индексов k_1, k_2, \dots, k_l из m элементов. Можно показать, что число решений вида (3.21), (3.22) равно $m 2^{m-1}$. Отметим, что здесь и в [9] число семейств решений подсчитывалось относительно μ_i^2 . При извлечении квадратных корней могут появиться различные решения, отличающиеся знаками у части или всех μ_i . Каждое из этих решений порождает свою поверхность критических нагрузок, хотя при $d_1 = \dots = d_m = 0, d_n \neq 0$ значения λ для них одинаковые (см. ниже, п. 4).

4. Сферическая оболочка при равномерном внешнем давлении. По формулам п. 3 был составлен пакет численных программ для ЭВМ БЭСМ-6 с применением метода конечных разностей в сочетании с матричной прогонкой и процедурой продолжения по

параметру нагрузки [19-21]. Приведем некоторые результаты расчетов для несовершенных сферических оболочек.

Пусть q_0 — классическое значение критического давления для полной сферы, $\Lambda \equiv 2 [3 (1 - \nu^2)]^{1/4} (H/h)^{1/2}$, $p_0 = p_H/q_0$, где H — высота подъема оболочки, h — ее толщина, ν — коэффициент Пуассона и p_H — критическое давление несимметричного выпучивания идеальной сферической оболочки. Тогда из [20] вытекает, что при $\Lambda = 17$ наименьшему собственному значению $p_0 = 0.790$ задачи (2.1) в случае глухой заделки края отвечают две собственные вектор-функции с гармониками $s = 11$, $m = 12$ и амплитудами, определяемыми из (3.1), (3.3) при $\theta_* = -r$.

Вычисляя по формулам (3.15) коэффициенты системы уравнений разветвления, получаем, что критические нагрузки $p^*(A_1, A_2)$, как функционалы геометрических несовершенств, определяются из системы уравнений

$$(4.1) \quad \frac{\partial V}{\partial \mu_k} = 0, \quad \det \left\| \frac{\partial^2 V}{\partial \mu_k \partial \mu_j} \right\| = 0, \quad k, j = 1, 2$$

$$V = 910.74\mu_1^4 + 1023.58\mu_2^4 + 3871.80\mu_1^2\mu_2^2 +$$

$$+ (p - p_0)(2123.50\mu_1^2 + 2377.44\mu_2^2) + \xi (A_1\mu_1 + A_2\mu_2)$$

Отметим, что в силу (3.15) коэффициенты $b_{122}^{(1)}$ и $b_{122}^{(2)}$ равны. Однако для контроля расчета их вычисление проводилось независимо по формулам, представленным в (3.15). Расхождение между полученными значениями составило 0.018%. Используя (4.1), для системы (3.17) при $n = 2$ находим коэффициенты

$$(4.2) \quad a_1 = a_{11} = 0.8578, \quad b_1 = a_{12} = 1.8233$$

$$a_2 = a_{21} = 1.6286, \quad b_2 = a_{22} = 0.8636$$

При начальном погibe $\xi \zeta_2(r) \cos 12\theta$ (в плоскости $d_1 = 0$) в достаточно малой окрестности p_0 из формул (9) в [9] и (3.21), (3.22) находим три критических значения прощелкивания оболочки, определяемые формулами

$$(4.3) \quad p_2^{(i)} = p_0 - \eta_i (d_2 \xi)^{2/3}, \quad |\xi| \ll 1, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\eta_1 \equiv [1.5 (3b_2)^{1/2}]^{2/3} \approx 1.798, \quad \eta_2 \equiv b_1(b_1 - b_2)^{-2/3} \approx 1.871$$

$$\eta_3 = \eta_4 \equiv [1.5\Delta_2^{-1} (3\Delta_3\Delta_2^{-1})^{1/2} a_1]^{2/3} \approx 2.892$$

$$d_2 = \frac{-\pi}{c_2} \int_0^1 \left\{ (\zeta_2' v_0)' \gamma_2 + (\zeta_2' u_0)' \delta_2 - \frac{m^2}{r} \zeta_2 (v_0' \gamma_2 + u_0' \delta_2) \right\} dr$$

$$\Delta_2 = a_1 - a_2, \quad \Delta_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

