

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ С ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫМ ТОНКИМ УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

А. А. Евтушенко

(Львов)

Предлагается использовать интегральное преобразование Меллина для исследования напряженно-деформируемого состояния кусочно-однородной плоскости, состоящей из двух спаянных изотропных полуплоскостей, в одной из которых содержится тонкостенное упругое включение конечной длины. Как частные случаи из полученных результатов следуют решения задач о концентрации напряжений возле упругого включения в однородной плоскости [1] и математического разреза в кусочно-однородной плоскости [2]. Однако в отличие от работы [2] обосновывается выбор обхода полюса при оценке ядер полученных интегральных уравнений.

Решение плоской задачи теории упругости при отсутствии массовых сил сводится к нахождению общего решения дифференциальных уравнений [3]

$$(1) \quad \nabla^4 \varphi = 0, \quad \nabla^2 \psi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \nabla^2 \varphi$$

В полярной системе координат $r\theta$ напряжения $\{\tau_{r\theta}, \tau_{\theta\theta}, \tau_{rr}\}$ и смещения $\{u_r, u_\theta\}$ выражаются через функции φ и ψ при помощи соотношений

$$(2) \quad \sigma(r, \theta) = \tau_{r\theta} + i\tau_{\theta\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right)$$

$$\tau_{rr} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad v(r, \theta) = \frac{\partial u_r}{\partial r} + i \frac{\partial u_\theta}{\partial r} =$$

$$= \frac{1}{2\mu} \left\{ -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{i}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{i}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} + \frac{(1+\kappa)}{4} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + 2ir \frac{\partial \psi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + ir^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right] \right\}$$

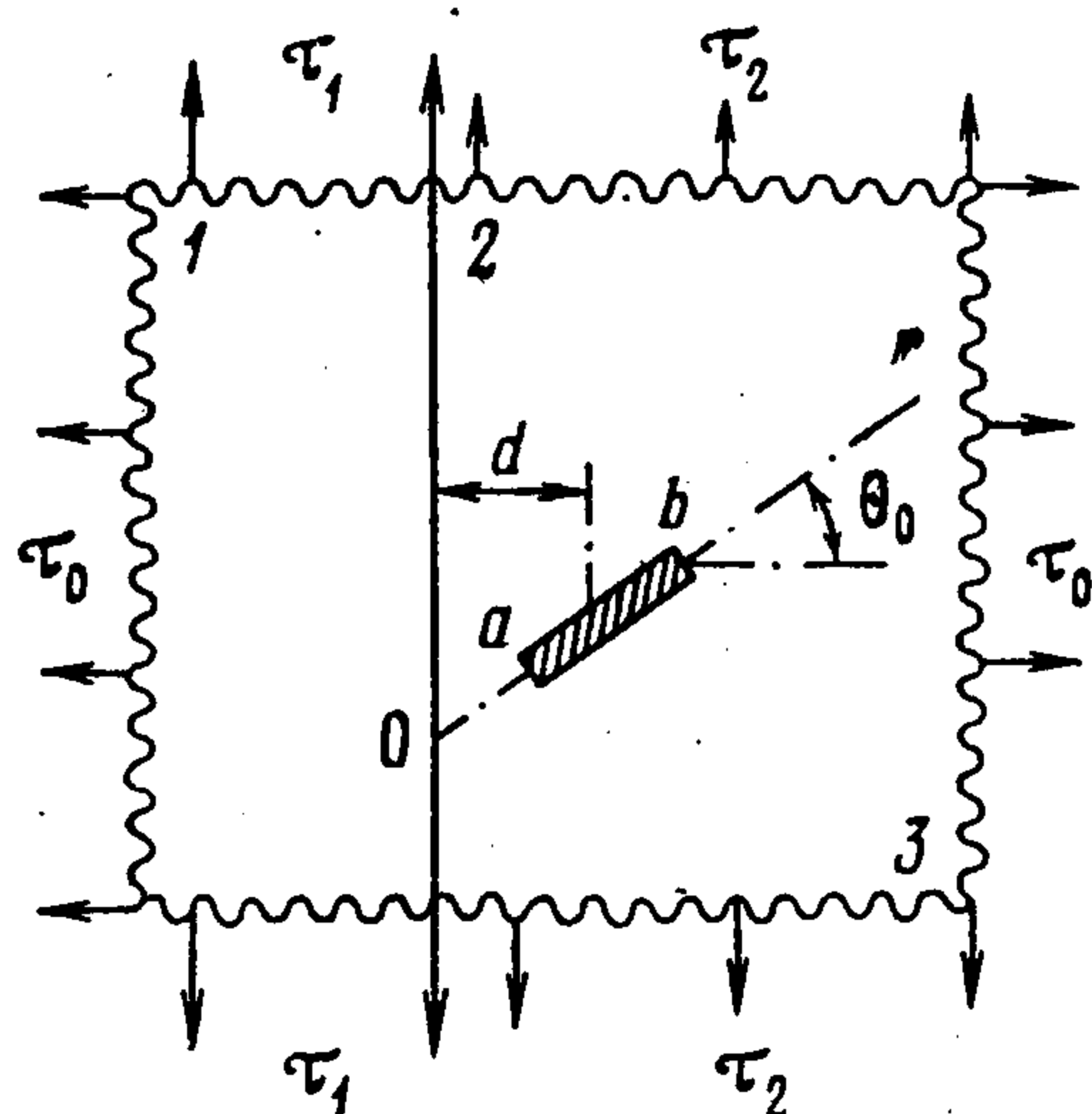
где $\kappa = 3-4\nu$ для плоской деформации, $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ для обобщенного плоского напряженного состояния $\mu = E/[2(1+\nu)]$, E , ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно.

