

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ В РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПОДВИЖНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Вик. В. Сычев

(Москва)

Исследуются особенности в решениях уравнений для нестационарного пограничного слоя, пограничного слоя на подвижной поверхности и следа, которые возникают под действием заданного положительного градиента давления.

Исследования нестационарного отрыва пограничного слоя на твердой поверхности привели к установлению известной аналогии этого явления со стационарным отрывом на подвижной поверхности [1, 2]. Согласно определению Мура—Ротта—Сирса (см., например, [1, 2]), в точке отрыва пограничного слоя на подвижной поверхности должно происходить одновременное обращение в нуль величин трения и продольной составляющей вектора скорости. Причем эта точка является особой и располагается внутри пограничного слоя [1-4]. Появление этой особенности аналогично появлению особенности Гольдштейна [5] в точке нулевого трения на неподвижной поверхности (см. также обзор [6]). Хотя в действительности, как известно, явление отрыва является самоиндуцированным [7, 8], исследование структуры особенностей, которые в общем случае неизбежно возникают в решениях уравнений пограничного слоя с заданным положительным градиентом давления, представляет самостоятельный интерес. Появление таких особенностей, возникающих, например, при численных решениях задач [3, 4], всегда свидетельствует о невозможности безотрывного течения.

1. Рассмотрим поведение решения уравнений ламинарного пограничного слоя для двумерного стационарного течения несжимаемой жидкости при заданном положительном градиенте давления, действующем на конечном участке поверхности, которая движется вниз по потоку с постоянной скоростью. Обозначим через Lx , Ly криволинейные ортогональные координаты, направленные соответственно вдоль поверхности тела и по нормали к ней, через $U_x u$, $U_x v$ — соответствующие проекции вектора скорости, через $p_\infty + \rho U_\infty^2 p$ — давление и ρ — плотность. Здесь L — характерный размер обтекаемого тела, U_∞ и p_∞ — параметры набегающего потока. Число Рейнольдса $R = U_\infty L / \nu$, $R \rightarrow \infty$.

Уравнения пограничного слоя и соответствующие краевые условия запишем в переменных Мизеса

$$(1.1) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dp}{dx} = u \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(u \frac{\partial u}{\partial \Psi} \right), \quad \frac{\partial Y}{\partial \Psi} = \frac{1}{u}, \quad u \frac{\partial Y}{\partial x} = V$$

$$u = U_w, \quad Y = V = 0, \quad (\Psi = 0), \quad u \rightarrow U(x) \quad (\Psi \rightarrow \infty)$$

$$u = U^*(\Psi) \quad (x = x_0 < 0),$$

$$\Psi = R^{1/2}\psi, \quad Y = R^{1/2}y, \quad V = R^{1/2}v$$

Здесь ψ — безразмерная функция тока, $U_w = O(1)$, $U_w > 0$ — скорость движения поверхности тела, $U^*(\Psi)$ — начальный профиль скорости. Функция $U(x)$, определяющая значение скорости при $\Psi \rightarrow \infty$, считается известной из решения внешней задачи и в окрестности рассматриваемой точки $x = 0$ может быть представлена в виде

$$(1.2) \quad U(x) = a_0 + a_0^{-1}\lambda_0(-x) + O[(-x)^2] \quad (x \rightarrow -0)$$

Градиент давления при этом ведет себя следующим образом:

$$(1.3) \quad dp/dx = \lambda_0 + O[(-x)] \quad (x \rightarrow -0)$$

Здесь a_0, λ_0 — положительные постоянные.

