Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 5, 1980

УДК 539.3:534.1

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВЫПУЧИВАНИЯ УПРУГИХ ПЛИТ ПРИ БОКОВОМ СЖАТИИ

А. Н. Рудев

(Псков)

С помощью однородных решений, построенных в [1], в трехмерной постановке исследуется устойчивость свободной от закреплений толстой плиты произвольной в плане формы из неогуковского материала [2]. Удовлетворение граничных условий на боковой поверхности осуществляется на основе вариационного принципа теории наложения малой деформации на конечную, предложенного в [3]. В результате задача определения критических давлений сводится к обобщенной задаче на собственные значения для бесконечной однородной системы операторных уравнений, существенно нелинейно-зависящих от параметра начальной деформации (как явно, так и неявно). Строится обобщение асимптотического метода, предложенного в [4], позволяющее получить асимптотику критических значений нагрузки при стремлении относительной толщины плиты ε к нулю. Выяснен вклад в напряженно-деформированное состояние плиты и величину критического давления тех потенциальных решений, которые соответствуют нерегулярным (при устранении начальной деформации) корням характеристического уравнения [1] и не имеют аналогов в линейной теории упругости [5]. Показано, что классическая двумерная теория выпучивания пластинок, основанная на гипотезах Кирхгофа [6], позволяет правильно определить главный член асимптотики критической нагрузки при $\varepsilon \to 0$. Рассмотрен пример осесимметричного выпучивания круглой плиты. Получено пять членов асимптотического разложения критической нагрузки. Установлено, что классическая теория дает величину критической силы с недостатком, причем относительная погрешность имеет порядок ε^2.

1. Рассмотрим плиту из несжимаемого неогуковского материала толщиной $2h$, подвергнутую равномерному давлению интенсивности t по боковой поверхности. Предполагается, что плита не закреплена, торцы ее свободны от напряжений, а массовые силы отсутствуют. Поверхностная нагрузка считается мертвой. При этом в плите возникает деформация вида

$$y_1 = \lambda x_1, \quad y_2 = \lambda x_2, \quad y_3 = \lambda^{-2} x_3 \quad (\lambda = \mathrm{const}) \tag{1.1}$$

где x_k, y_k ($k = 1, 2, 3$) — декартовы координаты соответственно до и после деформации. Связь между t и λ такова (G — модуль сдвига материала):

$$t = G(\lambda^{-4} - \lambda^2) \tag{1.2}$$

На конечную деформацию (1.1) накладывается малая деформация изгиба. Последняя описывается уравнениями нейтрального равновесия, приведенными в [7,1].

Введем местную систему безразмерных координат n, s, ζ [5]. В дальнейшем используются следующие обозначения: τ — объем, занимаемый плитой в недеформированном состоянии; σ — боковая поверхность плиты; Γ — контур, ограничивающий срединную плоскость (он предполагается достаточно гладким); R — радиус кривизны контура Γ; $2a$ — характерный продольный размер плиты; $\rho = a / R$ — безразмерная кривизна; $\varepsilon = h / a$ — относительная толщина плиты; u, v, w и ∂_{km} ($k, m = 1, 2, 3$) — соответственно компоненты вектора добавочных перемещений и добавочного тензора напряжений Пиола [2, 7] в системе n, s, ζ, причем индексы $1, 2, 3$ отвечают осям n, s, ζ соответственно; p — неопределенная функция координат, связанная с несжимаемостью материала [2]; $H = (1 + \rho n)^{-1}$ — величина, обратная к коэффициенту Ламе рассматриваемой системы криволинейных координат; ∂_i ($i = 1, 2$) — операторы дифференцирования по n, s соответственно; Δ — двумерный оператор Лапласа в переменных n, s.

Однородные решения уравнений нейтрального равновесия [1] в местной системе координат имеют следующий вид ($\gamma \equiv \lambda^{-3}$, $\omega \equiv 1 + \gamma^2$):

проникающее решение

$$U = a\varepsilon\gamma\zeta\partial_1\Psi + a\varepsilon^3 A(\zeta)\partial_1\Delta\Psi$$
$$V = a\varepsilon\gamma\zeta H\partial_2\Psi + a\varepsilon^3 A(\zeta) H\partial_2\Delta\Psi$$
$$W = -a\Psi + a\varepsilon^2 B(\zeta)\Delta\Psi, \quad P = \varepsilon\lambda C(\zeta)\Delta\Psi$$
$$A(\zeta) = -\gamma\alpha_0^{-2}\zeta + g\alpha_0^{-1}[\omega X_0(1, \gamma\zeta) - 2\gamma X_0(\gamma, \zeta)]$$
$$B(\zeta) = \alpha_0^{-2} + g[\omega Y_0(1, \gamma\zeta) - 2\gamma^2 Y_0(\gamma, \zeta)]$$
$$C(\zeta) = \alpha_0^{-1}\omega\cos\alpha_0 X_0(1, \gamma\zeta), \quad g = \alpha_0^{-2}(\gamma^2 - 1)^{-1}\cos\alpha_0$$
$$X_0(x, y) = \cos\alpha_0 x \sin\alpha_0 y, \quad Y_0(x, y) = \cos\alpha_0 x \cos\alpha_0 y$$
$$\varepsilon^2\Delta^2\Psi - \alpha_0^2\Delta\Psi = 0 \tag{1.3}$$

