Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 5, 1980

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ НЕСЖИМАЕМЫХ СРЕД

М. И. Лазарев

(Москва)

Исследуется предельное поведение решений основных задач теории упругости при коэффициенте Пуассона $\sigma \to 1/2$. Доказывается, что предел решений основных задач является решением соответствующих интегральных уравнений Фредгольма, полученных из исходных переходом к интегральным операторам при $\sigma = 1/2$.

1. Пусть $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор смещений упругого тела D, заполняющего часть пространства $R^3 \ni \mathbf{x}$ и ограниченного замкнутой поверхностью Ляпунова S. Вектор $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ удовлетворяет в D уравнению Ламе

$$L_\sigma \mathbf{u} \equiv \Delta \mathbf{u} + (1 - 2\sigma)^{-1} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

Для простоты будем считать, что поверхность S связна. Будут рассмотрены следующие четыре основные задачи:

Задача $1^\pm$. $L_\sigma \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in D^\pm; \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S$.

Задача $2^\pm$. $L_\sigma \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in D^\pm; \quad T_{n\sigma}\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S$.

Здесь D^+, D^- — соответственно ограниченная и неограниченная части R^3, имеющие границей S; $T_{n\sigma}\mathbf{u}$ — вектор с компонентами

$$(T_{n\sigma}\mathbf{u})_i = \frac{E}{2(1+\sigma)} \sum_{k=1}^{3} \left[\frac{\sigma}{1-2\sigma} \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right] n_k$$

E — модуль упругости, n_k — направляющие косинусы внешней к S нормали $\mathbf{n}$.

Пусть L_0 — оператор, действующий на пару функций $\mathbf{u}$, p по правилу

$$L_0(\mathbf{u}; p) = \{\eta \Delta \mathbf{u} - \operatorname{grad} p; \ \operatorname{div} \mathbf{u}\}$$

Задача $1_0^\pm$. $L_0(\mathbf{u}; p) = 0, \quad \mathbf{x} \in D^\pm; \quad \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{x} \in S$.

Задача $2_0^\pm$. $L_0(\mathbf{u}; p) = 0, \quad \mathbf{x} \in D^\pm; \quad T_{n0}(\mathbf{u}; p) = \mathbf{g}, \ \mathbf{x} \in S$.

Задачи $1_0^\pm$, $2_0^\pm$ описывают стационарное стоксово течение вязкой несжимаемой жидкости, при этом вектор $\mathbf{u}$ имеет смысл скорости, p — давление, η — коэффициент динамической вязкости.

Предполагаем, что f, g дважды непрерывно дифференцируемы на S.

Задача 1^+ всегда разрешима и имеет единственное решение, задачи 1^-, 1_0^-, 2^-, 2_0^- имеют единственное решение в классе функций, имеющих асимптотику на бесконечности $1/|x|$. Задача 1_0^+ имеет не более одного решения, и это решение существует только при условии $(\mathbf{f}, \mathbf{n}) = 0$. Здесь $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(S)$. Задачи 2^+, $2_0{}^+$ разрешимы тогда и только тогда, когда $(\mathbf{g}, \boldsymbol{\psi}_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$; решения определены с точностью до линейной комбинации векторов $\boldsymbol{\psi}_i$ (здесь $\boldsymbol{\psi}_i$ — линейно-независимые векторы жесткого смещения). При этом решения задач $1^\pm$, $2^\pm$, $1_0{}^\pm$, $2_0{}^\pm$ дважды непрерывно дифференцируемы в $D^\pm$ (см. [1,2]).