Рассмотрим поведение решения уравнений пограничного слоя в окрестности точки с координатами $(0, Y_0)$, Y_0 — некоторая постоянная. Пусть это произвольная точка, т. е. обе компоненты вектора скорости и их производные принимают в ней конечные значения. В этом случае решение задачи (1.1)–(1.3), записанное в обычных переменных, при $x \rightarrow -0$ и $Y \rightarrow Y_0$ представимо в виде регулярного разложения

$$(1.4) \quad \Psi = \Psi_0(Y) + (-x)\Psi_1(Y) + O[(-x)^2]$$

$$\Psi_0(Y) = \Psi_s + \alpha_1 Y^* + \alpha_2 Y^{*2} + \alpha_3 Y^{*3} + \alpha_4 Y^{*4} + O(Y^{*5})$$

$$\Psi_1(Y) = \beta_0 + \beta_1 Y^* + \beta_2 Y^{*2} + \beta_3 Y^{*3} + O(Y^{*4}),$$

$$Y^* = Y - Y_0$$

Тогда $\Psi_s, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_0$ оказываются произвольными постоянными, а постоянные $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ выражаются через них и λ_0 из (1.3).

Если в рассматриваемой точке происходит одновременное обращение в нуль величины трения и продольной составляющей вектора скорости, то тогда в (1.4)

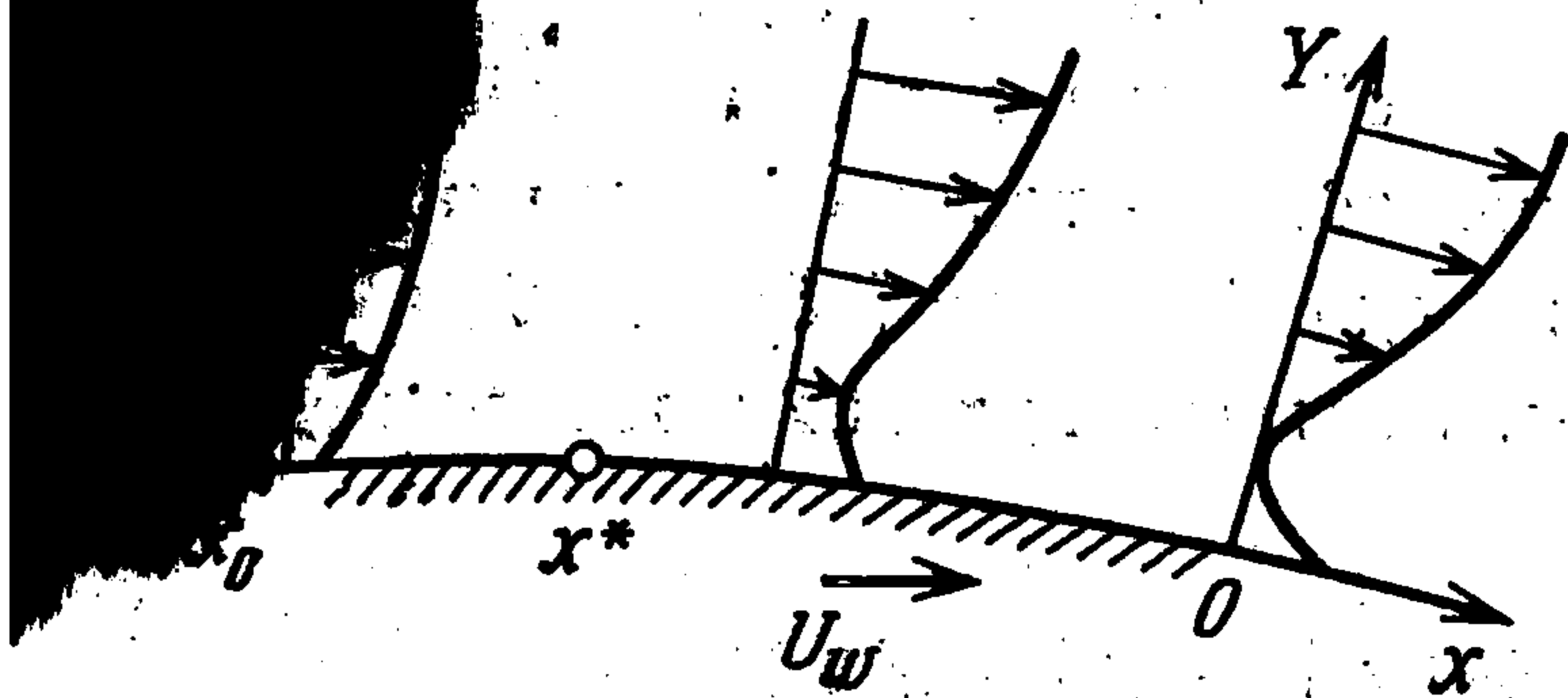
$$(1.5) \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = \lambda_0/6, \quad \beta_0 = 24\alpha_4\lambda_0^{-1}$$