(α_0 — любой из двух чисто мнимых корней характеристического уравнения [1]),

вихревое решение

$$u^\circ = -a\varepsilon^2 \sum_{m=1}^{\infty} F_m(\zeta) H\partial_2 B_m, \quad v^\circ = a\varepsilon^2 \sum_{m=1}^{\infty} F_m(\zeta)\partial_1 B_m$$
$$w^\circ = p^\circ = 0$$
$$F_m(\zeta) = 4\gamma^2(-1)^{m+1}(1 - \gamma^2)^{-1}\sigma_m^{-2}\cos\sigma_m\gamma\sin\sigma_m\zeta$$
$$\varepsilon^2\Delta B_m - \sigma_m^2 B_m = 0, \quad \sigma_m = \pi(2m - 1)/2, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

потенциальное решение

$$u_* = a\varepsilon \sum_{q=1}^{\infty} T_q(\zeta)\partial_1 C_q + a\varepsilon \sum_{\nu=1}^{\infty} T_\nu(\zeta)\partial_1 C_\nu$$
$$v_* = a\varepsilon \sum_{q=1}^{\infty} T_q(\zeta) H\partial_2 C_q + a\varepsilon \sum_{\nu=1}^{\infty} T_\nu(\zeta) H\partial_2 C_\nu$$
$$w_* = -a \sum_{q=1}^{\infty} M_q(\zeta) C_q - a\varepsilon \sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu(\zeta) C_\nu$$
$$p_* = \varepsilon^{-1}\lambda \sum_{q=1}^{\infty} N_q(\zeta) C_q + \varepsilon^{-1}\lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} N_\nu(\zeta) C_\nu$$
$$T_q(\zeta) = \alpha_q^{-1}\beta[\omega X_q(1, \gamma\zeta) - 2\gamma X_q(\gamma, \zeta)]$$

$$M_q(\zeta) = -\beta[\omega Y_q(1, \gamma\zeta) - 2\gamma^2 Y_q(\gamma, \zeta)]$$
$$N_q(\zeta) = \alpha_q \omega X_q(1, \gamma\zeta), \quad \beta = (\gamma^2 - 1)^{-1}$$
$$X_q(x, y) = \cos \alpha_q x \sin \alpha_q y, \quad Y_q(x, y) = \cos \alpha_q x \cos \alpha_q' y$$
$$\varepsilon^2 \Delta C_q - \alpha_q^2 C_q = 0, \quad \varepsilon^2 \Delta C_\nu - \alpha_\nu^2 C_\nu = 0$$

(α_q и α_ν — соответственно комплексные и вещественные корни характеристического уравнения [1], лежащие в правой полуплоскости).

В дальнейшем для обозначения комплексных корней (и связанных с ними величин) применяется также индекс p, а для вещественных — μ. Функции X_ν, Y_ν получаются заменой q на ν из X_q, Y_q, тогда как выражения T_ν, M_ν, N_ν — в результате аналогичной замены из T_q, M_q, N_q соответственно и последующего домножения на $1 / \cos \alpha_\nu$.

Будем искать критические значения параметра t (или γ), для которых уравнения нейтрального равновесия при однородных граничных условиях на торцах плиты

$$\partial_{31}|_{\zeta=\pm 1} = \partial_{32}|_{\zeta=\pm 1} = \partial_{33}|_{\zeta=\pm 1} = 0 \tag{1.4}$$

и на боковой поверхности

$$\partial_{11}|_{n=0} = \partial_{12}|_{n=0} = \partial_{13}|_{n=0} = 0 \tag{1.5}$$

выражающих отсутствие добавочной нагрузки, допускают нетривиальные решения. Согласно [3], эта проблема эквивалентна задаче о стационарности функционала добавочной потенциальной энергии деформации

$$\Pi = \iiint_\tau E d\tau \tag{1.6}$$

где E — объемная плотность добавочной энергии деформации в метрике недеформированного состояния [3].

Представим добавочные перемещения и функцию p в виде суммы однородных решений

$$u = U + u^\circ + u_*, \quad v = V + v^\circ + v_*$$
$$w = W + w^\circ + w_*, \quad p = P + p^\circ + p_*$$

Для вариации функционала Π, применяя формулу Остроградского — Гаусса и учитывая, что однородные решения удовлетворяют уравнениям нейтрального равновесия [7, 1] и граничным условиям (1.4) на торцах плиты, получаем

$$\delta\Pi = \iint_o (\partial_{11}\delta u + \partial_{12}\delta v + \partial_{13}\delta w)\, do \tag{1.7}$$