2. Пусть

$$\mathbf{V} = \{V_{ik}\}_{i,k=1}^3 = \frac{3}{8\pi E(1-\sigma)}\left\{\frac{3-4\sigma}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\delta_{ik} + \frac{(y_i - x_i)(y_k - x_k)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3}\right\}$$

— фундаментальное решение оператора $L_\sigma : L_{\sigma x}\mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -2\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) I$ (I — единичная матрица), а пара

$$\mathbf{V}_0 = \{V_{0ik}\} = \frac{3}{4\pi E}\left\{\frac{\delta_{ik}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} + \frac{(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3}\right\}$$

$$\{P^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}_{k=1}^3 = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{x_k - y_k}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3}\right\}_{k=1}^3$$

— фундаментальное решение оператора $L_0 : L_0(\mathbf{V}_0; P) = \{-2\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}); 0\}$ при $\eta = E/3$.

Далее, положив $\sigma = 1/2 - \varepsilon$, будем отмечать символы, относящиеся к задачам $1^\pm$, $2^\pm$ при этом значении σ, индексом ε.

Будут использованы еще обозначения для потенциалов с плотностью $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$ (штрих означает транспонирование)

$$\Pi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}) = \int_S \sum_{k=1}^3 P^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\varphi^k(\mathbf{y})\, d_yS$$

$$\Pi_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}) = \frac{E}{6\pi}\frac{\partial}{\partial x_j}\int_S \frac{x_k - y_k}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3}\varphi_k(\mathbf{y}) n_j(\mathbf{y})\, d_yS$$

$$\mathbf{W}_\varepsilon(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}) = \int_S [T_{n\varepsilon y}V_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y})]'\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})\, d_yS$$

$$\mathbf{W}_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}) = \int_S [T_{n0y}(\mathbf{V}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}); P^k(\mathbf{x}, y))]'\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})\, d_yS$$

Определим операторы, действующие в $L_2(S)$, равенствами

$$T_\varepsilon\boldsymbol{\varphi} = \int_S T_{n\varepsilon x}\mathbf{V}_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y})\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})\, d_yS$$

$$T_\varepsilon{}^*\boldsymbol{\varphi} = \int_S [T_{n\varepsilon y}\mathbf{V}_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y})]'\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})\, d_yS$$

$$T_0\boldsymbol{\varphi} = \int_S T_{n0x}(\mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y}); P^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}))\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})\, d_yS$$

$$T_0{}^*\boldsymbol{\varphi} = \int_S [T_{n0y}(\mathbf{V}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}); P^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}))]'\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})\, d_yS, \quad \mathbf{x} \in S$$

Свойства операторов T_ε и $T_\varepsilon{}^*$ изучены в [2], а операторов T_0, $T_0{}^*$ — в [3]. Операторы T_ε и $T_\varepsilon{}^*$ сопряжены в $L_2(S)$ и непрерывны, операторы T_0 и $T_0{}^*$ сопряжены в $L_2(S)$ и вполне непрерывны, $\Sigma(T_\varepsilon) \ni -1$, $\Sigma(T_0) \ni 1, -1$ и существуют $\delta > 0$ и $\delta_1 > 0$, такие, что

$$\Sigma(T_\varepsilon) \setminus \{-1\} \subset [-1 + \delta, 1 - \delta], \quad \Sigma(T_0) \setminus \{-1, 1\} \subset [-1 + \delta_1, 1 - \delta_1]$$

$$N(I + T_0{}^*) = N(I + T_\varepsilon{}^*) = \{\boldsymbol{\psi}_i\}_{i=1}^6, \quad \forall\varepsilon > 0$$

Здесь $\Sigma(\cdot)$, $N(\cdot)$ — соответственно спектральное множество и ядро оператора, записанного в скобках. Как можно проверить непосредственно, $T_\varepsilon = T_0 + 2\varepsilon(1 + 2\varepsilon)^{-1}T_1$, где T_1 не зависит от ε.

3. Естественно требовать, чтобы напряженное состояние несжимаемого тела а) мало менялось при малом отклонении σ от 1/2, б) непрерывно зависело от краевых условий.

Ясно, что не может быть более одного решения, удовлетворяющего условию а) (в случае задачи 2^+ имеется в виду решение с точностью до жесткого смещения). Это следует из единственности решения соответствующей краевой задачи при $\varepsilon > 0$. Под решением краевой задачи теории упругости для несжимаемого тела будем понимать предел решения соответствующей краевой задачи при $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon > 0)$.

