

ВИБРАЦИЯ КРУГЛОЙ ТРЕЩИНЫ ПРИ ТРЕХКОМПОНЕНТНОЙ НАГРУЗКЕ

В. А. Бабешко, Г. В. Ткачев

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается пространственная задача о гармонических колебаниях упругого слоя $x, y \in (-\infty, \infty)$, $-h \leq z \leq 0$ толщины h , вызванных вибрацией верхнего и нижнего берегов круглой в плане трещины, расположенной в плоскости $z = -c$ ($0 < c < h$), параллельно границам слоя и занимающей область Ω ($x^2 + y^2 \leq a^2$). Берега трещины загружены произвольной, пространственной, осциллирующей с частотой ω системой сил. Верхняя и нижняя границы слоя свободны от напряжений.

Соответствующая краевая задача сводится к решению системы трех интегральных уравнений первого рода. Последняя преобразуется в систему двух интегральных уравнений и независимое от них одно отдельное уравнение, которые регуляризуются с помощью метода факторизации функций и матриц-функций. В итоге задача сводится к решению системы двух и одного отдельного интегральных уравнений второго рода Фредгольма типа, которые затем приводятся к конечно-мерной алгебраической системе.

Частный случай указанной задачи рассмотрен в работе [1], где изучается задача о вибрации полубесконечной трещины в упругом пространстве. Отметим, что в постановке указанной работы [1] матрица-функция ядра существенно упрощается и проблемы факторизации матрицы не возникает. Кроме того, значительно более простой является формулировка условий излучения.

1. Исходная краевая задача, описываемая системой трех дифференциальных уравнений Ламе при соответствующих граничных условиях методом интегральных преобразований с учетом излучения на бесконечность [2,3], сводится к решению системы трех интегральных уравнений относительно неизвестного вектора $u^*(x, y)$ разности перемещений верхнего и нижнего берегов трещины, которая в безразмерном, матричном виде может быть записана следующим образом:

$$(1.1) \quad \iint_{\Omega} k^*(x - \xi, y - \eta) u^*(\xi, \eta) d\xi d\eta = f^*(x, y), \quad x, y \in \Omega \quad (x^2 + y^2 \leq 1)$$

$$k^*(x - \xi, y - \eta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K^*(\alpha, \beta) e^{-i[\alpha(x-\xi) + \beta(y-\eta)]} d\alpha d\beta$$

$$f^*(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} F^*(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta$$

$$(1.2) \quad F^*(\alpha, \beta) = \frac{a}{G} [T^*(\alpha, \beta) + M^*(\alpha, \beta) Q^*(\alpha, \beta)]$$

Векторы $T^*(\alpha, \beta)$ и $Q^*(\alpha, \beta)$ — двумерные преобразования Фурье по x и y от векторов $t(x, y)$ и $q^*(x, y)$, являющихся соответственно вектором

напряжений на верхнем берегу трещины и вектором разности напряжений на верхнем и нижнем берегах трещины. Выбор контуров Γ_1 и Γ_2 определяется результатами работ [3, 4]; $K^*(\alpha, \beta)$ и $M^*(\alpha, \beta)$ — матрицы третьего порядка с элементами, регулярными в области, содержащей контуры Γ_1 и Γ_2 , имеющими вид

$$(1.3) \quad \begin{aligned} K_{11}^*(\alpha, \beta) &= \alpha^2 S + \beta^2 T, & K_{12}^*(\alpha, \beta) &= K_{21}^*(\alpha, \beta) = \alpha\beta(S - T) \\ K_{22}^*(\alpha, \beta) &= \alpha^2 T + \beta^2 S, & K_{13}^*(\alpha, \beta) &= -K_{31}^*(\alpha, \beta) = \\ &= -i\alpha L \\ K_{33}^*(\alpha, \beta) &= K, & K_{23}^*(\alpha, \beta) &= -K_{32}^*(\alpha, \beta) = -i\beta L \\ M_{11}^*(\alpha, \beta) &= \alpha^2 s + \beta^2 t, & M_{12}^*(\alpha, \beta) &= M_{21}^*(\alpha, \beta) = \\ &= \alpha\beta(s - t) \\ M_{22}^*(\alpha, \beta) &= \alpha^2 t + \beta^2 s, & M_{13}^*(\alpha, \beta) &= i\alpha l, & M_{31}^*(\alpha, \beta) &= \\ &= i\alpha l_1 \\ M_{33}^*(\alpha, \beta) &= k, & M_{23}^*(\alpha, \beta) &= i\beta l, & M_{32}^*(\alpha, \beta) &= i\beta l_1 \end{aligned}$$