Используемая в дальнейшем техника работы с вариацией $\delta\Pi$ аналогична описанной подробно в [4, 8]. Граничные значения функций $\Psi(n, s)$, $\partial_1\Psi(n, s)$, $B_m(n, s)$, $C_q(n, s)$, $C_\nu(n, s)$ на контуре Γ обозначим соответственно $\psi(s)$, $\psi_1(s)$, $b_m(s)$, $c_q(s)$, $c_\nu(s)$. Следуя [8], введем операторы K_{ij}, $S_i(\eta)$ $(i, j = 1, 2)$

$$\Delta\Psi|_{n=0} = K_{11}\psi + K_{12}\psi_1, \quad \partial_1 \Delta\Psi|_{n=0} = K_{21}\psi + K_{22}\psi_1 \tag{1.8}$$

$$\partial_1\Phi|_{n=0} = S_1(\eta)\varphi, \quad \partial_1^2\Phi|_{n=0} = S_2(\eta)\varphi \tag{1.9}$$

Предполагается, что функция $\Phi(n, s)$ удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon^2 \Delta \Phi - \eta^2 \Phi = 0 \quad (\operatorname{Re} \eta \neq 0)$$

а $\varphi(s)$ представляет собой контурное значение $\Phi(n, s)$ на Г. Звездочкой, как и в [8], помечаются операторы, сопряженные по Лагранжу (например, K_{11}^*).

Независимыми вариациями в вариационном уравнении (1.7) будем считать $\delta\psi$, $\delta\psi_1$, δb_m, δc_q, δc_ν. Выполнив в (1.7) интегрирование по ζ, исключаем с помощью (1.8) и первого соотношения (1.9) зависимые вариации. Затем, интегрируя, где требуется, по частям и привлекая сопряженные операторы, собираем коэффициенты при независимых вариациях и приравниваем их нулю. В результате приходим к однородной системе $2 + 3 \cdot \infty$ операторных уравнений для определения граничных значений функций Ψ, B_m, C_q, C_ν

$$(1.10) \quad \begin{aligned} & Q_2 + K_{12}^* (Q_6 + \partial_2 Q_3) + K_{22}^* Q_4 = 0 \\ & \partial_2 Q_1 + Q_5 + K_{11}^* (Q_6 + \partial_2 Q_3) + K_{21}^* Q_4 = 0 \\ & \partial_2 Q_{1k} + S_1^* (\sigma_k) Q_{2k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \\ & \varepsilon^2 \partial_2 Q_{1p} + \varepsilon^2 S_1^* (\alpha_p) Q_{2p} + \varepsilon^2 Q_{3p} = 0 \quad (p = 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned}$$