Очевидно, что так определенное решение удовлетворяет условию а). Далее будет показано, что для задач $1\pm$, $2\pm$ этот предел существует. Покажем сейчас, что отсюда следует выполнение условия б).

Запишем краевую задачу в следующем виде:

$$A_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{F};\quad A_\varepsilon \equiv \{L_\sigma;\ \gamma\},\quad \mathbf{F} \equiv \{0,\ \mathbf{f}\}$$

Здесь γ — соответствующий граничный оператор краевой задачи. Для основных задач $1\pm$, $2\pm$ оператор A_ε^{-1} определен на $R(A_\varepsilon)$ и непрерывен ($R(\cdot)$ — область значений оператора, заключенного в скобках). Если для каждого $\mathbf{F} \in R(A_\varepsilon)$ существует предел

$$\mathbf{u}_0 = \lim \mathbf{u}_\varepsilon = \lim A_\varepsilon^{-1}\mathbf{F}\ (\varepsilon \to 0) \tag{3.1}$$

то, как следует из принципа равномерной ограниченности Банаха — Штейнгауза, последовательность A_ε^{-1} ограничена равномерно по ε и оператор A_0^{-1}, естественным образом определенный посредством (3.1), ограничен. Следовательно, $\mathbf{u}_0$ непрерывно зависит от $\mathbf{F}$.

4. Перейдем к нахождению пределов решений основных задач при $\sigma \to {}^1/_2$.

Задача 2^+. Решение ищется в виде потенциала простого слоя, т. е. производится замена

$$\mathbf{u}_\varepsilon = \int\limits_S \mathbf{V}_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,\varphi_\varepsilon(\mathbf{y})\,d_yS \tag{4.1}$$

Эта замена является эквивалентной и сводит задачу к уравнению на границе S относительно φ_ε, которое в операторном виде запишется следующим образом:

$$\varphi_\varepsilon + T_\varepsilon\varphi_\varepsilon = g \tag{4.2}$$

Решение (4.2) существует в том и только в том случае, когда $g \in R(I + T_\varepsilon) = {}^\perp N(I + T_\varepsilon^*)$. Оператор $(I + T_\varepsilon)^{-1}$, рассматриваемый как значение резольвенты сужения оператора T_ε на $R(I + T_\varepsilon)$ в точке -1, определен и непрерывен в $R(I + T_\varepsilon)$. Кроме того, как следует из свойств

$\Sigma(T_\varepsilon)$

$$(I+T_\varepsilon)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-T_\varepsilon)^k$$

и, таким образом, любое решение (4.2) может быть записано в виде

$$\varphi_\varepsilon=\sum_{k=0}^{\infty}(-T_\varepsilon)^k g+\Phi \tag{4.3}$$

При этом $\Phi\in N(I+T_\varepsilon)$ и потенциал простого слоя с плотностью Φ является вектором жесткого смещения D^+. Подставим (4.3) в (4.1) и устремим ε к нулю ($\sigma\to 1/2$). В силу непрерывности T_ε как операторно-значной функции ε в нуле, непрерывности $\mathbf{V}_\varepsilon(\mathbf{x},\mathbf{y})$ как функции ε в нуле, имеем

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{u}_0\|_{L_2}\to 0\quad(\varepsilon\to 0)$$

Здесь $\mathbf{u}_0$ — потенциал простого слоя с плотностью

$$\mathbf{u}_0=\int_S \mathbf{V}_0(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\varphi_0(\mathbf{y})\,d_yS$$

Пара ($\mathbf{u}_0$; p), где $p=\Pi(\mathbf{x},\varphi)$, удовлетворяет краевой задаче 2_0^+.