Здесь

$$(1.4) \quad \begin{aligned} S &= \frac{R}{Du^2}, & K &= \frac{M}{D}, & T &= -\frac{1}{Nu^2}, & L &= \frac{P}{Du} \\ s &= \frac{mR - pP}{Du^2}, & k &= \frac{rM - pP}{D}, & t &= -\frac{n}{Nu^2}, & l &= \frac{pR - rP}{Du} \\ l_1 &= \frac{mP - pM}{Du}, & D &= P^2 - RM, & u^2 &= \alpha^2 + \beta^2 \\ P &= p(C) - p(H - C), & R &= r(C) + r(H - C) \\ M &= m(C) + m(H - C), & N &= n(C) + n(H - C) \\ p &= p(H - C), & r &= r(H - C), & m &= m(H - C), & n &= n(H - C) \\ C &= \frac{c}{a}, & H &= \frac{h}{a}, & \kappa_2^2 &= \frac{\rho\omega^2 a^2}{G}, & \kappa_1^2 &= \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \kappa_2^2 \\ \gamma_i^2 &= u^2 - \kappa_i^2, & i &= 1, 2 \\ p(d) &= \frac{u}{\delta(d)} [2\gamma_1\gamma_2(\gamma_2^2 + u^2)(\gamma_2^2 + 3u^2)(1 - \operatorname{ch}(\gamma_1 d)\operatorname{ch}(\gamma_2 d)) + \\ &+ (8\gamma_1^2\gamma_2^2 u^2 + (\gamma_2^2 + u^2)^3) \operatorname{sh}(\gamma_1 d)\operatorname{sh}(\gamma_2 d)] \\ r(d) &= \frac{\gamma_1\kappa_2^2}{\delta(d)} [4\gamma_1\gamma_2 u^2 \operatorname{sh}(\gamma_1 d)\operatorname{ch}(\gamma_2 d) - (\gamma_2^2 + u^2)^2 \operatorname{ch}(\gamma_1 d)\operatorname{sh}(\gamma_2 d)] \\ m(d) &= \frac{\gamma_2\kappa_2^2}{\delta(d)} [4\gamma_1\gamma_2 u^2 \operatorname{ch}(\gamma_1 d)\operatorname{sh}(\gamma_2 d) - (\gamma_2^2 + u^2)^2 \operatorname{sh}(\gamma_1 d)\operatorname{ch}(\gamma_2 d)] \\ n(d) &= \frac{1}{\gamma_2} \cdot \frac{\operatorname{ch}(\gamma_2 d)}{\operatorname{sh}(\gamma_2 d)} \\ \delta(d) &= [(\gamma_2^2 + u^2)^4 + 16\gamma_1^2\gamma_2^2 u^4] \operatorname{sh}(\gamma_1 d)\operatorname{sh}(\gamma_2 d) + \\ &+ 8(\gamma_2^2 + u^2)^2 u^2 \gamma_1\gamma_2 [1 - \operatorname{ch}(\gamma_1 d)\operatorname{ch}(\gamma_2 d)] \end{aligned}$$

(a — радиус трещины, ρ , G , ν — соответственно плотность, модуль сдвига, коэффициент Пуассона материала слоя). Для случая, когда трещина находится на линии раздела двух слоев с различными упругими постоянными и разной плотностью, в формулах (1.4) следует $p(C)$, $r(C)$, $m(C)$, $n(C)$ считать зависящими от параметров верхнего слоя толщины c , а $p(H - C)$, $r(H - C)$, $m(H - C)$, $n(H - C)$ — от параметров нижнего слоя толщины $h - c$.

Элементы матриц $K^*(\alpha, \beta)$ и $M^*(\alpha, \beta)$ при $|u| \rightarrow \infty$ ($u^2 = \alpha^2 + \beta^2$) имеют следующее асимптотическое поведение (c_{ij} и d_{ij} — некоторые константы):

$$(1.5) \quad \begin{aligned} K_{ij}^*(\alpha, \beta) &= c_{ij} |u| + O(1), \quad K_{33}^*(\alpha, \beta) = c_{33} |u| + O(1) \\ K_{i3}^*(\alpha, \beta) &= K_{3j}^*(\alpha, \beta) = c_{ij} |u|^3 e^{-c|u|} (1 + O(|u|^{-1})) \\ c &> 0, \quad i, j = 1, 2 \\ M_{ij}^*(\alpha, \beta) &= d_{ij} + O(|u|^{-1}), \quad i, j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Введем класс G_α ($\alpha > 1$) функций $f(x, y)$, обращающихся на границе области Ω ($x^2 + y^2 = 1$) в нуль, и таких, что производные от них по каждой переменной принадлежат L_α ($\alpha > 1$). Этот класс функций вложен в пространство функций, для которых сходится интеграл (k — некоторое число)

$$(1.6) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + k^2} |Q(\alpha, \beta)|^2 d\alpha d\beta < \infty$$

Обозначим через $\pm z_n$ ($n = 1, 2, \dots, N$) полюсы функций S, T, L, K (они одинаковые у всех элементов). Для системы интегральных уравнений (1.1) справедлива теорема единственности.