Перейдем к рассмотрению задачи (1.1)–(1.3) для окрестности точки с нулевыми значениями величин трения и продольной составляющей вектора скорости в предположении, что соотношения (1.5) между постоянными не выполняются и, следовательно, решение становится нерегулярным. Такой случай более общий, так как в решении вне окрестности рассматриваемой точки постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_0$ произвольны и их значения определяются внешними краевыми условиями, в то время как в окрестности рассматриваемой точки решение регулярно, если на эти постоянные наложены условия (1.5).

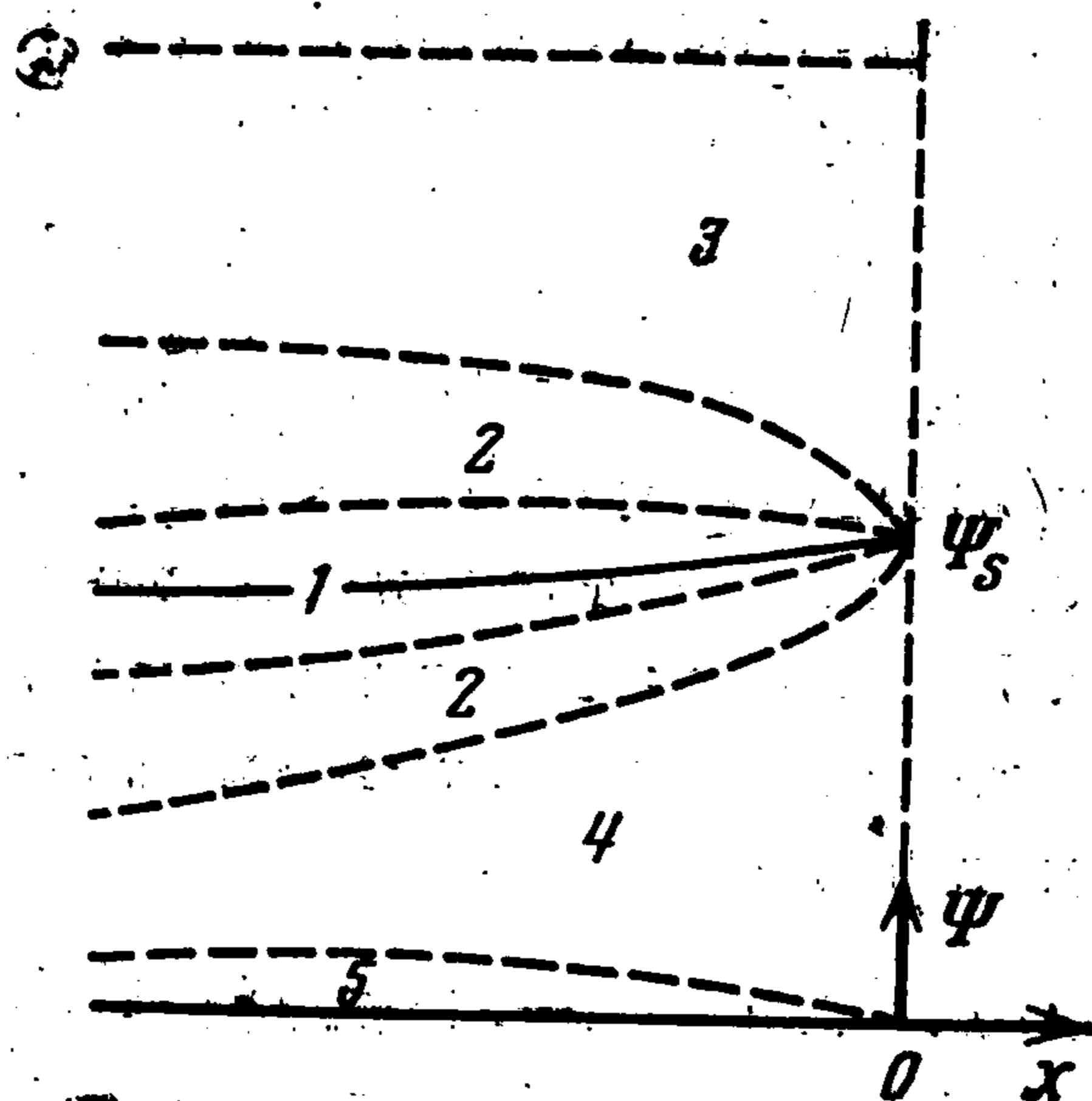
Если пограничный слой находится в области возрастающего вниз по потоку давления, то жидкость в этом слое будет тормозиться. Поскольку поверхность тела движется вниз по потоку, то, начиная с некоторого значения $x = x^* > x_0$ (фиг. 1), профиль скорости вдоль каждой линии