Задача 1^-. Ищем решение в виде

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x})=\mathbf{W}_\varepsilon(\mathbf{x},\varphi)+\sum_{i=1}^{6}c_i\int_S \mathbf{V}_\varepsilon(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\psi_i(\mathbf{y})\,d_yS \tag{4.4}$$

Функция (4.4) удовлетворяет в D^- условию $L\mathbf{u}=0$, а условие на S приводит к уравнению

$$\varphi+T_\varepsilon{}^*\varphi=\mathbf{F}\equiv\mathbf{f}(\mathbf{x})-\sum_{i=1}^{6}c_i\int_S \mathbf{V}_\varepsilon(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\psi_i(\mathbf{y})\,d_yS \tag{4.5}$$

Пусть $\varphi_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,6)$ — собственные функции, соответствующие значению -1 оператора T_ε. Если c_i можно выбрать так, что выполняются условия разрешимости (4.5) $(\mathbf{F},\varphi_i)=0$ $(i=1,2,\ldots,6)$, то решение исходной задачи определяется однозначно, поскольку потенциал двойного слоя с плотностью ψ_i равен нулю при $\mathbf{x}\in D^-$.

Рассмотрим вместо (4.5) уравнение

$$\varphi_\varepsilon+Q_\varepsilon\varphi_\varepsilon=\mathbf{F},\quad Q_\varepsilon=T_\varepsilon{}^*-\sum_{i=1}^{6}\psi_i(\cdot,\psi_i) \tag{4.6}$$

Было показано [4], что при условиях, которым удовлетворяет оператор T_ε

а) $\Sigma(Q_\varepsilon)\subset\Sigma(T_\varepsilon)\setminus\{-1\}$, и потому уравнение (4.6) разрешимо при любом $\mathbf{F}$;

б) если φ — решение уравнения (4.6), то условия $(\varphi,\psi_i)=0$ и $(\mathbf{F},\varphi_i)=0$ $(i=1,2,\ldots,6)$ следуют одно из другого, а потому при выполнении любого из них решение φ является и решением уравнения (4.5).

Пусть R_ε — значение резольвенты Q_ε в точке -1. В силу свойств оператора T_ε^* имеем

$$R_\varepsilon=\sum_{k=0}^{\infty}(-Q_\varepsilon)^k$$

Требование $(\varphi, \psi_i)=0$ $(i=1, 2, \ldots, 6)$ дает систему линейных алгебраических уравнений, из решения которой определятся c_i. Остается показать, что определитель матрицы коэффициентов при c_i не равен нулю.

Имеем равенства

$$(\mathbf{F}, \varphi_i)=(\mathbf{f}, \varphi_i)-\sum_{j=1}^{6}c_j(\psi_j, \psi_i)$$

которые следуют из симметричности $\mathbf{V}_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и известных равенств

$$\int_S \mathbf{V}_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,\varphi_i(\mathbf{y})\,d_yS=\psi_i(\mathbf{x})\qquad(i=1, 2, \ldots, 6)$$

Следовательно, c_i определяются однозначно из условий $(\mathbf{F}, \varphi_i)=0$ и, значит, из условий $(\varphi, \psi_i)=0$.

Итак, уравнению (4.5) удовлетворяет функция

$$\varphi_\varepsilon=R_\varepsilon\mathbf{f}-\sum_{i=1}^{6}c_iR_\varepsilon\int_S \mathbf{V}_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,\psi_i(\mathbf{y})\,d_yS$$

Коэффициенты c_i — решение системы $(\varphi, \psi_i)=0$ $(i=1, 2, \ldots, 6)$. Повторяя все выкладки при $\varepsilon=0$, получим компоненту решения задачи 1_0^- $\mathbf{u}_0$ в виде (4.5). В силу непрерывности по ε в нуле и непрерывности $\mathbf{V}_\varepsilon$ по ε из изложенного заключаем, что $\|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{u}_0\|_{L_2(D^-)}\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. При этом пара $(\mathbf{u}_0; p)$, где $p=\Pi_1(x, \varphi)$ удовлетворяет краевой задаче 1_0^-.