$$(1.11) \quad \varepsilon^8 \partial_2 Q_{1\mu} + \varepsilon^8 S_1^* (\alpha_\mu) Q_{2\mu} + \varepsilon^8 Q_{3\mu} = 0 \quad (\mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \varepsilon^2 d_1 \Delta_{11} \Psi - \varepsilon^3 I_{1m} d_2 B_m + \varepsilon^2 J_{1\varkappa} d_1 C_\varkappa \\
Q_2 &= \varepsilon^2 \Delta_{12} \Psi + \varepsilon^3 \omega I_{1m} d_1 B_m + (\varepsilon^2 J_{1\varkappa} \partial_1^2 + J_{2\varkappa}) C_\varkappa \\
Q_3 &= \varepsilon^4 d_1 \Delta_{21} \Psi - \varepsilon^5 I_{2m} d_2 B_m + \varepsilon^4 J_{3\varkappa} d_1 C_\varkappa \\
Q_4 &= \varepsilon^4 \Delta_{22} \Psi + \varepsilon^5 \omega I_{2m} d_1 B_m + \varepsilon^2 (\varepsilon^2 J_{3\varkappa} \partial_1^2 + J_{4\varkappa}) C_\varkappa \\
Q_5 &= -\partial_1 (2\beta^{-1} + \varepsilon^2 R_5 \Delta) \Psi + \varepsilon I_{3m} \partial_2 B_m - J_{5\varkappa} \partial_1 C_\varkappa \\
Q_6 &= \varepsilon^2 \partial_1 (R_6 + \varepsilon^2 R_7 \Delta) \Psi - \varepsilon^3 I_{4m} \partial_2 B_m + \varepsilon^2 J_{6\varkappa} \partial_1 C_\varkappa \\
Q_{1k} &= \varepsilon^3 \Delta_{1k} \Psi + \varepsilon^4 \omega i_{km} d_1 B_m + \varepsilon (\varepsilon^2 j_{k\varkappa} \partial_1^2 + k_{k\varkappa}) C_\varkappa \\
Q_{2k} &= \varepsilon^3 \Delta_{2k} \Psi + \varepsilon^4 i_{km} d_2 B_m - \varepsilon^3 j_{k\varkappa} d_1 C_\varkappa \\
Q_{1p} &= \varepsilon^2 \Delta_{1p} \Psi - \varepsilon^3 \omega^{-1} j_{mp} d_2 B_m + \varepsilon^2 l_{p\varkappa} d_1 C_\varkappa \\
Q_{2p} &= \varepsilon^2 \Delta_{2p} \Psi + \varepsilon^3 j_{mp} d_1 B_m + (\varepsilon^2 l_{p\varkappa} \partial_1^2 + m_{p\varkappa}) C_\varkappa \\
Q_{3p} &= -\partial_1 (\beta^{-1} J_{8p} + \varepsilon^2 J_{9p} \Delta) \Psi + \varepsilon n_{pm} \partial_2 B_m - r_{p\varkappa} \partial_1 C_\varkappa \\
\Delta_{11} &= R_0 + \varepsilon^2 R_1 \Delta, \quad \Delta_{12} = \partial_1^2 \Delta_{11} + R_2 \Delta \\
\Delta_{21} &= R_1 + \varepsilon^2 R_3 \Delta, \quad \Delta_{22} = \partial_1^2 \Delta_{21} + R_4 \Delta \\
\Delta_{1k} &= \partial_1^2 \Delta_{3k} + I_{5k} \Delta, \quad \Delta_{2k} = -d_1 \Delta_{3k}, \quad \Delta_{3k} = \omega (I_{1k} + \\
&+ \varepsilon^2 I_{2k} \Delta) \\
\Delta_{1p} &= d_1 \Delta_{3p}, \quad \Delta_{2p} = \partial_1^2 \Delta_{3p} + J_{7p} \Delta, \quad \Delta_{3p} = J_{1p} + \varepsilon^2 J_{3p} \Delta \\
d_1 &= \rho \partial_2 - \partial_1 \partial_2, \quad d_2 = \partial_1^2 - \gamma^2 \partial_2^2 - \gamma^2 \rho \partial_1 \\
R_0 &= \omega \gamma^2 \langle \zeta, \zeta \rangle, \quad R_1 = \omega \gamma \langle \zeta, A \rangle, \quad R_2 = \gamma \langle \zeta, C \rangle \\
R_3 &= \omega \langle A, A \rangle, \quad R_4 = \langle A, C \rangle, \quad R_5 = \langle 1, \gamma A' + B \rangle \\
R_6 &= \beta^{-1} \langle 1, B \rangle, \quad R_7 = \langle B, \gamma A' + B \rangle, \quad I_{1k} = \gamma \langle \zeta, F_k \rangle \\
I_{2k} &= \langle A, F_k \rangle, \quad I_{3k} = \gamma \langle 1, F_k' \rangle, \quad I_{4k} = \gamma \langle B, F_k' \rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&I_{5k} = \langle F_k, C\rangle, \quad i_{km} = \langle F_k, F_m\rangle, \quad j_{kp} = \omega\langle F_k, T_p\rangle \\
&k_{kp} = \langle F_k, N_p\rangle, \quad J_{1p} = \omega\gamma\langle \zeta, T_p\rangle, \quad J_{2p} = \gamma\langle \zeta, N_p\rangle \\
&J_{3p} = \omega\langle A, T_p\rangle, \quad J_{4p} = \langle A, N_p\rangle, \quad J_{5p} = \langle 1, \gamma T_p' - M_p\rangle \\
&J_{6p} = \langle B, \gamma T_p' - M_p\rangle, \quad J_{7p} = \langle T_p, C\rangle, \quad J_{8p} = \langle 1, M_p\rangle \\
&J_{9p} = \langle M_p, \gamma A' + B\rangle, \quad n_{pk} = \gamma\langle M_p, F_k'\rangle, \quad l_{pq} = \omega\langle T_p, T_q\rangle \\
&m_{pq} = \langle T_p, N_q\rangle, \quad r_{pq} = \langle M_p, \gamma T_q' - M_q\rangle \\
&\langle g_1, g_2\rangle \equiv \int_{-1}^{+1} g_1(\zeta) g_2(\zeta)\, d\zeta
\end{aligned}
$$

Подразумевается, что по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до ∞, причем индекс $\varkappa$ обозначает суммирование по q и ν. Например, $l_{p\varkappa}C_\varkappa \equiv l_{pq}C_q + l_{p\nu}C_\nu$. Штрих означает дифференцирование по ζ. Величины $Q_{1\mu}$, $Q_{2\mu}$, $Q_{3\mu}$ получаются соответственно из Q_{1p}, Q_{2p}, Q_{3p} заменой $p \sim \mu$. Это относится и к интегралам по ζ. Например, $J_{1\mu}$, $n_{\mu k}$ получаются из J_{1p}, n_{pk} заменой p на μ; $r_{p\nu}$ — из r_{pq} заменой q на ν; $l_{\mu\nu}$ — из l_{pq} заменой p на μ, q на ν и т. д. Явные выражения интегралов не приводим из-за громоздкости. Отметим только, что $J_{5p} = 0 = J_{5\mu}$ ($p, \mu = 1, 2, 3, \ldots$), $i_{km} = 0$ при $k \neq m$.

Система (1.10), (1.11) зависит от параметра начальной деформации γ как явно так и неявно посредством корней характеристического уравнения. При $\varepsilon \to 0$ ее можно рассматривать как систему интегродифференциальных уравнений [4]. Непосредственная проверка показывает, что при устранении начальной деформации, т. е. при $\gamma \to 1$, система (1.10) (при этом полагаем $C_\nu = 0$) переходит в соответствующую систему работы [4] для случая несжимаемого материала. Вместе с тем возникают два существенных отличия от [4]: во-первых, здесь рассматривается задача устойчивости, т. е. обобщенная задача на собственные значения для системы (1.10), (1.11) (в роли спектрального параметра выступает величина γ, подлежащая определению); во-вторых, появляется добавочный счетный набор неизвестных C_ν и, как следствие, дополнительная система уравнений (1.11) для отыскания их граничных значений. Указанные обстоятельства усложняют асимптотический анализ поведения решений системы (1.10), (1.11) при $\varepsilon \to 0$. Первое — в силу сложного характера зависимости этой системы от γ, а второе — вследствие нерегулярного поведения корней α_ν при $\gamma \to 1$.