ум в некоторой точке, не лежащей на поверхности нулевого трения. Поэтому в окрестности точки $x = -0$ нуль вдоль некоторой линии.

Введем в окрестности линии нулевого трения под-инерционные и вязкие члены — величины одного порядка. В некотором подслое (область I) в ортогональной системе координат (x, Y_1) , связанной с линией



Фиг. 1



Фиг. 2

нулевого трения и имеющей начало в точке $(0, \Psi_s)$, имеет вид

$$(1.6) \quad \Psi = \Psi_s + (-x_1)^{3/4} f_0(\eta) + (-x_1)^\alpha f_1(\eta) + O[(-x_1)^{7/4}] \\ \eta = Y_1 (-x_1)^{-1/4}, \quad \alpha \in (3/4, 7/4)$$

Подставляя разложение (1.6) в (1.1)–(1.3), приходим к следующей задаче:

$$(1.7) \quad f_0''' - \frac{3}{4} f_0'' f_0 + \frac{1}{2} f_0'^2 - \lambda_0 = 0; \quad f_0(0) = c_0, \quad f_0''(0) = 0$$

причем $f_0(\eta)$ не содержит экспоненциально возрастающих членов при $|\eta| \rightarrow \infty$.

Существует по крайней мере два решения этой задачи. Одно из них было получено в работе [5] и имеет вид

$$(1.8) \quad f_0(\eta) = \lambda_0 \eta^3 / 6 \quad (c_0 = 0)$$

Другое решение

$$(1.9) \quad f_0(\eta) = (2\lambda_0)^{1/2} \eta + c_0$$

Рассмотрим подробно решение задачи, соответствующее решению (1.9). (Случай, когда решение задачи (1.7) имеет вид (1.8) и, следовательно, удовлетворяет дополнительному условию $f_0'(0) = 0$, будет рассмотрен в п. 3.). Для функции $f_1(\eta)$ разложения (1.6) с учетом (1.9) получаем следующую задачу:

$$(1.10) \quad f_1'(\eta)' = \Phi(\eta_1), \quad \eta = 2 \cdot 3^{-1/2} (2\lambda_0)^{-1/4} \eta_1 - c_0 (2\lambda_0)^{-1/2} \\ v_0 = (4\alpha + 1) / 3, \quad \Phi'' - \eta_1 \Phi' + v_0 \Phi = 0, \quad \Phi'(0) = 0$$

причем $\Phi(\eta_1)$ не содержит экспоненциально возрастающих членов при

$|\eta_1| \rightarrow \infty$. Полученное уравнение для функции Φ — это уравнение Вебера (см. [9]). Ненулевое решение существует, если только $\nu_0 = 2(n-1)$, $n = 1, 2, \dots$, т. е. $\nu_0 \in \mathbb{Z}$. Поскольку в разложении (1.6) $\alpha \in (\frac{3}{4}, \frac{7}{4})$, получаем $\nu_0 = 1$. Тогда $\Phi(\eta_1) = c_1(\eta_1^2 - 1)$. Возвращаясь к исходной функции $f_1(\eta)$, удовлетворяя условию обращения в нуль величины трения τ , получаем (c_1, c_2 — произвольные постоянные)

$$(1.11) \quad f_1(\eta) = c_1 \eta [(2\lambda_0)^{1/2} \eta^2 / 4 - 1] + c_2, \quad c_0 = 0$$