Задача 1^+. В работе [5] доказано следующее утверждение: решение задачи

$$L_\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon=\frac{3-\varepsilon}{E}\mathbf{F},\quad \mathbf{x}\in D^+,\quad \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x})=0,\quad \mathbf{x}\in S\quad(\mathbf{F}\in L_2(D^+))$$

представимо в виде сходящегося по норме $W_2^1(D^+)$ ряда

$$\mathbf{u}_\varepsilon=\sum_{k=0}^{\infty}(2\varepsilon)^k\mathbf{u}_k$$

где $\mathbf{u}_0$ — решение задачи

$$L_0(\mathbf{u}_0; p)=\frac{3}{E}\mathbf{F},\quad \mathbf{x}\in D^+;\quad \mathbf{u}_0(\mathbf{x})=0,\quad \mathbf{x}\in S$$

Отсюда следует, в частности, нужное для последующего соотношение

$$(4.7)\qquad \|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{u}_0\|_{L_2(S)}\leqslant c\,\|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{u}_0\|_{W_2^1(D^+)}=O(\varepsilon)$$

Можно показать, что соотношение (4.7) справедливо и для решений рассматриваемых задач 1^+, 1_0^+.

Для этого заметим предварительно, что ограниченность энергии деформации несжимаемого тела требует выполнения условия $\operatorname{div}\mathbf{u}=0$ и, следовательно, $(\mathbf{u}|_S, n)=0$. Будем поэтому предполагать, что это условие в задаче о напряженном состоянии несжимаемого тела выполнено.

Рассмотрим задачи

$$(4.8)\qquad L_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon = 0,\ \mathbf{x} \in D^+;\ \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{f},\ \mathbf{x} \in S$$

$$(4.9)\qquad L_0(\mathbf{u}_0;\ p) = 0,\ \mathbf{x} \in D^+;\ \mathbf{u}_0 = \mathbf{f},\ \mathbf{x} \in S$$

Продолжим $\mathbf{f} \in C^2(S)$ до $\Phi \in W_2^2(D^+)$ и такого, что $\operatorname{div}\Phi = 0$. Произведя замены $\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{u}_{1\varepsilon} + \Phi$, $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_{10} + \Phi$, перейдем к задачам

$$L_\varepsilon \mathbf{u}_{1\varepsilon} = -\Delta\Phi,\ \mathbf{x} \in D^+;\ \mathbf{u}_\varepsilon = 0,\ \mathbf{x} \in S$$

$$L_0(\mathbf{u}_{10};\ p) = -\Delta\Phi,\ \mathbf{x} \in D^+;\ \mathbf{u}_0 = 0,\ \mathbf{x} \in S$$

Ясно теперь, что (4.7) справедливо и для решений задач (4.8), (4.9).

Задача 2^-. Решение этой задачи при $\varepsilon > 0$ можно получить исходя из интегрального уравнения для смещения на границе, получаемого из формулы Грина — Бетти

$$(4.10)\qquad -\mathbf{u}_\varepsilon + T_\varepsilon^*\mathbf{u}_\varepsilon = -\int_S V_\varepsilon(\mathbf{x},\mathbf{y})\, g(\mathbf{y})\, d_yS \equiv G_\varepsilon(\mathbf{x})$$

Для доказательства существования предела $\lim u_\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$ потребуется исследовать структуру резольвенты $(I + T_\varepsilon^*)^{-1}$ при $\varepsilon \to 0$.