При этом имеем четыре решения

$$(4.4) \quad \mu_1^{(1)} = 0, \quad \mu_2^{(1)} = \left[\frac{1}{3} L_1 b_2^{-1} \right]^{1/2}, \quad \mu_1^{(2)} = 0, \quad \mu_2^{(2)} = [L_2 b_1^{-1}]^{1/2}$$

$$\mu_1^{(3)} = [(L_3 - b_1 y^2) a_1^{-1}]^{1/2}, \quad y = \mu_2^{(3)} = - [1/3 L_3 \Delta_3 \Delta_2^{-1}]^{1/2}$$

$$\mu_1^{(4)} = -\mu_1^{(3)}, \quad \mu_2^{(4)} = \mu_2^{(3)}, \quad L_i = -\lambda_i = p_0 - p_2^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

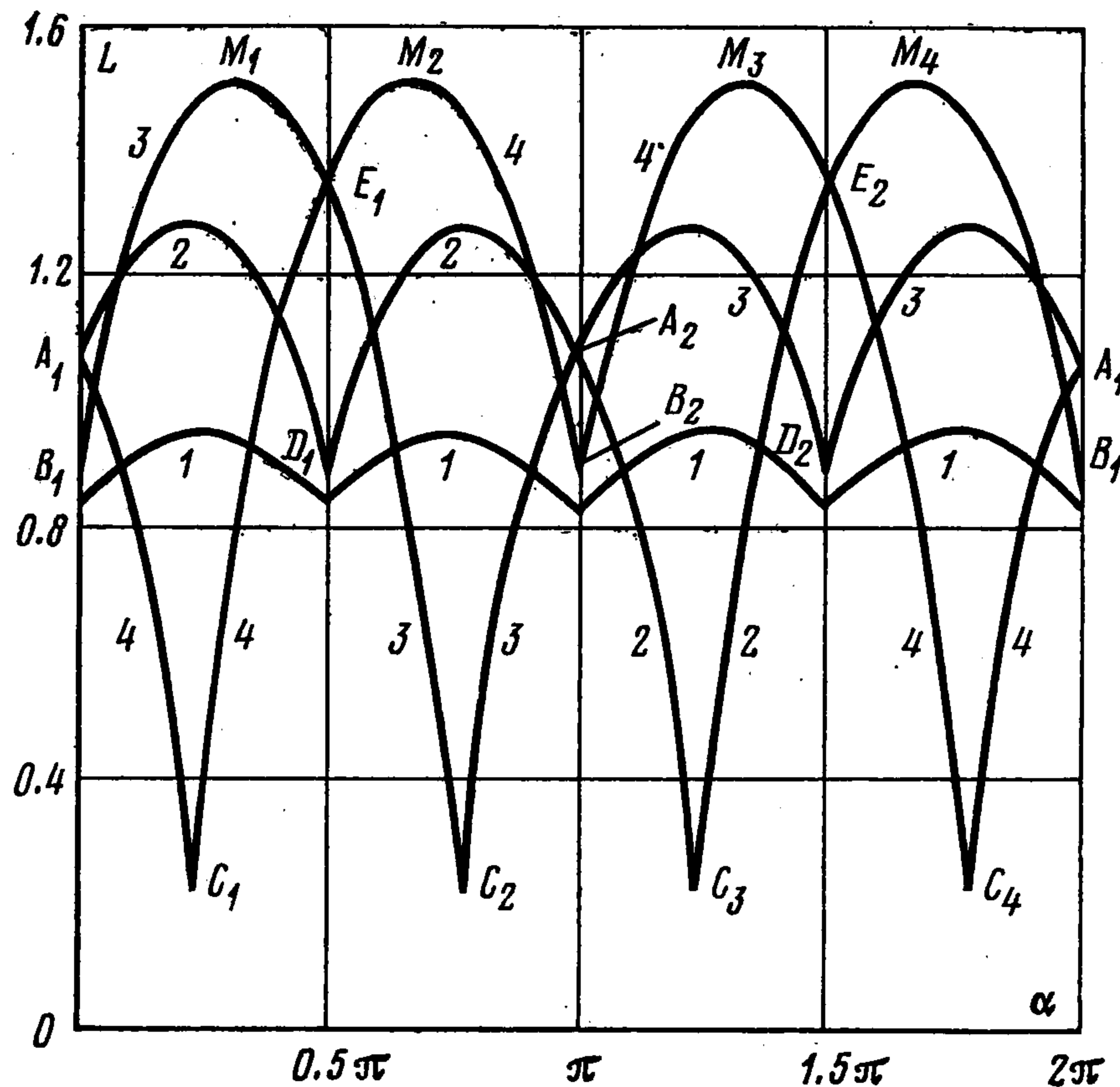
При начальном погibe $\xi \zeta_1(r) \cos 11\theta$ (в плоскости $d_2 = 0$) из (9) в [9], (3.21) (3.22) выводим