Теорема 1. Пусть область Ω выпукла. Тогда система интегральных уравнений (1.1) не может иметь в G_α ($\alpha > 1$) более одного решения, если S, T, L, K подчиняются условиям:

$$1^\circ. [S^{-1}(z_n)]' > 0, [T^{-1}(z_n)]' > 0, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

$$2^\circ. [K^{-1}(z_n)]' [S^{-1}(z_n)]' - \{[L^{-1}(z_n)]'\}^2 > 0, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

3°. Существует матрица $\Pi(u)$, $u^2 = \alpha^2 + \beta^2$ с элементами $\Pi_{mn}(u)$, являющимися рациональными функциями, ограниченными на бесконечности с полюсами в точках $\pm z_n$, такая, что при любом u ($-\infty < u < \infty$) вещественная эрмитова компонента матрицы $K^*(\alpha, \beta) \Pi^{-1}(u)$ положительно-определенная.

Доказательство теоремы производится методом, аналогичным изложенному в [4,5] и здесь опущено.

2. Продолжим правую часть системы интегральных уравнений (1.1) на всю плоскость вектор-функций $\psi(x, y)$ и совершим переход к цилиндрической системе координат с последующим разложением всех функций в ряд Фурье — Бесселя

$$(2.1) \quad f(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_1(r, m) e^{im\varphi}$$

Применение интегрального преобразования к продолженной системе трех уравнений (1.1) после линейных преобразований этой системы сводит решение ее к решению для каждого целого m системы двух уравнений

$$(2.2) \quad K(u) U(u, m) = F(u, m) + \Psi(u, m)$$

где вектор $F(u, m)$ и элементы матриц $K(u)$ и $M(u)$ второго порядка имеют вид

$$(2.3) \quad F(u, m) = \frac{a}{G} [T(u, m) + M(u) Q(u, m)]$$

$$K_{11}(u) = u^2 S, \quad K_{12}(u) = K_{21}(u) = uL, \quad K_{22}(u) = K$$

$$M_{11}(u) = u^2 s, \quad M_{12}(u) = -ul, \quad M_{21}(u) = ul_1, \quad M_{22}(u) = k$$

и одного отдельного уравнения, которое решается независимо от (2.2);

$$(2.4) \quad K_{33}(u) U_3(u, m) = F_3(u, m) + \Psi_3(u, m)$$

где

$$(2.5) \quad F_3(u, m) = \frac{a}{G} [T_3(u, m) + M_{33}(u) Q_3(u, m)]$$

$$K_{33}(u) = u^2 T, \quad M_{33}(u) = u^2 t$$

Компоненты двумерного вектора $U(u, m)$, а также функция $U_3(u, m)$ имеют вид

$$(2.6) \quad U_1(u, m) = \int_0^1 [(u_r^*(r, m) - i u_\varphi^*(r, m)) J_{m-1}(ru) - \\ - (u_r^*(r, m) + i u_\varphi^*(r, m)) J_{m+1}(ru)] r dr$$

$$U_2(u, m) = 2 \int_0^1 u_z^*(r, m) J_m(ru) r dr$$

$$U_3(u, m) = \int_0^1 [(i u_r^*(r, m) + u_\varphi^*(r, m)) J_{m-1}(ru) + \\ + (i u_r^*(r, m) - u_\varphi^*(r, m)) J_{m+1}(ru)] r dr$$

Здесь и далее $J_n(x)$, $H_n^{(2)}(x)$ — функции Бесселя первого и третьего рода соответственно.

Аналогичный вид имеют компоненты векторов $T(u, m)$, $Q(u, m)$ и функций $T_3(u, m)$, $Q_3(u, m)$. Компоненты вектора $\Psi(u, m)$ и функция $\Psi_3(u, m)$, являющиеся интегральными преобразованиями от $\psi(r, m)$, определяются также формулами (2.6), только интегралы в них следует брать в пределах от 1 до ∞ .

Уравнение (2.4) удобно представить частным случаем системы уравнений (2.2) с матрицей первого порядка и решать его тем же способом, что и (2.2).