Сделаем предварительно несколько замечаний, касающихся оператора T_0^* и задач $1_0^+, 2_0^-$, дополняющих известные факты. Пусть решение задачи 1_0^+ ищется в виде потенциала двойного слоя

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{W}_0(\mathbf{x},\ \varphi),\quad p = \Pi(\mathbf{x},\ \varphi)$$

Имеем интегральное уравнение относительно вектора φ на границе

$$(4.11)\qquad -\varphi + T_0^*\varphi = \mathbf{f}$$

Решение уравнения (4.11) существует при $\mathbf{f} \in R(-I + T_0^*) = {}^\perp N(-I + T_0) = \{\mathbf{f} : (\mathbf{f}, \mathbf{n}) = 0\}$ и может быть представлено в виде

$$(4.12)\qquad \varphi = \varphi_0 + c\mu$$

$$\varphi_0 = -\frac{1}{2}\mathbf{f} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} T_0^{*k}(I + T_0^*)\mathbf{f} \in {}^\perp N(-I + T_0)$$

Здесь c — произвольная постоянная, μ — решение уравнения $-\mu + T_0^*\mu = 0$. Из единственности решения задачи заключаем

$$\mathbf{W}_0(\mathbf{x},\ \mu) = 0,\qquad \Pi_1(\mathbf{x},\ \mu) = \mathrm{const},\quad \mathbf{x} \in D^+$$

Поскольку для потенциала $\mathbf{V}_0(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$ справедливо равенство $\operatorname{div}_x \mathbf{V}_0(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = 0$, $\mathbf{x} \in D^\pm$, $\mathbf{y} \in S$, имеем для любого $\mathbf{g}$

$$(4.13)\qquad \left(\int_S \mathbf{V}_0(\mathbf{x},\mathbf{y})\, \mathbf{g}(\mathbf{y})\, d_yS\,|_{\mathbf{x}\in S}, \mathbf{n}\right) = 0$$

Вернемся к задаче 2^-. Из формулы Грина—Бетти для задачи 2_0^-, используя фундаментальное решение $\mathbf{V}_0P^k$ при переходе на S, получаем интегральное уравнение для $\mathbf{u}$ на границе S

$$(4.14)\qquad -\mathbf{u} + T_0^*\mathbf{u} = -\int_S \mathbf{V}_0(\mathbf{x},\mathbf{y})\, \mathbf{g}(\mathbf{y})\, d_yS \equiv \mathbf{G}_0(\mathbf{x})$$

Решение уравнения (4.14) существует в силу (4.13) при любом g и представимо в виде, аналогичном (4.12)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + c\mu \tag{4.15}$$

Решение задачи 2_0^- должно удовлетворять условию $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, $x \in D^-$ или $(\mathbf{u}|_S, \mathbf{n}) = 0$. Отсюда, поскольку $(\mathbf{u}_0, \mathbf{n}) = 0$, и в силу того, что единица — простое собственное число оператора T_0, $(\mu, \mathbf{n}) \neq 0$, имеем $c = 0$. Итак, решение задачи 2_0^- — пара $(\mathbf{u}_0; p)$, где

$$\mathbf{u}_0 = -\frac{1}{2} G_0 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} T_0^{*k} (I + T_0^*) G_0$$

Рассмотрим резольвенту оператора T_ε^* $R(\lambda, T_\varepsilon^*) = (\lambda I - T_\varepsilon^*)^{-1}$. Оператор T_ε^* имеет собственное число полной кратности единица вида $1 + \eta(\varepsilon)$, где $\eta(\varepsilon)$ — аналитическая функция в окрестности $\varepsilon = 0$ и $\eta(0) = 0$. В окрестности точки $1 + \eta(\varepsilon)$ справедливо представление (см., например, [6])

$$R(\lambda, T_\varepsilon^*) = \frac{P(\varepsilon)}{\lambda - 1 - \eta(\varepsilon)} + R_0(\lambda, T_\varepsilon^*) \tag{4.16}$$

Здесь $P(\varepsilon)$ — проектор, представимый в виде $P(\varepsilon) = \mu(\varepsilon)(\cdot, \mathbf{n}(\varepsilon))$, где $\mu(\varepsilon) = \mu + \varepsilon\mu_1 + \ldots$, $\mathbf{n}(\varepsilon) = \mathbf{n} + \varepsilon\mathbf{n}_1 + \ldots$ — собственные функции операторов T_ε^* и T_ε соответственно, отвечающие собственному числу $1 + \eta(\varepsilon)$, аналитические в окрестности $\varepsilon = 0$; $R_0(\lambda, T_\varepsilon^*)$ — операторно-значная функция, аналитическая в окрестности точки $\lambda = 1 + \eta(\varepsilon)$.