$$(4.5) \quad p_1^{(i)} = p_0 - \kappa_i (d_1 \xi)^{2/3}, \quad |\xi| \ll 1, \quad i = 5, 6, 7, 8$$

$$\kappa_5 = 1.795, \quad \kappa_6 = 1.937, \quad \kappa_7 = \kappa_8 = 2.323$$

Здесь d_1 получается из d_2 заменой m на s и всех индексов 2 на индексы 1. Формулы для решений при $i = 5, 6, 7, 8$ соответственно получаются из (4.4) при $i = 1, 2, 3, 4$ заменой a_1, b_1, a_2, b_2 соответственно на b_2, a_2, b_1, a_1 и, кроме того, $\mu_1^{(i)}, \mu_2^{(i)}$ на $\mu_2^{(i)}, \mu_1^{(i)}$. Значения $\mu_1^{(i)}, \mu_2^{(i)}, L_i$ при $i = 1$ и 5 соответствуют выпучиванию по одной собственной форме [19].

Для построения поверхностей критических нагрузок как функционалов геометрических несовершенств ξd_1 и ξd_2 численно решаем систему (3.17) при $n = 2$, (3.18), (4.2) с применением формул (2.10). Введем полярные координаты, положив $\xi d_1 = R \cos \alpha$, $\xi d_2 = R \sin \alpha$, где $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Продолжая каждое из решений (4.3) — (4.5) по углу α при фиксированном R , получаем, что над плоскостью $L = 0$ располагается четыре поверхности L_i ($\xi d_1, \xi d_2$), где $i = 1, 2, 3, 4$. Система (3.17) при $n = 2$ обладает свойствами симметрии при изменении знаков d_i или μ_i на противоположные. На фигуре представлено сечение этих поверхностей круговым цилиндром с радиусом $R = 0.01$. Поверхность L_1 проходит через кривые (4.3) при $i = 1$ и (4.5) при $i = 5$, которые получаются в предположении выпучивания по одной собственной форме. Пересечение L_1