В пределах линейной теории упругости решение задачи о влиянии тонкостенного упругого включения на напряженно-деформируемое состояние кусочно-однородной плоскости при заданной внешней нагрузке (фиг. 1) можно рассматривать как наложение решений двух задач: первой граничной задачи для составной плоскости без включения (соответствующим величинам будем приписывать верхний нулевой индекс) и

смешанной граничной задачи для кусочно-однородной плоскости с математическим разрезом вдоль отрезка $[a, b]$, совпадающего со срединной линией включения (соответствующие величины обозначаются звездочкой)

$$(3) \quad \begin{aligned} \sigma_1^*(r, \pi/2) &= \sigma_2^*(r, \pi/2), \quad v_1^*(r, \pi/2) = v_2^*(r, \pi/2) \\ \sigma_1^*(r, 3\pi/2) &= \sigma_3^*(r, -\pi/2), \quad v_1^*(r, 3\pi/2) = v_3^*(r, -\pi/2), \quad 0 < r < \infty \end{aligned}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} \sigma_p^*(r, \theta_0 \pm) &= \sigma_p(r, \theta_0 \pm) - \sigma_p^0(r, \theta_0) \\ v_p^*(r, \theta_0 \pm) &= v_p(r, \theta_0 \pm) - v_p^0(r, \theta_0), \quad a < r < b \end{aligned}$$



Фиг. 1

В соотношениях (4) знак плюс выбираем при $p = 2$, минус — при $p = 3$, а индексы 1, 2, 3 обозначают, что соответствующие величины принадлежат одному из трех клиньев, из которых состоит рассматриваемое упругое тело:

1) (μ_1, κ_1) , $1/2 \pi < \theta < 3/2 \pi$; 2) (μ_2, κ_2) , $\theta_0 < \theta < 1/2 \pi$; 3) (μ_2, κ_2) , $-1/2 \pi < \theta < \theta_0$

Предположение о малой толщине включения позволяет считать, что его наличие эквивалентно возникновению скачков напряжений и смещений на срединной линии прослойки

$$(5) \quad \begin{aligned} \sigma_2(r, \theta_0 +) - \sigma_3(r, \theta_0 -) &= \begin{cases} f_1(r) + if_2(r), & a \leq r \leq b \\ 0, & 0 < r < a, \quad b < r < \infty \end{cases} \\ v_2(r, \theta_0 +) - v_3(r, \theta_0 -) &= \begin{cases} f_3(r) + if_4(r), & a \leq r \leq b \\ 0, & 0 < r < a, \quad b < r < \infty \end{cases} \end{aligned}$$

причем

$$(6) \quad \int_a^b f_j(r) dr = C^j$$

где C^j ($j = 1, \dots, 4$) — некоторые известные действительные постоянные [1].

Трансформанту Меллина функции $f(r)$, заданной и регулярной при $0 < r < \infty$, а также ее обращение определим так [4]:

$$(7) \quad F(s) = M[f, s] = \int_0^\infty f(r) r^{s-1} dr, \quad f(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) r^{-s} ds$$

где постоянная c выбирается из условия абсолютной интегрируемости $r^{c-1}f(r)$ на $(0, \infty)$. Применяя преобразование (7) к (1), (2) в случае клина с произвольным углом θ , находим

$$(8) \quad \begin{aligned} M[r^2\sigma, s] &= 2i(s+1)[Ase^{is\theta} + B(s+1)e^{i(s+2)\theta} - \bar{B}e^{-i(s+2)\theta}] \\ M[r^2v, s] &= (s+1)[Ase^{is\theta} + B(s+1)e^{i(s+2)\theta} + \kappa\bar{B}e^{-i(s+2)\theta}] / \mu \end{aligned}$$

где A и B — комплексные функции параметра преобразования s .