Заметим теперь, что полученное решение (1.6), (1.9), (1.11) для области I нельзя срастить с решением в основной части пограничного слоя. Продольная составляющая вектора скорости — величина порядка $O(\delta)$. Поэтому введем в рассмотрение еще один подслой (область 2), где течение будет локально невязким. Соответствующее решение представим в виде

$$(1.12) \quad u = (-x)^{1/2} g_0(\xi) + O[(-x)^{2(1-\beta)}] + O[(-x)^{3/2}] \\ \xi = \chi (-x)^{-\beta}, \quad \chi = \Psi - \Psi_s + \varphi_0(x), \quad \beta < 3/4$$

Здесь $\varphi_0(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -0$ и определяет отличие линии нулевого трения от линии тока $\Psi = \Psi_s$. Подставив разложение (1.12) в (1.1)–(1.3) и положив $\varphi_0(x) = k_0(-x)^\beta + o[(-x)^\beta]$, получаем следующее уравнение для функции $g_0(\xi)$:

$$2\beta(\xi - k_0) g_0' g_0 - g_0^2 + 2\lambda_0 = 0$$

Интегрируя это уравнение и производя сращивание с решением для области I , получаем $\beta = 1/2$, $k_0 = 0$, $g_0(\xi) = (A_0^2 \xi^2 + 2\lambda_0)^{1/2}$. Определив значение постоянной β , запишем окончательный вид решения для первых двух членов разложения в области 2 при $x \rightarrow -0$

$$(1.13) \quad u = (-x)^{1/2} g_0(\xi) + (-x) g_1(\xi) + O[(-x)^{3/2}] \\ Y = G^*(x) + h_0(\xi) + (-x)^{1/2} h_1(\xi) + O[(-x)] \\ \xi = \chi (-x)^{-1/2}, \quad \chi = \Psi - \Psi_s + \varphi_0(x), \quad \varphi_0(x) = o[(-x)] \\ g_0(\xi) = (A_0^2 \xi^2 + 2\lambda_0)^{1/2} \\ g_1(\xi) = A_1 \xi^3 (A_0^2 \xi^2 + 2\lambda_0)^{-1/2} - A_0^2 (3\lambda_0)^{-1} (A_0^2 \xi^2 + 2\lambda_0) \\ h_0(\xi) = (2A_0)^{-1} \ln \left[\frac{g_0(\xi) + A_0 \xi}{g_0(\xi) - A_0 \xi} \right] \\ h_1(\xi) = \frac{A_0^2}{3\lambda_0} \xi - \frac{A_1 (A_0^2 \xi^2 + 4\lambda_0)}{A_0^4 (A_0^2 \xi^2 + 2\lambda_0)^{1/2}}$$

Здесь $G^*(x)$ — некоторая, пока произвольная функция. Значения произвольных постоянных A_0, A_1, Ψ_s определяются внешними краевыми условиями. (Выражения для вертикальной составляющей вектора скорости находятся непосредственно из третьего уравнения (1.1) и в работе не выписываются.)

Полученное решение (1.13) для области 2 удовлетворяет условию обращения в нуль величины трения вдоль линии $\chi = 0$ и регулярно в ее окрест-

ности. Таким образом, введение области 1 излишне, поскольку решение в ней представляет собой продолжение решения (1.13) в область, где $\Psi - \Psi_s = O [(-x)^{3/4}]$.