с цилиндром дает на фигуре кривую 1, которая в точках $\alpha = 0, \frac{1}{2}\pi, \pi$ принимает значения $L \approx 0.0833$, а в точках $\alpha = \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi$ — значения $L \approx 0.0955$, близкие к максимальным значениям на этой кривой. На поверхности L_1 нет особых точек, где $\det D = 0$. (Точка $R = 0$ не учитывается.) Поверхности L_2, L_3, L_4 соединяются между собою вдоль указанных ниже лучей α , образуя в трехмерном пространстве ($\xi d_1, \xi d_2, L$) трехлистную поверхность с самопересечениями. Сразу укажем, что кривые (4.3) при $i = 2$ и (4.5) при $i = 6$, лежащие на этих поверхностях, состоят из особых точек, в которых $\det D = 0$. Поверхность L_2 проходит при $\alpha = 0$ через кривую (4.5) при $i = 7$, при $\alpha = 0.5\pi$ — через кривую особых точек (4.3) при $i = 2$, при $\alpha = \pi$ — через кривую (4.5) при $i = 7$ и при $\alpha = 1.5\pi$ — через кривую (4.3) при $i = 3$. При обходе по α вдоль этой поверхности после полного оборота, т. е. при $\alpha = 2\pi$, мы не возвращаемся на кривую (4.5) при $i = 7$, а приходим на кривую особых точек (4.5) при $i = 6$, которая лежит ниже. Вдоль этой кривой поверхность L_2 переходит в поверхность L_3 в 5-мерном пространстве переменных $\xi d_1, \xi d_2, L, \mu_1, \mu_2$. На поверхности L_2 вдоль луча $\pi + \alpha_*$, где $\alpha_* = 0.730$, находится еще одно множество особых точек. Пересечение L_2 с цилиндром дает на фигуре кривую 2.

Поверхность L_3 проходит при $\alpha = 0$ через кривую особых точек (4.5) при $i = 6$, при $\alpha = 0.5\pi$ — через кривую (4.3) при $i = 3$, при $\alpha = \pi$ — через кривую (4.5) при $i = 8$ и при $\alpha = 1.5\pi$ — через кривую (4.3) при $i = 2$. При обходе по α вдоль поверхности L_3 после полного оборота приходим на кривую (4.5) при $i = 8$, вдоль которой поверхность L_3 соединяется с поверхностью L_4 в 5-мерном пространстве. Вдоль луча $\pi - \alpha_*$ на L_3 расположено семейство особых точек. Пересечение L_3 с цилиндром дает на фигуре кривую 3.

Поверхность L_4 проходит при $\alpha = 0$ через кривую (4.5) при $i = 8$, при $\alpha = 0.5\pi$ — через кривую (4.3) при $i = 4$, при $\alpha = \pi$ — через кривую особых точек (4.5) при $i = 6$, при $\alpha = 1.5\pi$ — через кривую (4.3) при $i = 4$ и после полного оборота по α приходит на кривую (4.5) при $i = 7$. Вдоль последней кривой соединяются поверхности L_2 и L_4 . Вдоль лучей α_* и $2\pi - \alpha_*$ на поверхности L_4 расположены особые точки. Пересечение L_4 с цилиндром дает на фигуре кривую 4.

Таким образом, делая один полный оборот по α , мы проходим поверхность L_2 и попадаем на поверхность L_3 , которую обходим в результате второго полного оборота по α , и теперь попадаем на поверхность L_4 . После третьего полного оборота по α мы проходим поверхность L_4 и возвращаемся на поверхность L_2 . Дальнейший обход повторяет описанную выше картину. Приведем координаты точек, отмеченных на фигуре. Точки A_i, B_i, D_i, E_i имеют соответственно ординаты 0.1073, 0.0899, 0.0868, 0.1342. Как уже отмечалось, точки B_i, D_i, C_j , где $i = 1, 2$ и $j = 1, 2, 3, 4$, являются особыми точками или точками вторичной бифуркации [2, 22]. Точки C_1, C_2, C_3, C_4 имеют соответственно координаты (α_*, y_*) , $(\pi - \alpha_*, y_*)$, $(\pi + \alpha_*, y_*)$, $(2\pi - \alpha_*, y_*)$, где $\alpha_* = 0.730$, $y_* = 0.0218$. Несомненный интерес представляют точки M_j ($\alpha_j, 0.151$), где $\alpha_1 = 0.981$, $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$, $\alpha_3 = \pi + \alpha_1$, $\alpha_4 = 2\pi - \alpha_1$. В этих точках кривые 2, 3, 4 принимают максимальные значения, что соответствует наибольшему снижению критического давления при заданном значении $R = |\xi| (d_1^2 + d_2^2)^{1/2} = 0.01$.