Определим также

$$(9) \quad U_j(s) = M[r^2 f_j(r), s] = \int_a^b f_j(r) r^{s+1} dr$$

Подстановка выражений (8) с учетом (9) в граничные условия (3) и соотношения (5) приводит к системе шести линейных алгебраических уравнений, решение которой позволяет определить $A_p(s)$, $B_p(s)$ ($p = 1, 2, 3$) в зависимости от $U_j(s)$ ($j = 1, \dots, 4$). Подставляя найденные значения $A_p(s)$, $B_p(s)$ в (8) и применяя формулу обращения (7), из (4) получаем

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{1 + \kappa_2}{\mu_2} \sigma_2^*(r, \theta_0 +) &= \frac{1 + \kappa_2}{\mu_2} \sigma_2^\circ(r) + \lim_{\theta \rightarrow \theta_0 + 0} R_1(r, \theta) \\ (1 + \kappa_2) v_2^*(r, \theta_0 +) &= (1 + \kappa_2) v_2^\circ(r) + \lim_{\theta \rightarrow \theta_0 + 0} R_2(r, \theta) \\ a \leq r \leq b \end{aligned}$$

Здесь

$$(11) \quad \begin{aligned} R_q(r, \theta) &= \frac{1}{\pi} \int_a^b \sum_{j=1}^4 K_{qj}(r, r_0, \theta) f_j(r_0) dr_0, \quad K_{qj}(r, r_0, \theta) = \\ &= \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{H_{qj}(s, \theta)}{e^{-i\pi s} - e^{i\pi s}} \frac{r_0^{s+1}}{r^{s+2}} ds, \quad q = 1, 2; j = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\mu_2 i H_{11} &= l_1^+ + l_2^+ - d_{12}^+ - d_3 + d_4 + l_3^+ - l_4^+ - d_{57}^+ - d_{68}^+ \\ 2\mu_2 H_{12} &= -l_1^- + l_2^- - d_{12}^- - d_3 - d_4 - l_3^- - l_4^- - d_{57}^- - d_{68}^- \\ H_{13} &= l_1^- - l_2^- - l_3^- + l_4^- + d_{57}^+ + d_{68}^+ \\ -i H_{14} &= l_1^+ + l_2^+ + l_3^+ - l_4^+ + l_{57}^- - l_{68}^- \\ 4\mu_2 H_{21} &= l_1^+ + l_2^+ - d_{12}^+ - d_3 + \kappa_2 d_4 + l_3^+ + \kappa_2 l_4^+ + d_{57}^- + \\ &+ \kappa_2 d_{68}^- \\ -4\mu_2 i H_{22} &= l_1^- - l_2^- + d_{12}^- + d_3 - \kappa_2 d_4 + l_3^- - \kappa_2 l_4^- + \\ &+ d_{57}^+ - \kappa_2 d_{68}^+ \\ 2i H_{23} &= -l_1^- + l_2^- - l_3^- + \kappa_2 l_4^- - d_{57}^+ + \kappa_2 d_{68}^+ \\ 2H_{24} &= l_1^+ + l_2^+ + l_3^+ + \kappa_2 l_4^+ + d_{57}^- + \kappa_2 d_{68}^- \\ l_1^\pm &= m_1 (s + 1) (s + 1 \pm 1) e_{11} + [m_2 + m_1 (s + 1)^2] e_{12} \\ l_2^\pm &= (s + 1 \pm 1) e_{13}, \quad l_3^\pm = m_1 (s + 1) (s + 1 \pm 1) e_{21} \\ l_4^\pm &= m_1 (s + 1 \pm 1) / e_{21}, \quad d_{12}^\pm = d_1 \pm d_2, \quad d_{57}^\pm = d_5 \pm d_7 \\ d_{68} &= d_6 \pm d_8, \quad d_1 = m_1 (1 + \kappa_2) (s + 1) e_{11} \\ d_2 &= (1 + \kappa_2) e_{13}, \quad d_3 = m_1 (1 + \kappa_2) (s + 1) e_{21} \\ d_4 &= m_1 (1 + \kappa_2) / e_{21}, \quad d_5 = m_1 (s + 1)^2 e_{22}, \quad d_6 = m_1 (s + 1) e_{22} \\ d_7 &= (s + 1) e_{24}, \quad d_8 = 1 / e_{24}, \quad e_{kp}(s, \theta, \theta_0) = e_k(s, \theta) e_p(s, \theta_0) \\ &(k, p = 1, \dots, 4), \quad e_1 = e^{is\theta} \\ e_2 &= e^{i(s+2)\theta}, \quad e_3 = e^{-is(\theta+\pi)}, \quad e_4 = e^{-i(s\theta+2\theta+s\pi)} \\ m_1 &= (m - 1) / (\kappa_2 m - 1), \quad m_2 = (\kappa_1 - m\kappa_2) / (\kappa_1 + m), \\ m &= \mu_1 / \mu_2 \end{aligned}$$