В областях 3 и 4 (фиг. 2), где продольная составляющая вектора скорости — величина порядка единицы, в соответствии с (1.2) решение при $x \rightarrow -0$ может быть представлено в следующем виде:

$$(1.14) \quad \begin{aligned} u &= U_i(\Psi) + (-x) U_i^*(\Psi) + O [(-x)^2] \\ Y &= G_i(x) + Y_i(\Psi) + (-x) Y_i^*(\Psi) + O [(-x)^2] \\ U_i^*(\Psi) &= \lambda_0 U_i^{-1}(\Psi) - [U_i(\Psi) U_i'(\Psi)]' \\ Y_i(\Psi) &= \int U_i^{-1}(\Psi) d\Psi, \quad Y_i^*(\Psi) = -\int U_i^*(\Psi) U_i^{-2}(\Psi) d\Psi \\ i &= 3, 4, \quad U_3(\Psi) \rightarrow a_0 \quad (\Psi \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Из срачивания с решением в области 2 получаем

$$(1.15) \quad \begin{aligned} U_3(\Psi) &= A_0(\Psi - \Psi_s) + O [(\Psi - \Psi_s)^2] \quad (\Psi \rightarrow +\Psi_s), \quad A_0 > 0 \\ G_3(x) &= G^*(x) - (2A_0)^{-1} \ln [\lambda_0 (2A_0^2)^{-1} (-x)] + o(1) \\ U_4(\Psi) &= A_0(\Psi_s - \Psi) + O [(\Psi_s - \Psi)^2] \quad (\Psi \rightarrow -\Psi_s) \\ G_4(x) &= G^*(x) + (2A_0)^{-1/2} \ln [\lambda_0 (2A_0^2)^{-1} (-x)] + o(1) \end{aligned}$$

Для удовлетворения краевым условиям в (1.1) при $\Psi = 0$ рассмотрим подслоя (область 5 на фиг. 2), в котором действие сил вязкости будем считать существенным. Решение представим в виде

$$u = U_w + (-x)^\gamma F_0(\zeta) + O [(-x)], \quad \zeta = \Psi (-x)^{-1/2}, \quad \gamma \in (0, 1)$$

Подставляя это разложение в (1.1) — (1.3), получим, что $F_0(\zeta)$ удовлетворяет уравнению Вебера $2U_w F_0'' - \zeta F_0' + 2\gamma F_0 = 0$ при следующих краевых условиях: $F_0(0) = 0$ и $F_0(\zeta)$ не содержит экспоненциально возрастающих членов при $\zeta \rightarrow \infty$. Ненулевое решение этой задачи существует, если только $\gamma = n - 1/2$, $n = 1, 2, \dots$. Поскольку $\gamma \in (0, 1)$, находим, что $\gamma = 1/2$, и тогда $F_0(\zeta) = b_0 \zeta$. Окончательно решение в области 5, удовлетворяющее краевым условиям при $\Psi = 0$, может быть записано в виде

$$(1.16) \quad \begin{aligned} u &= U_w + (-x)^{1/2} F_0(\zeta) + (-x) F_1(\zeta) + O [(-x)^{3/2}] \\ Y &= (-x)^{1/2} U_w^{-1} \zeta + (-x) H_0(\zeta) + O [(-x)^{3/2}] \\ \zeta &= \Psi (-x)^{-1/2}, \quad F_0(\zeta) = b_0 \zeta, \quad F_1(\zeta) = b_1 \zeta^2 \\ H_0(\zeta) &= -b_0 (2U_w^2)^{-1} \zeta^2, \quad b_1 = (\lambda_0 - b_0^2 U_w) (2U_w^2)^{-1} \end{aligned}$$

Значение произвольной постоянной b_0 определяется внешними краевыми условиями. Из срачивания решения (1.16) с решением (1.14), (1.15) для области 4 находим, что $U_4(\Psi) = U_w + b_0 \Psi + b_1 \Psi^2 + O(\Psi^3)$ при $\Psi \rightarrow 0$ и $G_4(x) = 0$. Последнее равенство вместе с выражением (1.15) дает следующее разложение для функции $G^*(x)$, которая входит в (1.13) — (1.15)

$$(1.17) \quad G^*(x) = -(2A_0)^{-1} \ln [\lambda_0 (2A_0^2)^{-1} (-x)] + o(1) \quad (x \rightarrow -0)$$

Таким образом, толщина пограничного слоя при приближении к точке $x = -0$ возрастает по логарифмическому закону. Следовательно, решение

уравнений пограничного слоя в окрестности рассматриваемой точки ведет себя особым образом. Трение на поверхности тела на основании (1.16) есть величина конечная

$$\tau_w = u \frac{\partial u}{\partial \Psi} \Big|_{\Psi=0} = b_0 U_w + O[(-x)]$$

2. Покажем, что полученное решение не может быть непрерывно продолжено за точку $x = 0$.