3. Далее используется метод левосторонней регуляризации систем уравнений (2.2), который эффективен в тех случаях, когда по условию задачи требуется определение продолжения правой части (2.2), т. е. вектор-функции, описывающей поведение системы интегральных уравнений вне области задания. Непосредственно же решение системы уравнений (2.2) находится потом с помощью квадратур от продолженной правой части. Обоснование применения этого метода, а также способ построения левостороннего регуляризатора для систем интегральных уравнений первого рода, аналогичных (2.2), имеются в работе [5].

На основе указанного метода с помощью факторизации матриц-функций и последующего проектирования системы уравнений (2.2) на верхнюю и нижнюю полуплоскости комплексного переменного u продолжение правой части этой системы уравнений выражается через двумерную вектор-функцию $Y^+(r, m)$, регулярную в верхней полуплоскости и опре-

деляемую из однозначно разрешимой системы интегральных уравнений второго рода

$$(3.1) \quad Y^+(r, m) + NY^+(r, m) = D(r, m)$$

$$NY^+(r, m) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \frac{K_+^{-1}(\alpha)}{\alpha - r} d\alpha \int_{\Gamma_-} \frac{\Theta(\rho, \alpha, m)}{\rho^2 - \alpha^2} K_+(\rho) Y^+(\rho, m) d\rho$$

$$D(r, m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{K_+^{-1}(\alpha)}{\alpha - r} Z(\alpha, m) H_m^{(2)}(\alpha) J_m(\alpha) \alpha d\alpha$$

$$Z_1(\alpha, m) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{\Theta_{11}^*(\rho, \alpha, m)}{\rho^2 - \alpha^2} F_1(\rho, m) H_m^{(2)}(\rho) \rho d\rho,$$

$$Z_2(\alpha, m) = \frac{F_2(\alpha, m)}{J_m(\alpha)}$$

Здесь $K_+(u)$ и $K_-(u)$ — результат левосторонней факторизации [5,6] матрицы-функции $K(u)$ относительно контура Γ

$$(3.2) \quad K(u) = K_+(u) K_-(u)$$

причем $K_+(u)$ и $K_-(u)$ — матрицы с элементами, регулярными и не имеющими нулей в верхней и нижней полуплоскостях соответственно. Контур Γ_1 совпадает всюду с вещественной осью и обходит вещественные положительные полюсы и нули $K(u)$ снизу, а отрицательные — сверху. Контур Γ_- ниже Γ_1 , но подынтегральная функция между Γ_1 и Γ_- регулярна. Точка r находится выше Γ_1 .

Аналогичным образом решение (2.4) сводится к решению уравнения вида (3.1), в котором вместо матриц $K_+(u)$ и $K_-(u)$ стоят функции $K_+(u)$ и $K_-(u)$ — [результат факторизации $K_{33}(u)$ относительно контура Γ , вместо матрицы $\Theta(\rho, \alpha, m)$ — ее элемент $\Theta_{11}(\rho, \alpha, m)$, а вместо вектора $Z(\alpha, m)$ — функция

$$Z_3(\alpha, m) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{\Theta_{11}^*(\rho, \alpha, m)}{\rho^2 - \alpha^2} F_3(\rho, m) H_m^{(2)}(\rho) \rho d\rho$$

Система (3.1) может быть сведена к фредгольмовой системе, и решение ее строится средствами внешнего анализа [7], однако более удобен подход, основанный на приближенном сведении ее к алгебраической системе линейных уравнений [8] с проведением приближенной факторизации матрицы-функции $K(u)$. Деформацией контуров Γ_1 и Γ_- вниз до точки ветвления $u = -ib$, привносимой в матрицу $K(u)$ при ее аппроксимации, с прибавлением вычетов от подынтегральной функции, взятых в полюсах этой функции, пересекаемых деформируемыми контурами, производится расщепление оператора на конечно-мерный и малый, которым можно пренебречь в силу имеющихся для него оценок [5] (наличия у него убывающих экспонент).

Компоненты вектора $\Psi(u, m)$ выражаются через $Y^+(u, m)$, и после обращения формул (2.6) коэффициенты Фурье (2.1) для вектор-функции:

$\psi(r, m)$ в цилиндрической системе координат принимают вид

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \psi_r(r, m) &= \frac{m}{4r} \int_{\Gamma} [\Psi_1(\alpha, m) + i\Psi_3(\alpha, m)] \frac{H_m^{(2)}(\alpha r)}{H_m^{(2)}(\alpha)} d\alpha - \\ &- \frac{1}{4} \int_{\Gamma} \Psi_1(\alpha, m) \frac{H_{m-1}^{(2)}(\alpha r)}{H_m^{(2)}(\alpha)} \alpha d\alpha \\ \psi_\varphi(r, m) &= \frac{m}{4r} \int_{\Gamma} [\Psi_3(\alpha, m) - i\Psi_1(\alpha, m)] \frac{H_m^{(2)}(\alpha r)}{H_m^{(2)}(\alpha)} d\alpha - \\ &- \frac{1}{4} \int_{\Gamma} \Psi_3(\alpha, m) \frac{H_{m-1}^{(2)}(\alpha r)}{H_m^{(2)}(\alpha)} \alpha d\alpha \\ \psi_z(r, m) &= -\frac{1}{4} \int_{\Gamma} \Psi_2(\alpha, m) \frac{H_m^{(2)}(\alpha r)}{H_m^{(2)}(\alpha)} \alpha d\alpha \end{aligned}$$