2. Характеристическое уравнение, согласно [1], можно записать в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&\sin\alpha\delta + q(\delta)\sin\alpha(2+\delta) = 0, \quad \delta = \gamma - 1 \\
&q(\delta) = \delta(2+\delta)^{-1}(\delta^3 - 4\delta - 4)(\delta^3 + 6\delta^2 + 8\delta + 4)^{-1}
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Исследование показывает, что любой положительный корень уравнения (2.1) представим в виде

$$\alpha_\mu = \pi\mu\delta^{-1} + x_\mu \quad (\mu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.2}$$

где x_μ — решение уравнения

$$x = -\delta^{-1}\arcsin\{q\sin[2\pi\mu\delta^{-1} + (2+\delta)x]\} \tag{2.3}$$

Можно показать, что при $\delta > 0$ существует единственное вещественное решение уравнения (2.3) для любого $\mu \geqslant 1$. Функция $x_\mu(\delta)$, будучи ограниченной, имеет особенность в точке $\delta = 0$. Получить асимптотическую формулу для $x_\mu(\delta)$ при $\delta \to 0$ не удается. Тем не менее из (2.3) вытекает следующее представление:

$$x_\mu(\delta) = \frac{1}{2} a_\mu - \frac{3}{4} \delta a_\mu + \frac{1}{48} \delta^2 a_\mu (30 + a_\mu^2) + \ldots \tag{2.4}$$

$$a_\mu = \sin [2\pi\mu\delta^{-1} + (2 + \delta) x_\mu(\delta)]$$

Формула (2.4) является, очевидно, неявным асимптотическим разложением функции $x_\mu(\delta)$. Решая уравнение (2.3) численными методами, можно построить приближенно любой член в разложении (2.4). Но для целей, преследуемых в данной работе, этого недостаточно. В самом деле, при исследовании асимптотического поведения решений системы (1.10), (1.11) при $\varepsilon \to 0$ естественно, учитывая характер зависимости (1.10), (1.11) от ε, искать все неизвестные в следующем виде:

$$\begin{gathered}\Psi = \Psi_0 + \varepsilon\Psi_1 + \varepsilon^2\Psi_2 + \ldots, \quad b_m = b_{m0} + \varepsilon b_{m1} + \\ + \varepsilon^2 b_{m2} + \ldots; \\ c_q = c_{q0} + \varepsilon c_{q1} + \varepsilon^2 c_{q2} + \ldots, \quad c_\nu = c_{\nu 0} + \varepsilon c_{\nu 1} + \\ + \varepsilon^2 c_{\nu 2} + \ldots\end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\gamma = 1 + \gamma_1\varepsilon^2 + \gamma_2\varepsilon^3 + \gamma_3\varepsilon^4 + \ldots \tag{2.6}$$

Из (2.6) видно, что необходимо получить разложения по ε всех величин, зависящих от γ и, в частности, корней α_0, α_q, α_ν. Для α_0 и α_q этот вопрос тривиально решается подстановкой (2.6) в формулы возмущений [1]

$$\alpha_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}(1-\gamma^2)^{1/2}\left[1 + \frac{13}{40}(1-\gamma^2) + O((1-\gamma^2)^2)\right] \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered}\alpha_q = \alpha_{q0} + \alpha_{q1}(\gamma^2 - 1) + O((\gamma^2 - 1)^2) \\ \sin 2\alpha_{q0} = 2\alpha_{q0}, \quad \alpha_{q1} = -\alpha_{q0}(2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha_{q0})/4\end{gathered} \tag{2.8}$$

Оказывается, что для α_ν этим нельзя ограничиться. Действительно, при замене в (2.4) δ на $\gamma_1\varepsilon^2 + \gamma_2\varepsilon^3 + \ldots$ уже в первом члене разложения (2.4) будут присутствовать все неизвестные коэффициенты γ_k $(k \geqslant 1)$, что исключает возможность их последовательного определения.

Указанную трудность можно преодолеть следующим образом. Как показывает исследование, для производных $x^{\cdot}(\delta)$, $x^{\cdot\cdot}(\delta)$, $x^{\cdot\cdot\cdot}(\delta)$, вычисляемых исходя из (2.3), при $\delta \to 0$ имеют место оценки

$$x^{\cdot} = O(\delta^{-3}), \quad x^{\cdot\cdot} = O(\delta^{-7}), \quad x^{\cdot\cdot\cdot} = O(\delta^{-11}) \tag{2.9}$$