[Интегралы в (11) будем вычислять путем сведения к интегрированию по действительной оси. Для этого необходимо определить постоянную c в некоторой полосе регулярности подынтегральных функций. Последние являются аналитическими функциями комплексного параметра s , за иск-

лучением точек $s_j = j$ ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), которые будут однократными полюсами. Поскольку $\tau_{ij} = o(r^{-\alpha})$, $\text{Re}(\alpha) \geq 1$ при $r \rightarrow \infty$, а вычеты подынтегральных функций в (11) имеют вид $r^{-(s_j+2)}$, постоянная c должна изменяться в пределах $-2 < c \leq -1$. Для простоты вычислений положим $c = -1$. Тогда замена $s = -1 + iy$ сводит интегрирование в (11) на действительную ось, т. е.]

$$\begin{aligned}
 K_{qj}(r, r_0, \theta) &= \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i dy}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{iy} H_{qj}(-1 + iy, \theta) \\
 (12) \quad &\frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i dy}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{iy} H_{qj}(-1 + iy, \theta) = \\
 &= \text{v. p.} \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i dy}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{iy} H_{qj}(-1 + iy, \theta) \pm \pi i a_{qj} \\
 a_{qj} &= \text{Res}_{s=-1} \left[\frac{1}{e^{-i\pi s} - e^{i\pi s}} \frac{r_0^{s+1}}{r^{s+2}} H_{qj}(s, \theta) \right] = \frac{a_{qj}'}{r}, \quad q=1, 2 \\
 &j=1, \dots, 4 \\
 a_{11}' &= \frac{i}{2\mu_2} \Delta_1, \quad a_{12}' = -\frac{1}{2\mu_2} \Delta_1, \quad a_{13}' = \Delta_2, \quad a_{34}' = i\Delta_2 \\
 a_{21}' &= \frac{1}{4\mu_2} \Delta_3, \quad a_{22}' = \frac{i}{4\mu_2} \Delta_3, \quad a_{23}' = -\frac{i}{2} \Delta_1, \quad a_{24}' = \frac{1}{2} \Delta_1 \\
 \Delta_1 &= m_2 + m_1 \kappa_2 - 1 + \kappa_2, \quad \Delta_2 = m_2 - m_1 - 2, \quad \Delta_3 = m_2 - \\
 &- m_1 \kappa_2^2 + 2\kappa_2
 \end{aligned}$$