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \Psi_1(\alpha, m) &= \alpha^{-1} K_+(\alpha) Y^+(\alpha, m) + F(\alpha) H_m^{(2)}(\alpha) \\ \Psi_3(\alpha, m) &= \alpha^{-1} K_+(\alpha) Y_3^+(\alpha, m) + F_3(\alpha) H_m^{(2)}(\alpha) \end{aligned}$$

Контур Γ выше Γ_- , $\text{Im } \alpha < \text{Im } \rho$. Элементы диагональных матриц $\Theta(\rho, \alpha, m)$ и $\Theta^*(\rho, \alpha, m)$ имеют вид

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \Theta_{11}^*(\rho, \alpha, m) &= \rho \frac{J_{m+1}(\alpha)}{J_m(\alpha)} - \alpha \frac{H_{m+1}^{(2)}(\rho)}{H_m^{(2)}(\rho)} \\ \Theta_{22}^*(\rho, \alpha, m) &= \alpha \frac{J_{m+1}(\alpha)}{J_m(\alpha)} - \rho \frac{H_{m+1}^{(2)}(\rho)}{H_m^{(2)}(\rho)} \\ \Theta_{jj}(\rho, \alpha, m) &= -\pi i H_m^{(2)}(\alpha) J_m(\alpha) \Theta_{jj}^*(\rho, \alpha, m) + (\rho + \alpha), j = 1, 2 \end{aligned}$$

После определения по формулам (2.1), (3.3) вектор-функции $\psi(x, y)$ — продолжения правой части системы интегральных уравнений (1.1) вне области задания Ω — решение этой системы (вектор-функция $u^*(x, y)$) может быть найдено в результате двукратного применения интегральных преобразований к системе (1.1) с правой частью, заданной уже на всей плоскости.

4. Для вектор-функции $Y^+(\rho, m)$ и функции $Y_3^+(\rho, m)$ при $|\rho| \rightarrow \infty$ могут быть получены асимптотические оценки (c_1 — постоянный вектор, $c_2 = \text{const}$)

$$(4.1) \quad Y^+(\rho, m) = c_1 \rho^{-1} + O(\rho^{-2}), \quad Y_3^+(\rho, m) = c_2 \rho^{-1} + O(\rho^{-2})$$

Для вектора напряжений $\tau(x, y)$ на продолжении верхнего берега трещины, т. е. для $x^2 + y^2 > 1$, легко получить его выражение через продолжение правой части $\psi(x, y)$ системы уравнений (1.1)

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \tau(x, y) &= \frac{G}{a} \psi(x, y) - \\ &- \frac{1}{2\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} M^*(\alpha, \beta) Q^*(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \quad x^2 + y^2 > 1 \end{aligned}$$

С помощью оценок (4.1) для компонент вектор-функции $\tau(x, y)$ получаем асимптотические формулы

$$(4.3) \quad \tau_i(x, y) = \frac{A_i}{\sqrt{r-1}}, \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow 1, \quad r > 1, \quad i = 1, 2, 3$$

где A_i — некоторые постоянные, пропорциональные динамическим коэффициентам интенсивности соответствующих напряжений в вершине трещины. Применение метода левосторонней регуляризации для решения системы интегральных уравнений (1.1) позволяет сразу находить такую важную характеристику в механике разрушения, как динамический коэффициент интенсивности напряжений, не находя самого решения системы.

5. При численной реализации задачи встает вопрос о факторизации матрицы-функции $K(u)$ в виде (3.2). Элементы этой матрицы обладают свойствами:

1°. Они регулярны на вещественной оси всюду, за исключение конечного числа точек (полюсов) одних и тех же для всех элементов.

2°. Функции $K_{11}(u)$ и $K_{22}(u)$ четные, $K_{12}(u) = K_{21}(u)$ нечетные.