5. Коническая оболочка при равномерном внешнем давлении. Из численных результатов [23] вытекает, что несимметричное выпучивание по двум собственным формам для конической оболочки при равномерном внешнем давлении и глухой заделке края имеет место при $\Lambda = 24$ и $p_0 = 0.242$, причем соответствующие гармоники имеют номера $s = 10$ и $m = 11$. В этом случае расчеты по формулам п. 3 приводят к потенциальной функции

$$(5.1) \quad V = 42.134\mu_1^4 + 44.722\mu_2^4 + 170.04\mu_1^2\mu_2^2 + \\ + (p - p_0)(1946.81\mu_1^2 + 2183.15\mu_2^2) + \xi(A_1\mu_1 + A_2\mu_2)$$

При начальном погибе $\xi \zeta_2(r) \cos 11\theta$ (в плоскости $d_1 = 0$) получаем формулы (4.3), (4.4), где $\eta_1 = 0.6635$, $\eta_2 = 0.6767$, $\eta_3 = \eta_4 = 1.1536$. При начальном погибе $\xi \zeta_1(r) \cos 10\theta$ (в плоскости $d_2 = 0$) получаем формулы (4.5), где $\kappa_5 = 0.6515$, $\kappa_6 = 0.7335$, $\kappa_7 = \kappa_8 = 0.8299$. Расположение поверхностей L_i аналогично случаю сферической оболочки, описанному выше; C_1 (0.7127, 0.0086); M_1 (0.982, 0.060).

6. Сферическая оболочка при переменном по радиусу давлении. Рассмотрим несимметричное выпучивание жестко заземленной сферической оболочки при давлении, распределенном по закону $q = 4p \sin(\pi r/2)$. Случай потери устойчивости по двум собственным формам имеет место при $\Lambda = 40$, $p_0 = 0.743$, причем $s = 32$ и $m = 33$. Расчеты по формулам п. 3 приводят к системе (4.1), где функция V теперь имеет вид

$$(6.1) \quad V = 1884.73 \mu_1^4 + 1969.78 \mu_2^4 + 7708.95 \mu_1^2 \mu_2^2 + \\ + (p - p_0)(5905.88 \mu_1^2 + 6211.91 \mu_2^2) + \xi(A_1 \mu_1 + A_2 \mu_2)$$

При начальном погибе $\xi \zeta_2(r) \cos 33\theta$ (в плоскости $d_1 = 0$) получаем формулы (4.3), (4.4), где $\eta_1 = 1.6237$, $\eta_2 = 1.7029$, $\eta_3 = \eta_4 = 2.4788$. При начальном погибе $\xi \zeta_1(r) \cos 32\theta$ (в плоскости $d_2 = 0$) получаем формулы (4.5), где $\kappa_5 = 1.6272$, $\kappa_6 = 1.7390$, $\kappa_7 = \kappa_8 = 2.2185$. Расположение поверхностей L_i аналогично предыдущему; C_1 (0.759, 0.018); M_1 (0.982, 0.119).

Для жестко заземленной сферической оболочки, находящейся под давлением, распределенным по закону $q = 4pr^2$, случай потери устойчивости имеет место, например, при $\Lambda = 40$, $p_0 = 0.778$, причем $s = 33$, $m = 34$. Аналогичным образом находим

$$V = 1344.68\mu_1^4 + 1397.08\mu_2^4 + 5486.65\mu_1^2\mu_2^2 + \\ + (p - p_0)(5652.02\mu_1^2 + 5929.83\mu_2^2) + \xi(A_1\mu_1 + A_2\mu_2)$$

При начальном погibe $\xi\zeta_2(r) \cos 34\theta$ получаем формулы (4.3), (4.4), где $\eta_1 = 1.4706$, $\eta_2 = 1.5419$, $\eta_3 = 2.24728$, $\eta_3 = \eta_4$. При начальном погibe $\xi\zeta_1(r) \cos 33\theta$ получаем формулы (4.5), где $\kappa_5 = 1.4754$, $\kappa_6 = 1.5770$, $\kappa_7 = \kappa_8 = 2.0085$. Расположение поверхностей L_i то же самое; $C_1(0.759, 0.020)$; $M_1(0.982, 0.131)$.