Следуя работе [5], продолжим решение для основной части пограничного слоя в область положительных значений x . Решение здесь при $x \rightarrow +0$ имеет вид

$$(2.1) \quad u = U_s(\Psi) + x U_s^\circ(\Psi) + O(x^2)$$

$$U_s^\circ(\Psi) = -\lambda_0 U_s^{-1}(\Psi) + [U_s(\Psi) U_s'(\Psi)]'$$

При $\Psi \rightarrow +\Psi_s$ $U_s(\Psi) = A_0(\Psi - \Psi_s) + O[(\Psi - \Psi_s)^2]$. Следовательно, разложение (2.1) становится непригодным в области, где $\Psi - \Psi_s = O(x^{1/2})$. Решение здесь может быть представлено в следующем виде:

$$u = x^{1/2} R_0(s) + O(x), \quad s = \chi^\circ x^{-1/2}, \quad \chi^\circ = \Psi - \Psi_s + o(x)$$

Подставляя это разложение в уравнения пограничного слоя с учетом (1.3) и интегрируя, получим

$$R_0(s) = (A_0^2 s^2 - 2\lambda_0)^{1/2}$$

Из этого выражения следует, что при $s^2 < 2\lambda_0 A_0^{-2}$ решение становится мнимым. Таким образом, так же как и решение Гольдштейна [5] для неподвижной поверхности, полученное решение не может быть непрерывно продолжено за особую точку.

Еще раз напомним, что если в полученном выше решении перейти от системы координат связанной с особой точкой, в систему координат, связанную с движущейся поверхностью, то в результате получается решение нестационарных уравнений пограничного слоя (см. [1,2]). Это решение соответствует окрестности особой точки, которая движется вверх по потоку с постоянной скоростью $U_s = -U_w$.

3. Остановимся на случае, когда решение задачи (1.7) для функции $f_0(\eta)$ описывается выражением (1.8) и, следовательно, удовлетворяет дополнительному условию $f_0'(0) = 0$.

Решение в окрестности рассматриваемой точки для этого случая было получено в работе [10] и имеет вид

$$(3.4) \quad \Psi = \Psi_s + (-x_1)^{3/4} f_0(\eta) + (-x_1) f_1^*(\eta) + (-x_1)^{5/4} f_2^*(\eta) + O[(-x_1)^{3/2}]$$

$$\eta = Y_1 (-x_1)^{-1/4}, \quad f_0'(\eta) = \lambda_0 \eta^3 / 6$$

$$f_1^*(\eta) = \alpha_4 (\eta^4 + 24\lambda_0^{-1}) + a_1^* \eta^2$$

$$f_2^*(\eta) = \alpha_5 \eta^5 + 8a_1^* \alpha_4 \lambda_0^{-1} \eta^3 + a_2^* \eta^2 + [120\alpha_5 \lambda_0 + 2a_1^{*2} \lambda_0 - (24\alpha_4)^2] \lambda_0^{-2} \eta$$

Здесь $\alpha_4, \alpha_5, a_1^*, a_2^*$ — произвольные постоянные. Если линия $Y_1 = 0$ не совпадает с линией нулевого трения, то решение (3.1) имеет особенность в точке $x_1 = -0$. Однако на основании преобразования Прандтля, которое в этом случае имеет вид

$$\Psi \rightarrow \Psi, \quad x_1 \rightarrow x_1, \quad Y_1 \rightarrow Y_1 - 2a_1^* \lambda_0^{-1} (-x_1)^{1/2} + O[(-x_1)^{3/4}]$$

особенность может быть устранена. Это преобразование эквивалентно переходу к системе координат, связанной с линией нулевого трения, и, следовательно, в решении (3.1) следует положить $a_1^* = a_2^* = 0$. При этом (3.1) представляет собой регулярное разложение (1.4), (1.5) и может быть непрерывно продолжено в область положительных значений x .