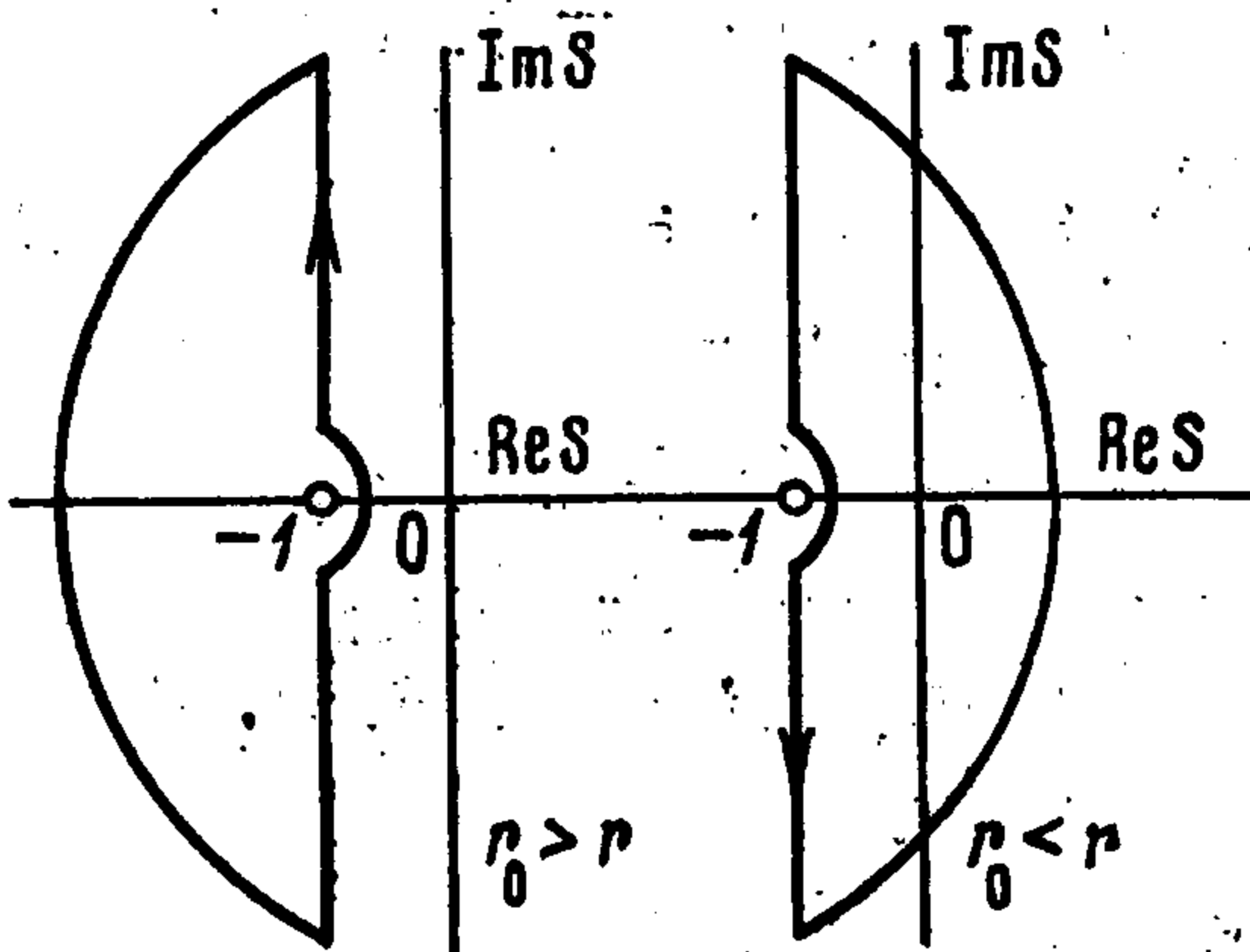
Знак плюс или минус в формуле (12) выбираем в зависимости от направления обхода полюса $s = -1$, которое определим из следующих рассуждений. Потребуем, чтобы решение поставленной статической задачи было предельным случаем соответствующей динамической задачи с теми же граничными условиями (3), (4), когда спектральный параметр или инерционные члены, которые обозначим ε^2 , стремятся к нулю ($\varepsilon \rightarrow 0$). При $\varepsilon \neq 0$ знаменатель подынтегрального выражения в (11) примет вид

$$\exp[-i\pi \sqrt{s^2 - \varepsilon^2}] - \exp[i\pi \sqrt{s^2 - \varepsilon^2}]$$

и его нулями будут $s_{je} = \pm \sqrt{s_j^2 + \varepsilon^2}$. Отсюда следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ полюс s_{je} смещается в точку $s = -1$ справа. Для сохранения непрерывности решения необходимо, чтобы контур интегрирования не находился на пути передвижения этого полюса (фиг. 2). При этом для $r_0 > r$ в (12) должен быть знак плюс, а при $r_0 < r$ надо взять минус.

Поскольку

$$\frac{1}{r \ln(r_0/r)} = \frac{1}{r_0 - r} \left[1 + o\left(\frac{r_0}{r} - 1\right) \right]$$



Фиг. 2

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon y} (\cos \rho y + i \sin \rho y) dy = \pi \delta(\rho) + \frac{i}{\rho}$$

$$\left(\rho = \ln \frac{r_0}{r}, \quad \varepsilon = \theta - \theta_0 \right)$$

где $\delta(\rho)$ — дельта-функция, из (10), (12) находим выражения характеристик напряженно-деформируемого состояния составной плоскости на нижней кромке включения в форме

$$(13) \quad \begin{aligned} \tau_{r\theta}(r, \theta_0 +) &= \tau_{r\theta}^{\circ}(r) - l_1^+ G_1(r) + \frac{1}{2} f_1(r) + m_{12}^- t_2(r) - \\ &- l_1^+ t t_3(r) + l_1^+ Q_1(r) \\ \tau_{\theta\theta}(r, \theta_0 +) &= \tau_{\theta\theta}^{\circ}(r) + l_1^+ G_2(r) + \frac{1}{2} f_2(r) - m_{12}^- t_1(r) - \\ &- l_1^+ t t_4(r) + l_1^+ Q_2(r) \\ \frac{\partial u_r}{\partial r}(r, \theta_0 +) &= \frac{\partial u_r^{\circ}}{\partial r}(r) + \frac{G_3(r)}{1 + \kappa_2} + \frac{1}{2} f_3(r) + \\ &+ l_2^+ t t_1(r) - m_{21}^- t_4(r) + \frac{Q_3(r)}{1 + \kappa_2} \\ \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r}(r, \theta_0 +) &= \frac{\partial u_{\theta}^{\circ}}{\partial r}(r) + \frac{G_4(r)}{1 + \kappa_2} + \frac{1}{2} f_4(r) + \\ &+ l_2^+ t t_2(r) + m_{21}^- t_3(r) + \frac{Q_4(r)}{1 + \kappa_2} \\ G_1(r) &= \frac{1}{2\pi r} (a_{12}' C^2 - a_{13}' C^3), \quad G_2(r) = \frac{1}{2\pi r} (a_{11}' C^1 + a_{14}' C^4) \\ G_3(r) &= \frac{1}{\pi r} (a_{21}' C^1 + a_{24}' C^4), \quad G_4(r) = \frac{1}{\pi r} (a_{22}' C^2 - a_{23}' C^3) \\ Q_i(r) &= \frac{1}{\pi} \int_a^b \sum_{j=1}^4 k_{ij}(r, r_0) f_j(r_0) dr_0, \quad t_i(r) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{f_i(r_0)}{r_0 - r} dr_0 \end{aligned}$$