Автор благодарит И. И. Воровича, В. И. Юдовича и П. Е. Товстика за обсуждение результатов.

Поступила 19 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Koiter W. T. Current trends in the theory of buckling. In: Buckling of structures. Berlin, Springer — Verlag, 1976, p. 1—16.
2. Hansen J. W. Some two-mode buckling problems and their relation to catastrophe theory. AIAA J., 1977, vol. 15, No. 11, p. 1638—1644. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1977, т. 15, № 11).
3. Муштары Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань, Таткнигоиздат, 1957.
4. Ворович И. И. О некоторых прямых методах в нелинейной теории пологих оболочек. ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.
5. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., «Наука», 1969.
6. Срубщик Л. С., Треногин В. А. О выпучивании гибких пластин. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
7. Жуков М. Ю., Срубщик Л. С. Поведение замкнутой сферической оболочки после потери устойчивости. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
8. Mallet-Paret J. Buckling of cylindrical shells with small curvature. Quart. Appl. Math., 1977, vol. 35, No 3, p. 383—400.
9. Срубщик Л. С. Выпучивание упругих оболочек с начальными несовершенствами по многим собственным формам. Докл. АН СССР, 1979, т. 249, № 4.
10. Stein M. Some recent advances in the investigation of shell buckling. AIAA J., vol. 6, No. 12, p. 2339—2345. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1968, т. 6, № 12.)
11. Погорелов А. В. Геометрическая теория устойчивости оболочек. М., «Наука», 1966.
12. Kalnins A., Biricikoglu V. On the stability analysis of imperfect spherically shells. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1970, vol. 37, No. 3, p. 629—634. (Рус. перев.: Прикл. механ., 1970, № 3.)
13. Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость круговых цилиндрических оболочек. Итоги науки. Механика твердых деформируемых тел, 1967. М., ВИНТИ, 1969.
14. Hutchinson J. W., Koiter W. T. Postbuckling theory. Appl. Mech. Revs., 1970, vol. 23, No. 12, p. 1353—1366. (Рус. перев.: Механика. Период. сб. переводов иностр. статей, 1971, 4(128), 129—150.)
15. Ворович И. И., Минакова Н. И. Проблемы устойчивости и численные методы в теории сферических оболочек. Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел, т. 7. М., ВИНТИ, 1973.
16. Tvergaard V. Buckling behavior of plate and shell structures. In: Proceedings 14th IUTAM Congress Theoretical and Applied Mechanics Delft. the Netherlands, 1976. (Рус. перев.: М., «Мир», 1979.)
17. Hutchinson J. W. Imperfection sensitivity of externally pressurized spherical shells. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1967, vol. 34, No. 1, p. 49—55. (Рус. перев.: Прикл. механ., 1967, № 1.)
18. Thompson J. M. Basic principles in the general theory of elastic stability. J. Mech. and Phys. Solids, 1963, vol. 11, No. 1, p. 13—20.
19. Fitch J. R., Budiansky B. Buckling and postbuckling behavior of spherical caps under axisymmetric load. AIAA J., 1970, vol. 8, No. 4, p. 686—693. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1970, т. 8, № 14.)
20. Huang N. C. Unsymmetrical buckling of thin shallow spherical shells, Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1964, vol. 31, No. 3, p. 447—452. (Рус. перев.: Прикл. механ., 1964, № 3.)
21. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.
22. Bauer L., Keller H., Reiss E. Multiple eigenvalues lead to secondary bifurcations. SIAM Rev., 1975, vol. 17, No 1, p. 101—122.
23. Валишвили Н. В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. М., «Машиностроение», 1976.