3°. При $u \rightarrow \infty$ элементы матрицы имеют следующий порядок:

$$K_{11}(u), K_{22}(u) = O(|u|), \quad K_{12}(u), K_{21}(u) = O(e^{-c|u|})$$

В силу чрезвычайной сложности элементов матрицы $K(u)$, обладающих указанными свойствами, факторизация ее может производиться только приближенно, для чего матрица $K(u)$ аппроксимируется матрицей $H(u)$ с дробно-рациональными элементами, умноженными на $(u^2 + b^2)^{1/2}$ (b — некоторая постоянная). Правомерность такой аппроксимации дается теоремой.

Теорема 2. Пусть $u^{(1)}(x, y) \equiv \{u_1^{(1)}(x, y), u_2^{(1)}(x, y)\}$ и $u^{(2)}(x, y) \equiv \{u_1^{(2)}(x, y), u_2^{(2)}(x, y)\}$ — решения уравнения (1.1) соответственно для случаев $K(\alpha, \beta) = K^{(1)}(\alpha, \beta)$ и $K(\alpha, \beta) = K^{(2)}(\alpha, \beta)$ при одинаковых правых частях. Тогда в условиях теоремы 1 из выполнения условий

$$|K_{ij}^{(1)}(\alpha, \beta) - K_{ij}^{(2)}(\alpha, \beta)| (\det K^{(1)}(\alpha, \beta))^{-1} (1 + (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2})^\gamma < \varepsilon, \quad \gamma > 1/2$$

при достаточно малом ε следует

$$|u_k^{(1)}(x, y) - u_k^{(2)}(x, y)| < \delta(\varepsilon), \quad k = 1, 2$$

Доказательство ее, основанное на методе возмущений, ради краткости опущено.

Матрица $H(u)$ может быть представлена в виде

$$(5.1) \quad H(u) = (u^2 + b^2)^{1/2} \prod_{k=1}^N (u^2 - z_k^2)^{-1} P(u)$$

Здесь z_k ($k = 1, 2, \dots, n$ ($n < N$)) — вещественные полюсы элементов матрицы $K(u)$, z_k ($k = n + 1, \dots, N$) — комплексные числа, нули знаменателя дробно-рациональных функций, аппроксимирующих элементы матрицы $K(u)$, одинаковые у всех элементов; $P(u)$ — полиномиальная матрица с элементами $P_{mm}(u)$, являющимися полиномами степени $2N$ и

$P_{mn}(u)$ ($m \neq n$) — полиномами степени $2N - R$ ($R > 0$). Из (5.1) ясно, что матрица $|u|^{-1}H(u)$ вырождается в единичную при $|u| \rightarrow \infty$. Для матрицы $P(u)$ справедливо представление [9]

$$(5.2) \quad P(u) = C(u) G(u) D(u)$$

Здесь $G(u)$ — диагональная матрица с элементами $G_{11}(u) = \text{const}$ и $G_{22}(u)$ — полином степени $4N$, $D(u)$ и $C(u)$ — матрицы с регулярными элементами и равными константе определителями.

Знание нулей элемента $G_{22}(u)$ позволяет матрицу $G(u)$ легко представить в виде $G(u) = G_+(u) G_-(u)$. Аналогично формуле (5.2) получается представление

$$(5.3) \quad C(u) G_+(u) = G_+^{\circ}(u) B(u)$$

с матрицей $B(u)$, обладающей теми же свойствами, что $C(u)$ и $D(u)$. Это дополнительное преобразование необходимо для того, чтобы полученные в результате факторизации $H(u)$ матрицы

$$(5.4) \quad K_+(u) = (u + ib)^{1/2} \prod_{k=1}^N (u + z_k)^{-1} G_+^{\circ}(u)$$

$$K_-(u) = (u - ib)^{1/2} \prod_{k=1}^N (u - z_k)^{-1} B(u) G_-(u) D(u)$$

не только удовлетворяли (3.2), но и при $|u| \rightarrow \infty$ матрицы $1/\sqrt{u} K_+(u)$ и $1/\sqrt{u} K_-(u)$ вырождались бы в единичные.

6. В качестве примера решения задачи предложенным выше методом рассмотрим решение системы интегральных уравнений (1.1) с матрицей $K^*(\alpha, \beta)$, имеющей элементы

$$K_{jj}^*(\alpha, \beta) = \frac{u^2 + 2t^2}{u^2 - 2it^2}, \quad u^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad j = 1, 2, 3$$

$$K_{31}^*(\alpha, \beta) = -K_{13}^*(\alpha, \beta) = i\alpha \frac{2t}{u^2 - 2it^2}, \quad K_{12}^*(\alpha, \beta) = K_{21}^*(\alpha, \beta) = 0$$

$$K_{32}^*(\alpha, \beta) = -K_{23}^*(\alpha, \beta) = i\beta \frac{2t}{u^2 - 2it^2}$$

а правой частью $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$, $f_z(x, y) = 1$.