где $k_{ij}(r, r_0)$ ($i, j = 1, \dots, 4$) — регулярные фредгольмовские ядра. Обозначения остальных величин здесь и в дальнейшем, если особо не оговорено, принимаются, как и в работе [1].

Подстановка выражений (13) в условия взаимодействия тонкостенного упругого включения с окружающей средой [1] приводит к системе сингулярных интегральных уравнений первого рода

$$(14) \quad \begin{aligned} t_1(r) + \lambda_{11} t_4(r) - \lambda_1 I_1^{\circ}(r) + \lambda_{12} Q_2(r) + \lambda_{13} Q_3(r) &= F_1(r) \\ t_3(r) + \lambda_{21} t_2(r) - \lambda_2 I_3^{\circ}(r) - \lambda_{22} Q_1(r) + \lambda_{23} Q_4(r) &= F_2(r) \\ t_4(r) + \lambda_{31} t_1(r) + \lambda_3 I_1^{\circ}(r) + \lambda_4 I_4^{\circ}(r) - Q_2(r) &= F_3(r) \end{aligned}$$

$$I_j^{\circ}(r) = \int_a^r f_j(r_0) dr_0, \quad j = 1, \dots, 4, \quad f_3(r) = -k_2 f_2(r), \quad a \leq r \leq b$$

Здесь

$$\Lambda_1 F_1(r) = k_0 N_a \frac{\partial u_r^{\circ}}{\partial r} - k_1 \tau_{\theta\theta}^{\circ}(r) - k_1 l_1^+ G_2(r) - \frac{G_3(r)}{1 + \kappa_2}$$

$$\Lambda_2 F_2(r) = \mu_0 \left[\frac{\tau_{r\theta}^{\circ}}{\mu_0} - \frac{\partial u_{\theta}^{\circ}}{\partial r} + \frac{c_a}{2h} - \frac{l_1^+}{\mu_0} G_1(r) - \frac{G_4(r)}{1 + \kappa_2} \right]$$

$$l_1^+ F_3(r) = \tau_{\theta\theta}^{\circ} + \frac{d_a}{2hk_0} - \frac{k_1}{k_0} N_a + l_1^+ G_2(r)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{12} &= k_1 l_1^+ / \Lambda_1, & \lambda_{13} &= 1 / [(1 + \kappa_2) \Lambda_1] \\ \lambda_{22} &= l_1^+ / \Lambda_2, & \lambda_{23} &= \mu_0 / [(1 + \kappa_2) \Lambda_2] \end{aligned}$$

Нормальные напряжения N_a и смещения верхних точек торца $s = a$ относительно нижних c_a, d_a вычисляются по некоторым приближенным формулам работы [1].

В случае абсолютно жесткого включения ($E_0 = \infty$) из системы (14) следует, что $f_3(r) = f_4(r) = 0$, и получаем систему

$$(15) \quad \begin{aligned} t_1(r) - \frac{2\mu_2}{\kappa_2} \frac{1}{\pi} \int_a^b \sum_{j=1}^2 k_{3j}(r, r_0) f_j(r_0) dr_0 &= - \frac{2\mu_2(1 + \kappa_2)}{\kappa_2} \frac{\partial u_r^o(r)}{\partial r} \\ t_2(r) - \frac{2\mu_2}{\kappa_2} \frac{1}{\pi} \int_a^b \sum_{j=1}^2 k_{4j}(r, r_0) f_j(r_0) dr_0 &= \\ &= - \frac{2\mu_2(1 + \kappa_2)}{\kappa_2} \frac{\partial u_\theta^o(r)}{\partial r}, \quad a \leq r \leq b \end{aligned}$$

для определения скачков напряжений.