Следовательно, по формуле конечных приращений для $x(\gamma_1\varepsilon^2 + \gamma_2\varepsilon^3 + \ldots)$ справедливо представление

$$\begin{gathered}x(\gamma_1\varepsilon^2 + \gamma_2\varepsilon^3 + \ldots) = x(\delta_*) + x^{\cdot}(\delta_*)(\gamma_8\varepsilon^9 + \gamma_9\varepsilon^{10}) + \\ + {}^1/_2 x^{\cdot\cdot}(\delta_*)\gamma_8^2\varepsilon^{18} + O(\varepsilon^5), \quad \delta_* \equiv \gamma_1\varepsilon^2 + \gamma_2\varepsilon^3 + \ldots + \\ + \gamma_7\varepsilon^8\end{gathered} \tag{2.10}$$

Количество членов в (2.10) можно увеличивать, привлекая производные более высокого порядка и получая для них оценки типа (2.9). Если выразить $x^{\cdot}(\delta_*)$, $x^{\cdot\cdot}(\delta_*)$ через $x(\delta_*)$ и применить формулу (2.4) (полагая в ней

$\delta = \delta_*$), то из (2.10) найдем

(2.11) $$x_\mu(\gamma_1\varepsilon^2 + \gamma_2\varepsilon^3 + \ldots) = {}^1/_2 a_{\mu*} - {}^3/_4\gamma_1\varepsilon^2 a_{\mu*} + (\gamma_8 g_{\mu*} - {}^3/_4\gamma_2 a_{\mu*})\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4),\quad a_{\mu*} = \sin\theta_{\mu*},\ b_{\mu*} = \cos\theta_{\mu*}$$

$$\theta_{\mu*} = 2\pi\mu\delta_*^{-1} + (2+\delta_*)x_{\mu*},\quad x_{\mu*} \equiv x_\mu(\delta_*)$$

$$g_{\mu*} = \frac{2\pi\mu\varepsilon^2\gamma_1^{-2}q_* b_{\mu*}}{\delta_*\cos x_{\mu*}\delta_* + (2+\delta_*)q_* b_{\mu*}} = O(1),\quad q_* \equiv q(\delta_*)$$

По (2.2), (2.6) и (2.11) получаем:

(2.12) $$\alpha_\mu = \pi\mu\gamma_1^{-1}\varepsilon^{-2} - \pi\mu\gamma_2\gamma_1^{-2}\varepsilon^{-1} + {}^1/_2 a_{\mu*} + \pi\mu\gamma_1^{-3}(\gamma_2^2 - \gamma_1\gamma_3) + \pi\mu\gamma_1^{-4}(2\gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \gamma_2^3 - \gamma_1^2\gamma_4)\varepsilon + \ldots$$

Особенность формулы (2.12) состоит в том, что она содержит в «связанном» виде лишь семь первых коэффициентов γ_k. Если они уже известны, то, решая численно уравнение (2.3) при $\delta = \delta_*$, можно по мере определения остальных коэффициентов строить последовательно все члены разложения (2.12).

3. Перейдем теперь к асимптотическому анализу системы (1.10), (1.11) при $\varepsilon \to 0$. Будем отыскивать решение в форме (2.5), (2.6). Отметим, что в рассматриваемой задаче в отличие от [4] операторы K_{ij} зависят от ε. Учитывая (1.3) и (2.7), можно показать, что имеет место разложение

$$K_{ij} = K_{ij,0} + \varepsilon K_{ij,1} + \varepsilon^2 K_{ij,2} + \ldots$$

Асимптотические представления для $S_i(\alpha_p)$, $S_i(\alpha_\mu)$ ($i = 1, 2$) (и сопряженных с ними по Лагранжу операторов) получаются с использованием результатов работ [4, 8], а также соотношений (2.6), (2.8), (2.12). Разложения $S_i(\sigma_k)$ ($i = 1, 2$) при $\varepsilon \to 0$ не изменяются по сравнению с [4, 8], так как корни σ_k не зависят от γ.

Подставляя (2.5), (2.6) в систему (1.10), (1.11) и используя соотношения (2.7), (2.8), (2.12) и упомянутые асимптотические представления операторов, приравниваем последовательно нулю коэффициенты при $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots$. В итоге в первом приближении по ε получаются следующие соотношения (штрих здесь и далее обозначает производную по s):

(3.1) $$G_1\sum_{q=1}^{\infty}\varkappa_q c_{q0} = 0\quad (G_1 \equiv 4\rho e - 8K_{12,0}^*)$$

(3.2) $$G_2\sum_{q=1}^{\infty}\varkappa_q c_{q0} = 0\quad (G_2 \equiv 4\partial_2^2 - 8K_{11,0}^*)$$

(3.3) $$4\sigma_k b_{k0} + \sum_{q=1}^{\infty}B_{kq}c'_{q_0} = 0\quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

(3.4) $$\sum_{q=1}^{\infty}A_{pq}c_{q0} = 0\quad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

(3.5) $$8\pi\mu\gamma_1^{-3}c_{\mu 0} = 0\quad (\mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$\varkappa_q = \alpha_{q0}^{-1}\sin^2\alpha_{q0},\quad B_{kq} = 8(-1)^{k+1}\alpha_{q0}(\sigma_k - \alpha_{q0})^{-2}\cos^2\alpha_{q0},$$
$$A_{pq} = 8\alpha_{p0}^2\alpha_{q0}^2(\alpha_{p0} - \alpha_{p0})^{-3}(\cos^2\alpha_{p0} - \cos^2\alpha_{q0})\quad (p \neq q),$$
$$A_{pp} = 4\alpha_{p_0}^3\left(1 - \frac{2}{3}\cos^2\alpha_{p0}\right)$$

Здесь e — единичный оператор. Исследование системы (3.4) относительно c_{q0} показывает, что в пространстве последовательностей, ограниченных с весом q^2, она имеет только тривиальное решение $c_{q0} = 0$. При этом, очевидно, удовлетворены и уравнения (3.1), (3.2), а из (3.3) получаем $b_{k0} = 0$. Кроме того, из (3.5) следует $c_{\mu 0} = 0$.