Таким образом, решение (1.8) соответствует регулярному разложению в окрестности рассматриваемой точки. Особому поведению при этом соответствует решение (1.9). В силу сказанного предположение [1] о том, что решение (3.1), полученное в работе [10], дает описание особого поведения решения задачи (1.1)—(1.3), по-видимому, не соответствует действительности.

Заметим, что в случае, когда решение является особым, величина трения для первых двух членов разложения (так же как это было в работе [11]) обращается в нуль вдоль линии тока $\Psi = \Psi_s$. Если же решение регулярно, то трение обращается в нуль вдоль линии, которая, вообще говоря, не является линией тока. Это связано с тем, что особое решение является локально невязким, и поэтому завихренность сохраняется вдоль линий тока: $\Psi_{YY} = \omega(\Psi)$.

4. В заключение рассмотрим особенности, возникающие на оси симметрии ламинарного следа в несжимаемой жидкости при заданном положительном градиенте давления.

Течение в двумерном стационарном симметричном следе за телом, которое обтекает без отрыва потока, описывается уравнениями пограничного слоя. Введем безразмерные функции и независимые переменные, как это было сделано в п. 1. Начало декартовой системы координат поместим в точку, где осевая скорость обращается в нуль. Краевые условия на оси симметрии следа имеют вид

$$u \frac{\partial u}{\partial \Psi} = Y = V = 0 \quad (\Psi = 0)$$

Решение для течения вне следа считается известным, и изменения скорости и давления на внешней границе следа при $x \rightarrow -0$ описываются выражениями (1.2) (1.3).

На основании проведенного выше анализа для решения уравнений пограничного слоя на подвижной поверхности можно показать, что в общем случае в окрестности рассматриваемой точки решение ведет себя особым образом. При этом решение во внутренней области описывается выражениями (1.13) и в основной части следа — выражениями (1.14), (1.15), если в них положить $\Psi_s = \Phi_0(x) = A_1 = G^*(x) = 0$. Это решение также не может быть непрерывно продолжено за особую точку. Если рассматриваемая точка регулярна, то решение в ее окрестности описывается выражениями (3.1), если в них положить $\Psi_s = \alpha_4^* = a_1^* = a_2^* = 0$, и его можно непрерывно продолжить в область положительных значений x .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sears W. R., Telionis D. P.* Boundary-layer separation in unsteady flow. SIAM, J. Appl. Math., 1975, vol. 28, No 1.
 2. *Williams J. C.* Incompressible boundary-layer separation In: Annual Rev. Fluid Mechanics, vol. 9. Palo Alto, California, Annual Revs. Inc., 1977.
 3. *Telionis D. P., Werle M. J.* Boundary-layer separation from downstream moving boundaries. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1973, vol. 40, No. 2.
 4. *Telionis D. P., Tsahalis D. Th., Werle M. J.* Numerical investigation of unsteady boundary-layer separation. Phys. Fluids, 1973, vol. 16, No 7.
 5. *Goldstein S.* On laminar boundary-layer flow near a position of separation. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1948, vol. 1, No 1.
 6. *Brown S. N., Stewartson K.* Laminar separation In: Annual Rev. Fluid Mechanics, vol. 1. Palo Alto, California, Annual Revs. Inc., 1969.
 7. *Сычев В. В.* О ламинарном отрыве. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 3.
 8. *Сычев В. В., Рубан А. И.* Асимптотическая теория отрыва ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости. Успехи механики, 1979, т. 2, № 4.
 9. *Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н.* Курс современного анализа, ч. 2. Л.— М., Гостехиздат, 1934.
 10. *Brown S. N.* Singularities associated with separating boundary layers. Philos. Trans. Roy. Soc. London, A, 1965, vol. 257, No 1084.
 11. *Сычев Вик. В.* Асимптотическая теория нестационарного отрыва. Изв. АН СССР, МЖГ, 1979, № 6.
-