Когда же $E_0 = 0$, то из (14) получаем $f_1(r) = f_2(r) = 0$ и систему уравнений, описывающую упругое равновесие двух сцепленных полуплоскостей из различных материалов с математическим разрезом в окрестности линии спая

$$(16) \quad \begin{aligned} t_3(r) + \frac{1}{\pi} \int_a^b \sum_{j=3}^4 k_{1j}(r, r_0) f_j(r_0) dr_0 &= l_1^+ \tau_{r\theta}^o(r) \\ t_4(r) + \frac{1}{\pi} \int_a^b \sum_{j=3}^4 k_{2j}(r, r_0) f_j(r_0) dr_0 &= l_1^+ \tau_{\theta\theta}^o(r), \quad a \leq r \leq b \end{aligned}$$

Поскольку индекс системы сингулярных интегральных уравнений (14) $k = 1$, решение ее должно содержать четыре произвольные действительные постоянные, определяемые из дополнительных условий (6).

Решение системы интегральных уравнений (14) с сингулярными ядрами типа Коши ищем в виде

$$f_j(r) = g_j(r) [(b - r)(r - a)]^{-1/2}, \quad a \leq r \leq b, \quad j = \overline{1, \dots, 4}$$

где неизвестные функции $g_j(r)$ ограничены в замкнутом интервале $[a, b]$. С помощью метода ортогональных полиномов [5] из (14) получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения значений $g_j(r)$ в определенных узловых точках, являющихся корнями полиномов Чебышева первого рода.

Нормальная и касательная составляющие коэффициента интенсивности напряжений определяются формулой

$$\begin{aligned} k_2(a) + ik_1(a) &= \lim_{r \rightarrow a-0} \sqrt{2(r-a)} [\tau_{2r\theta}(r, \theta_0) + i\tau_{2\theta\theta}(r, \theta_0)] = \\ &= \lim_{r \rightarrow a-0} \frac{2\mu_2}{(1 + \kappa_2)} \sqrt{2(r-a)} [f_1(r) + if_2(r)] \end{aligned}$$

Подробно исследован один случай упругого равновесия соединения алюминий — эпоксид ($E_1 / E_2 = 22.2$), содержащего тонкостенное упругое включение произвольной относительной жесткости E_0 / E_2 при действии однородного поля напряжений $\tau_{1r\theta}(r, 0) = \tau_{2r\theta}(r, 0) = 0$, $\tau_{1\theta\theta}(r, 0) = \tau_1$, $\tau_{2\theta\theta}(r, 0) = \tau_2$ на бесконечности. Включение толщины $2h$ локализовано на отрезке ($\theta = \theta_0$, $a \leq r \leq b$). Расстояние центра включения от линии сцепления материалов полуплоскостей d и длину включения $2a_0$ определим как

$$d = \frac{(a+b)}{2} \cos \theta_0, \quad 2a_0 = b - a$$

Изучалось влияние относительной жесткости включения при различных значениях угла θ_0 ориентации включения на величину коэффициентов интенсивности напряжений

$$k_p'(a) = k_p(a) / (\tau_2 \sqrt{a_0}), \quad p = 1, 2$$

где $\tau_2 \sqrt{a_0}$ — коэффициент интенсивности напряжений в случае бесконечной плоскости с трещиной длины $2a_0$.

При вычислениях полагали: $d = 2a_0$, $a_0/h = 10$, $\nu_0 = \nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.35$. Результаты, полученные в случае плоской деформации, приведены на фиг. 3. Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям относительной жесткости включения $E_0 / E_2 = 0.01; 10; 100$. Отметим, что значения, полученные при $E_0 / E_2 = 0.01$, отличаются от соответствующих результатов для трещины [2] не более чем на 3—4%.