Решение этой системы уравнений сводится к решению только для $m = 0$ системы уравнений (2.2) и одного уравнения (2.4), причем для данной задачи входящие в них функции и элементы матриц будут

$$K_{jj}(u) = \frac{u^2 + 2t^2}{u^2 - 2it^2}, \quad j = 1, 2, 3; \quad K_{12}(u) = K_{21}(u) = \frac{2tu}{u^2 - 2it^2}$$

В результате факторизации матрицы $K(u)$ для элементов матриц $K_+(u)$ и $K_-(u)$ получаем следующие значения:

$$K_{11}^{\pm}(u) = K_{22}^{\pm}(u) = (u \pm it)(u \pm t(i+1))^{-1}$$

$$K_{12}^{\pm}(u) = K_{21}^{\pm}(u) = t(u \pm t(i+1))^{-1}$$

Решая алгебраическую систему, к которой сводится система (3.1), находим

$$Y_1^+(-t(i+1)) = -Y_2^+(-t(i+1)) =$$

$$= \frac{4J_1(-t(i-1))}{\pi(i-1)J_0(-t(i-1))\Theta^{\circ}(-t(i+1), -t(i-1))}$$

$$\Theta^\circ(\alpha, \beta) = (\alpha + \beta) (H_0^{(2)}(\alpha) J_1(\beta) - H_1^{(2)}(\alpha) J_0(\beta))$$

а в случае одного уравнения получаем, что $Y_3^+(-t(i+1)) \equiv 0$.

Компоненты вектор-функции $\psi(x, y)$ — продолжения правой части системы интегральных уравнений (1.1) вне области задания в цилиндрической системе координат — будут иметь следующий вид:

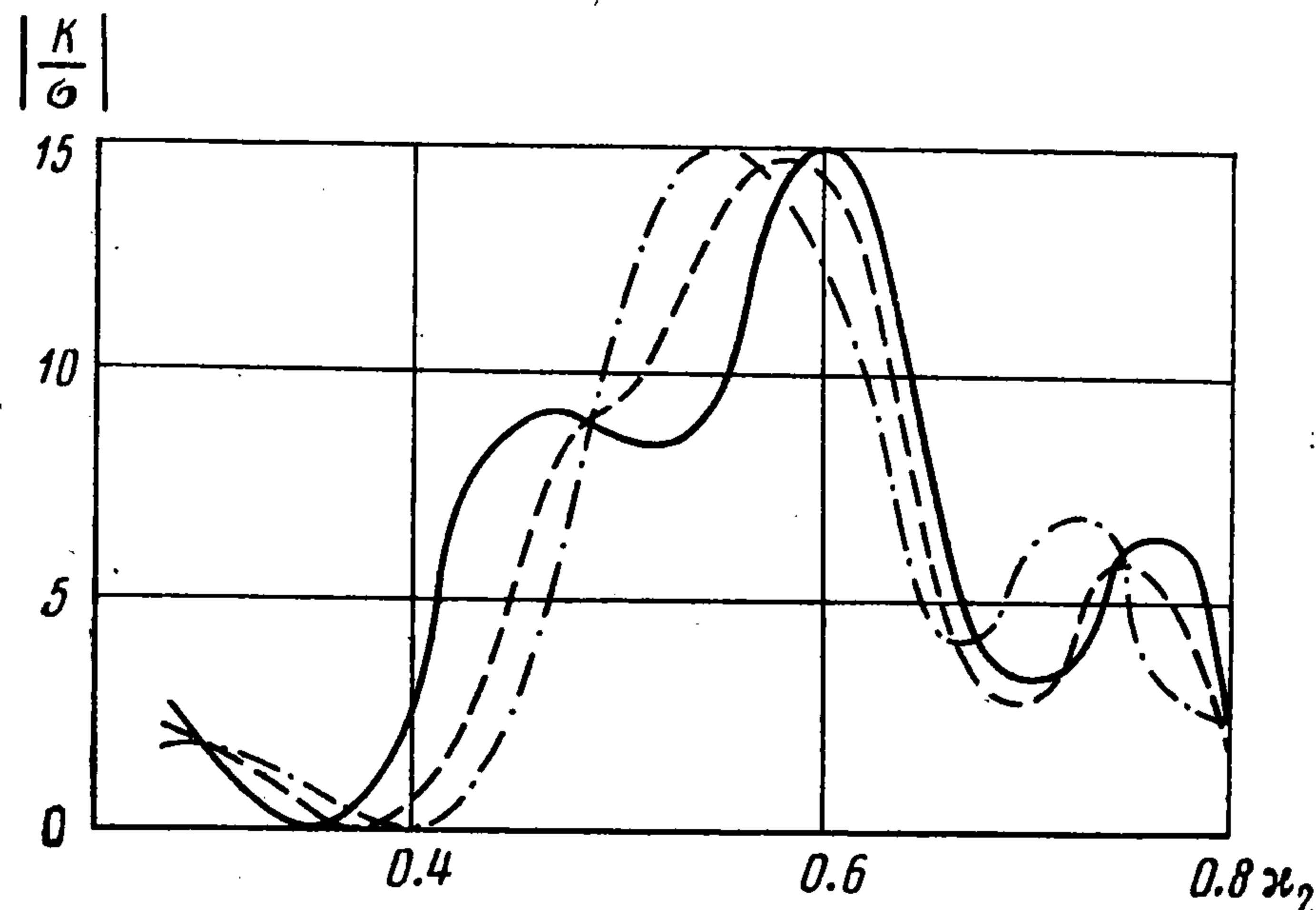
$$(6.1) \quad \begin{aligned} \psi_r(r, 0) &= \frac{4tJ_1(-t(i-1))}{(i+1)\Theta^\circ(-t(i+1), -t(i-1))} H_1^{(2)}(-rt(i+1)) \\ \psi_\varphi(r, 0) &= 0 \\ \psi_z(r, 0) &= \frac{4tJ_1(-t(i-1))}{(i+1)\Theta^\circ(-t(i+1), -t(i-1))} H_0^{(2)}(-rt(i+1)) \end{aligned}$$