Можно показать, что $\lim R_0(1, T_\varepsilon^*) G_\varepsilon = R_0(1, T_0^*) G_0$ $(\varepsilon \to 0)$ в сильном смысле.

Действительно, пусть $G_\varepsilon = G_{1\varepsilon} + G_{2\varepsilon}$, где $G_{2\varepsilon} = P(\varepsilon) G_\varepsilon$ и $P(\varepsilon) G_{1\varepsilon} = 0$. По определению оператора $R_0(1, T_\varepsilon^*)$, имеем

$$R_0(1, T_\varepsilon^*) G_\varepsilon = R(1, T_\varepsilon^*) G_{1\varepsilon} = -\frac{1}{2} G_{1\varepsilon} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} T_\varepsilon^{*k} (I + T_\varepsilon^*) G_{1\varepsilon}$$

$$R_0(1, T_0^*) G_0 = -\frac{1}{2} G_0 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} T_0^{*k} (I + T_0^*) G_0$$

Отсюда следует

$$\| R_0(1, T_0^*) G_0 - R_0(1, T_\varepsilon^*) G_\varepsilon \| \leqslant \frac{1}{2} \| G_{1\varepsilon} - G_0 \| + \frac{1}{2} \Big\| \sum_{k=0}^{N} T_0^*(I + T_0^*) G_0 -$$
$$- \sum_{k=0}^{N} T_\varepsilon^{*k} (I + T_\varepsilon^*) G_{1\varepsilon} \Big\| + \frac{1}{2} \Big\| \sum_{k=N+1}^{\infty} T_0^{*k} (I + T_0^*) G_0 \Big\| +$$
$$+ \frac{1}{2} \Big\| \sum_{k=N+1}^{\infty} T_\varepsilon^{*k} (I + T_\varepsilon) G_{1\varepsilon} \Big\|$$

Покажем, что последний член стремится к нулю при $N \to \infty$ равномерно по ε. Этого, очевидно, достаточно, чтобы выражение слева стремилось к нулю при $\varepsilon \to 0$. Рассмотрим сужение оператора T_ε^* на $M = \{\varphi \in L_2(S): (\varphi, \psi_i) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, 6\}$. Спектральный радиус этого сужения $\rho(\varepsilon) < 1 - \delta(\varepsilon)$. При этом существует δ_0, такое.

что $\delta(\varepsilon) > \delta_0 > 0$, $\forall\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$, где ε_1 достаточно мало. Достаточно теперь заметить, что $(I + T_\varepsilon^*)\, G_{1\varepsilon} \in M$, чтобы получить оценку

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} T_\varepsilon^{*k} (I + T_\varepsilon^*)\, G_{1\varepsilon} \right\| \leqslant (1-\delta_0)^N \text{ const}$$

Займемся теперь первым членом в разложении (4.16). Из представления $P(\varepsilon)$ и в силу $(G_0, n) = 0$ (см. (4.13)) имеем $P(\varepsilon) G_\varepsilon = \varepsilon\mu\,(G_0, n_1) + O(\varepsilon^2)$. Следовательно, для того, чтобы для решения задачи 2^- было справедливо (4.15), достаточно выполнения условия $\lim \eta(\varepsilon) / \varepsilon = \text{const} \neq 0$, $\varepsilon \to 0$. Оказывается, что $\eta(\varepsilon) = \eta_k \varepsilon^k + O(\varepsilon^{k+1})$, $k \leqslant 1$.

Действительно, рассмотрим представляющиеся возможности: а) $\mu_1 = 0$, б) $\mu_1 \neq 0$. В случае а) получаем $(T_0^* + \varkappa T_1)\, \mu = \mu\, (\varkappa = 2\varepsilon(1+2\varepsilon)^{-1})$, т. е. $1 \in \Sigma\,(T_\varepsilon^*)$, чего быть не может, следовательно, $\mu_1 \neq 0$.