Приравнивая нулю коэффициенты при ε^2, получаем (здесь и далее подразумевается суммирование по индексам q, m, если выражение содержит не менее двух одинаковых индексов)

(3.6) $$D_1\Psi_0|_{n=0} + G_1\varkappa_q c_{q1} = 0 \quad (D_1 \equiv {}^4/_3\,(\partial_1{}^2 + \Delta))$$

(3.7) $$D_2\Psi_0|_{n=0} + G_2\varkappa_q c_{q1} = 0 \quad (D_2 \equiv -4\gamma_1\partial_1 - {}^8/_3\partial_1\Delta + {}^4/_3\,\partial_2 d_1)$$

(3.8) $$4\sigma_k b_{k1} + 8\,(-1)^k\sigma_k{}^{-2}d_1\Psi_0|_{n=0} + B_{kq}c_{q1}' = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

(3.9) $$A_{pq}c_{q1} = 0 \quad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

(3.10) $$8\pi\mu\gamma_1{}^{-3}c_{\mu 1} = 0 \quad (\mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

Из (3.9) снова имеем $c_{q1} = 0$. При этом (3.6), (3.7) дают граничные условия для Ψ_0

(3.11) $$D_1\,\Psi_0\,|_{n=0} = 0, \quad D_2\Psi_0\,|_{n=0} = 0$$

Уравнение для Ψ_0 получается из (1.3) с использованием (2.7) и имеет такой вид:

(3.12) $$\Delta^2\Psi_0 + {}^3/_2\,\gamma_1\Delta\Psi_0 = 0$$

Можно проверить, что (3.12) совпадает с уравнением Сен-Венана классической теории устойчивости пластинок [6], основанной на гипотезах Кирхгофа, а краевые условия (3.11) выражают в порядке следования равенство нулю соответственно изгибающего момента и суммы перерезывающей силы с производной по s от крутящего момента (Ψ_0 с точностью до членов порядка ε совпадает с прогибом срединной плоскости). Видим, что классическая теория позволяет правильно определить главный член асимптотического разложения критической нагрузки для пластинки со свободным краем.

Решив задачу (3.11), (3.12) для Ψ_0, из (3.8) можно найти b_{k1}. Из (3.10) вновь вытекает $c_{\mu 1} = 0$.

В третьем приближении по ε имеем

(3.13) $$D_1\,\Psi_1\,|_{n=0} + 8\,(-1)^m\,\sigma_m{}^{-2}b_{m1}' + G_1\,\varkappa_q c_{q2} = 0$$

(3.14) $$D_2\,\Psi_1\,|_{n=0} - 4\,\gamma_2\,\partial_1\,\Psi_0\,|_{n=0} + 8\,(-1)^{m+1}\,\sigma_m{}^{-2}\,(\rho b_{m1})' + G_2\varkappa_q c_{q2} = 0$$

(3.15) $$4\sigma_k b_{k2} - 10\rho b_{k1} + 4\,(-1)^k\,\sigma_k{}^{-3}\,(2\sigma_k d_1\Psi_1 - \rho d_1\Psi_0)_{n=0} + B_{kq}c_{q2}' = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

(3.16) $$A_{pq}c_{q2} = 0 \quad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

(3.17) $$8\,\pi\mu\gamma_1{}^{-3}\,c_{\mu 2} = 0 \quad (\mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

Согласно (3.16), (3.17), снова получаем $c_{q2} = 0$, $c_{\mu 2} = 0$. При этом (3.13), (3.14) дают граничные условия для Ψ_1

$$D_1\Psi_1 |_{n=0} + 8(-1)^m \sigma_m^{-2} b_{m1}' = 0 \tag{3.18}$$
$$D_2\Psi_1 |_{n=0} - 4\gamma_2\partial_1\Psi_0 |_{n=0} + 8(-1)^{m+1} \sigma_m^{-2} (\rho b_{m1})' = 0$$

Функция Ψ_1, как следует из (1.3), удовлетворяет уравнению

$$\Delta^2\Psi_1 + {}^3/_2\, \gamma_1\Delta\Psi_1 = -{}^3/_2\, \gamma_2\Delta\Psi_0 \tag{3.19}$$

Решая полученную краевую задачу (3.18), (3.19), найдем первые поправки к классической теории: γ_2 и Ψ_1. После этого из (3.15) можно определить b_{k2}.