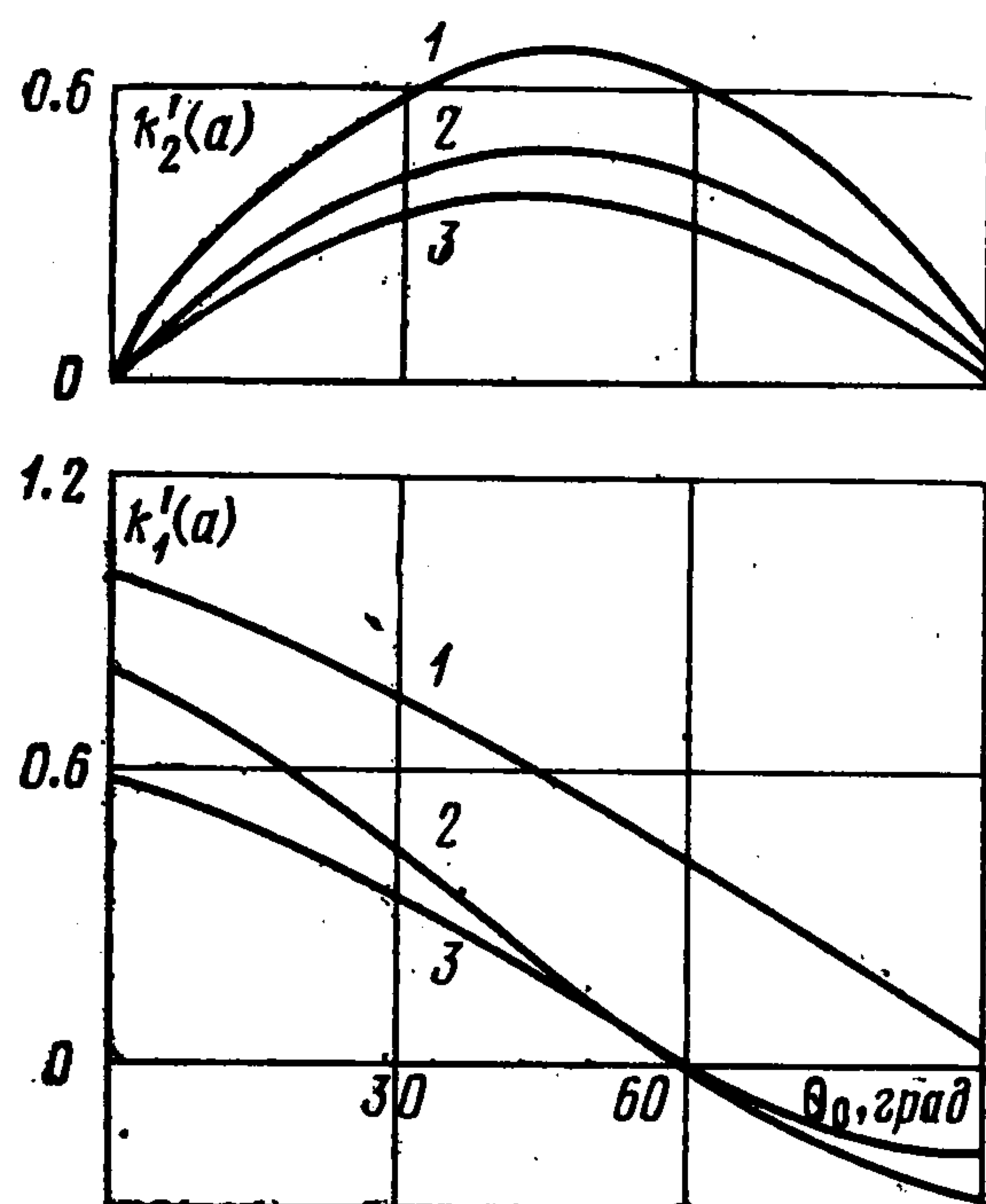
Основная вычислительная работа состояла в нахождении ядер $k_{ij}(r, r_0)$, которые являются полубесконечными интегралами параметра интегрирования y . Для повышения точности вычислений был использован следующий прием. Промежуток интегрирования от 0 до ∞ точкой y_0 делили на две части. На интервале от 0 до y_0 функции $k_{ij}(r, r_0)$ вычисляли при помощи квадратурных формул метода Филона [6], а на оставшейся части от y_0 до ∞ — заменой подынтегральных выражений их асимптотическими разложениями при $y \rightarrow \infty$, ядра $k_{ij}(r, r_0)$ найдены в замкнутом виде. Численный анализ показал, что вклад этих последних слагаемых в $k_{ij}(r, r_0)$ будет заметным для включений, близких ($d \leq 2$) к линии спая биматериалов, и пренебрежение ими приводит к неточным результатам даже при больших (порядка 200—400) значениях y_0 .

Автор благодарит Д. В. Грилицкого, под руководством которого выполнена работа.

Поступила 4 V 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Грилицкий Д. В., Сулим Г. Т. Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями. ПММ, 1975, т. 38, вып. 3.
2. Erdogan F., Aksogan O. Bonded half planes containing an arbitrarily oriented crack. Internat. J. Solids and Structures, 1974, vol. 10, No. 6, p. 569—585.
3. Coker E. G., Filon L. N. A treatise on photo-elasticity. 2d ed., Cambridge Univ. Press, 1957, 720p.
4. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1967.
5. Erdogan F., Gupta G. D. On the numerical solution of singular integral equations. Quart. Appl. Math., 1972, vol. 29, No. 4, p. 525—534.
6. Chase Stephen M., Fosdick Lloyd D. An algorithm for Filon quadrature. Commun ACM, 1969, vol. 12, No. 8, p. 453—457.



Фиг. 3