Пусть φ_ε — решение уравнения $-\varphi_\varepsilon + T_\varepsilon^* \varphi_\varepsilon = f$ при $(f, n) = 0$

$$\varphi_\varepsilon = \varphi_0 + P(\varepsilon)\, f / \eta(\varepsilon) + O(\varepsilon) = \varphi_0 + \varepsilon^{-k+1} \mu (n_1, f) + \varepsilon^{-k+2} [(n_2, f)\, \mu + (n_1, f)\, \mu_1] + O(\varepsilon^{-k+3}) + O(\varepsilon)$$

Рассмотрим потенциал $W_\varepsilon(x, \varphi_\varepsilon)$ при $x \in D^+$. Из предыдущего и равенства $W_0(x, \mu) = 0$ получаем

$$W_\varepsilon(x, \varphi_\varepsilon) = W_0(x, \varphi_0) + \varepsilon^{-k+2} (n_1, f)\, W_0(x, \mu_1) + O(\varepsilon) + O(\varepsilon^{-k+3}) \tag{4.17}$$

Если $\mu_1 = \mu$ (либо $n_1 = n$), тогда $(T_0^* + \varkappa T_1)\, \mu = (1 + \varkappa\eta_1)\, \mu$, и поскольку $1 \overline{\in} \Sigma\,(T_\varepsilon^*)$, имеем $\eta_1 \neq 0$ (или, что то же, $k = 1$). Если же $\mu_1 \neq \mu$, то в силу того, что $\mu_1 \overline{\in} N(-I + T_0^*) = \{\mu\}$, имеем $W_0(x, \mu_1) \neq W_0(x, \mu) = 0$. Кроме того, если $n_1 \neq n$, то для функции «общего положения» f, удовлетворяющей лишь условию $(f, n) = 0$, имеем $(f, n_1) \neq 0$. Поскольку $W_0(x, \varphi_0)$ — решение задачи 1_0^+ при $u_0\,|_S = f$, из (4.7) и (4.17) имеем теперь $k = 1$.

Итак, на поверхности S

$$u_\varepsilon = P(\varepsilon) G_\varepsilon / \eta(\varepsilon) + u_0 + O(\varepsilon) = A\mu + u_0 + O(\varepsilon),$$
$$A = \text{const}$$

На самом деле, $A = 0$ и $\| u_\varepsilon - u_0 \| = O(\varepsilon)$.

Действительно, пусть $u^\circ(x) = \lim u_\varepsilon(x)$, $x \in D^-$, $\varepsilon \to 0$. Переходя к пределу в представлении $u_\varepsilon(x)$, $x \in D^-$ через сумму потенциалов двойного слоя с плотностью $u_\varepsilon(x)$, $x \in S$ и простого слоя с плотностью f, найдем, что $\operatorname{div} u^\circ(x) = 0$, $x \in D^-$. Отсюда $(u^\circ\,|_S, n) = 0$, и, следовательно, поскольку $(u_0, n) = 0$, получим $A = 0$.

Таким образом, пределы решений рассмотренных четырех основных задач существуют. В вычислительном плане представляется существенным, что эти пределы могут быть найдены при помощи метода последовательных приближений.

Поступила 14 XI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ладыженская О. В.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1970.
2. *Купрадзе В. Д.* Методы потенциала в теории упругости. М., Физматгиз, 1963.
3. *Odqwist F. K. G.* Über die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten Math., 1930, Bd 32, H. 3.
4. *Лазарев М. И., Перлин П. И.* Об одном способе построения устойчивого решения операторных уравнений на спектре. Изв. вузов. Математика 1978, № 10.
5. *Михлин С. Г.* Спектр пучка операторов теории упругости. Успехи матем. наук, 1973, т. 28, № 3.
6. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., «Мир», 1972.