Не выписывая четвертого приближения, отметим, что из него в общем случае получается $c_{q3} \neq 0$, тогда как по-прежнему $c_{\mu 3} = 0$. Исследование следующих приближений показывает, что $c_{\mu 4} = c_{\mu 5} = \ldots = c_{\mu 10} = 0$, а $c_{\mu 11}$, вообще говоря, отлично от нуля. Поэтому можно утверждать, что по крайней мере 11 коэффициентов $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{11}$ не зависят от потенциальных решений, нерегулярных при $\gamma \to 1$. Значит, при игнорировании последних относительная погрешность определения критической нагрузки имеет порядок не ниже, чем ε^{11}. Можно также показать, что порядок относительной погрешности определения перемещений составляет при этом не менее чем ε^8, а добавочных напряжений — ε^5.

Таким образом, для тонких пластинок нерегулярные при $\gamma \to 1$ потенциальные решения оказывают очень слабое влияние на величину критической силы и напряженно-деформированное состояние плиты. Это можно было предвидеть из механических соображений. Действительно, указанные выше решения при γ, близких к единице, сильно осциллируют по толщине, поэтому следовало ожидать, что соответствующие им формы выпучивания окажутся несущественными в случае тонкой пластинки.

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

1) главный член асимптотики критической нагрузки при $\varepsilon \to 0$ определяется только проникающим решением;

2) первые две поправки γ_2, γ_3 к классической теории зависят помимо проникающего также от вихревого решения;

3) потенциальные решения, отвечающие регулярной части спектра, влияют лишь на третью поправку (и последующие);

4) зависимость критической силы для тонкой пластинки от потенциальных решений, нерегулярных при $\gamma \to 1$, очень слабая и проявляется начиная с одиннадцатой поправки (а возможно, и более высокой).

Отметим также, что после определения $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_7$ можно численно найти $x_{\mu *} = x_\mu (\gamma_1\varepsilon^2 + \ldots + \gamma_7\varepsilon^8)$, что позволит получать асимптотические разложения всех величин, связанных с α_μ. Поэтому предлагаемый асимптотический процесс является конструктивным. Вместе с тем в отличие от [4] трудно быть уверенным в возможности неограниченного его продолжения. Вследствие неравномерности возмущения регулярной части спектра потенциальных решений в окрестности $\gamma = 1$ не исключено, что на каком-то этапе он обрывается. Подобная ситуация встречается и в более простых задачах на собственные значения [9].

4. В случае осесимметричного выпучивания круглой плиты для коэффициентов γ_k получаются следующие выражения:

$$\gamma_1 = 2x / 3, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 2\gamma_1^2 (8x - 1) / (5y), \quad \gamma_4 = = -32 s_* x^3 / (9y)$$

$$\gamma_5 = \gamma_1^3 (5760x^3 - 10288x^2 + 7392x - 3027) / (140y^3)$$

$$s_* = 0.0762, \quad y = 4x - 3, \quad 2\sqrt{x}\, J_0 (\sqrt{x}) - J_1 (\sqrt{x}) = 0$$

Здесь J_0, J_1 — функции Бесселя первого рода. Значение s_* получено в результате решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений для c_{q3} методом урезания с удержанием 30 корней α_{q0}. Отметим, что система относительно c_{q4} решается аналитически.

Из (1.2), (2.6) вытекает следующее представление для критической силы:

$$t_* / G = 2\gamma_1 \varepsilon^2 + (2\gamma_3 - {}^1/_3\gamma_1^2)\, \varepsilon^4 + 2\gamma_4 \varepsilon^5 + (2\gamma_5 + + {}^4/_9\gamma_1^3 - {}^2/_3\gamma_1\gamma_3)\, \varepsilon^6 + \ldots \tag{4.1}$$

Первый член в (4.1) соответствует прикладной теории, основанной на гипотезах Кирхгофа [6]. Можно показать, что $2\gamma_3 - \gamma_1^2 / 3 > 0$. Поэтому видим, что классическая теория дает величину критической нагрузки с недостатком, а относительная погрешность имеет порядок ε^2.

Для первой критической силы из (4.1) получаем

$$t_{*1} / G = 6.254\varepsilon^2 + 14.871\varepsilon^4 - 3.552\varepsilon^5 + 39.273\varepsilon^6 + \ldots \tag{4.2}$$

Величина коэффициентов в (4.2) позволяет рассчитывать на то, что эта асимптотическая формула справедлива и для достаточно толстых плит, когда ε достигает значений 0.3—0.4.

Автор благодарит Л. М. Зубова за внимание к работе.

Поступила 4 II 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зубов Л. М., Рудев А. Н.* Однородные решения для предварительно напряженной упругой плиты. ПММ, 1978, т. 42, вып. 5.
2. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.
3. *Зубов Л. М.* Вариационные принципы нелинейной теории упругости. Случай наложения малой деформации на конечную. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
4. *Аксентян О. К., Ворович И. И.* Напряженное состояние плиты малой толщины. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
5. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955.
6. *Тимошенко С. П.* Устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1955.
7. *Зубов Л. М.* Выпучивание пластинок из неогуковского материала при аффинной начальной деформации. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
8. *Ворович И. И.* Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек. Материалы 1-й Всес. школы по теории и численным методам расчета оболочек и тонких пластин. Гегечкори, 1974. Изд-во Тбилисск. ун-та, 1975.
9. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., «Мир», 1972.