а само решение системы соответственно:

$$(6.2) \quad \begin{aligned} u_r^*(r, 0) &= -\frac{4tH_1^{(2)}(-t(i+1))}{(i+1)\Theta^\circ(-t(i+1), -t(i-1))} J_1(-rt(i-1)) \\ u_\varphi^*(r, 0) &= 0 \\ u_z^*(r, 0) &= -i - \frac{4tH_1^{(2)}(-t(i+1))}{(i+1)\Theta^\circ(-t(i+1), -t(i-1))} J_0(-rt(i-1)) \end{aligned}$$

Для проверки найденного решения (6.2) подставляем его в исходную систему (1.1) и получаем тождество.

7. В НИИ механики и прикладной математики Ростовского госуниверситета составлен пакет прикладных программ, с помощью которых можно производить аппрокси-



мацию матриц, факторизацию их и расчет характеристик трещины, берега которой колеблются по гармоническому закону. С помощью этих программ был произведен расчет динамического коэффициента интенсивности напряжений в вершине трещины для случая нормальной осциллирующей нагрузки, приложенной к ее берегам

$$\tau(x, y) \equiv \{0, 0, \sigma\}, \quad \sigma = \text{const}, \quad x, y \in \Omega$$

На фигуре приведена зависимость безразмерной величины $|K/\sigma|$ от параметра η_2 (см. (1.4)), где K — динамический коэффициент интенсивности напряжений в вершине трещины. Сплошной линией проведен график для трещины, находящейся от поверхности слоя на расстоянии 0.2 его толщины, пунктирной и штрихпунктирной линиями — соответственно на расстоянии 0.25 и 0.3 толщины. Прослеживается зависимость $|K/\sigma|$ от частоты колебаний берегов трещины и от ее расположения в слое.

Поведение полученных кривых существенно отличается от поведения соответствующих кривых, приведенных в работе [10], где исследовалась плоская задача о колебании берегов трещины в упругом пространстве. Из их сравнения очевидно, что влияние масштабного фактора (конечная в нашем случае и бесконечная в одном направлении

при решении плоской задачи трещина) существенно сказывается на величине динамического коэффициента интенсивности напряжений. Следует отметить также наличие некоторых приведенных частот $\kappa_2^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots$, при которых этот коэффициент для трещины в слое близок к нулю.

Поступила 5 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Achenbach J. D., Gautesen A. K.* Elastodynamic stress-intensity factors for a semi-infinite crack under 3-D loading. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1977, vol. 44, No. 2.
2. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1967.
3. *Бабешко В. А.* Об условиях излучения для упругого слоя. Докл. АН СССР, 1973, т. 213, № 3.
4. *Бабешко В. А.* Об единственности решений интегральных уравнений динамических контактных задач. Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 6.
5. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М., «Наука», 1979.
6. *Бабешко В. А.* Статические и динамические контактные задачи со сцеплением. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3.
7. *Grothendieck A.* La theorie de Fredholm. Bull. Soc. math. France, 1956, t. 84, No. 4.
8. *Бабешко В. А.* Новый эффективный метод решения динамических контактных задач. Докл. АН СССР, 1974, т. 217, № 4.
9. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., «Наука», 1967.
10. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения. М., «Наука», 1974.