

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ БИНАРНОЙ СМЕСИ

Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, Л. Е. Сорокин

(Пермь)

Задача об устойчивости конвективного течения бинарной смеси в плоском вертикальном слое рассматривается в той же постановке, что и в [1]. Для решения спектральной амплитудной задачи применяется как численный, так и аналитический метод. Исследование приводит к выводу, что в разных областях параметров неустойчивость обусловлена различными механизмами. В частности, показано в отличие от результатов [1], что в области термоконцентрационной дестабилизации кризис течения обусловлен длинноволновыми возмущениями.

В работе [1] численно изучалась устойчивость конвективного течения бинарной смеси без учета термодиффузии при наличии продольной потенциально устойчивой стратификации. Обнаружено существенное понижение устойчивости течения в области конечных значений параметра стратификации, обусловленное термоконцентрационным механизмом; однако количественные данные о дестабилизации течения, как будет показано ниже, являются ошибочными. Возникающие в результате термоконцентрационной неустойчивости слоистые конвективные течения смеси исследовались в ряде работ (см. обзор [2]). Термоконцентрационный механизм неустойчивости конвективной фильтрации смеси в пористой среде изучен в [3]. Устойчивость течения в вертикальном слое при наличии наряду с поперечным перепадом температуры также и разности концентрации на границах обсуждалась в [4].

1. Постановка задачи. Плоский вертикальный слой бинарной смеси ограничен твердыми параллельными непроницаемыми для вещества плоскостями $x = \pm h$, на которых поддерживаются постоянные разные температуры $\pm \Theta$. В жидкости задан вертикальный градиент концентрации, соответствующий потенциально устойчивой стратификации. При таких условиях механическое равновесие невозможно и происходит течение. Для описания течения применим уравнения конвекции смеси в приближении Буссинеска; термодиффузия и диффузионная теплопроводность не учитываются. Введем безразмерные переменные на основе единиц расстояния h , времени h^2 / ν , скорости $g\beta_1\Theta h^2 / \nu$, температуры Θ , концентрации $\beta_1\Theta / \beta_2$ и давления $\rho_0 g\beta_1\Theta h$. Имеем уравнения, условия на границах слоя, условия замкнутости потока и постоянства среднего вертикального градиента концентрации в безразмерной форме

$$(1.1) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + G(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + (T + C)\boldsymbol{\gamma}, \quad \nabla \mathbf{v} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + G(\mathbf{v}\nabla T) = \frac{1}{P} \Delta T, \quad \frac{\partial C}{\partial t} + G(\mathbf{v}\nabla C) = \frac{1}{P_d} \Delta C$$

$$(1.2) \quad x = \pm 1, \quad v = 0, \quad T = \pm 1, \quad \partial C / \partial x = 0$$

$$\int_{-1}^1 v_z dx = 0, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \frac{\partial C}{\partial z} dz = \frac{R_d}{GP_d}$$

$$G = \frac{g\beta_1 \theta h^3}{\nu^2}, \quad R_d = \frac{g\beta_2 B h^4}{\nu D}, \quad P = \frac{\nu}{\chi}, \quad P_d = \frac{\nu}{D}$$

Здесь p — конвективная добавка к гидростатическому давлению, C — концентрация легкой компоненты и T — температура, отсчитываемые от некоторых значений, β_1 и β_2 — температурный и концентрационный коэффициенты плотности, γ — единичный вектор по вертикали вверх (вдоль оси z), остальные обозначения обычные.

Задача (1.1), (1.2) содержит четыре безразмерных параметра: число Грасгофа G , определенное по поперечной разности температур, концентрационное число Рэлея R_d , определенное по продольному градиенту концентрации B , а также обычное и диффузионное числа Прандтля P и P_d .

Сформулированная задача имеет стационарное решение, описывающее плоскопараллельное течение в достаточно длинном слое. Соответствующие распределения скорости, температуры и концентрации таковы:

$$(1.3) \quad v_0 = \frac{1}{2N\mu^3} \left(\frac{\text{sh } \mu x \cos \mu x}{\text{sh } \mu \cos \mu} - \frac{\text{ch } \mu x \sin \mu x}{\text{ch } \mu \sin \mu} \right), \quad T_0 = x$$

$$C_0 = \frac{R_d}{GP_d} z - x + \frac{1}{N\mu} \left(\frac{\text{sh } \mu x \cos \mu x}{\text{ch } \mu \sin \mu} + \frac{\text{ch } \mu x \sin \mu x}{\text{sh } \mu \cos \mu} \right)$$

$$N = \text{tg } \mu + \text{ctg } \mu - \text{th } \mu + \text{cth } \mu; \quad \mu = \left(\frac{R_d}{4} \right)^{1/4}$$

Для исследования линейной устойчивости стационарного течения (1.3) рассмотрим малые плоские нормальные возмущения (ψ' — функции тока возмущения поля скорости)

$$(1.4) \quad (\psi', T', C') = (\varphi, \theta, \xi) \exp(-\lambda t + ikz)$$

Здесь $\varphi(x)$, $\theta(x)$, $\xi(x)$ — амплитуды, k — волновое число, $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ — декремент возмущений. Линеаризация уравнений (1.1) около стационарного решения (1.3) приводит к системе амплитудных уравнений с однородными граничными условиями (далее штрих означает дифференцирование по поперечной координате x)

$$(1.5) \quad -\lambda(\varphi'' - k^2\varphi) + ikG[v_0(\varphi'' - k^2\varphi) - v_0''\varphi] =$$

$$= (\varphi^{IV} - 2k^2\varphi'' + k^4\varphi) + \theta' + \xi'$$

$$-\lambda\theta + ikG(v_0\theta - T_0'\varphi) = \frac{1}{P}(\theta'' - k^2\theta)$$

$$-\lambda\xi + ikG(v_0\xi - C_0'\varphi) + \frac{R_d}{P_d}\varphi' = \frac{1}{P_d}(\xi'' - k^2\xi)$$

$$(1.6) \quad x = \pm 1, \quad \varphi = \varphi' = 0, \quad \theta = 0, \quad \xi' = 0$$

Спектральная амплитудная задача (1.5), (1.6) определяет собственные числа — характеристические декременты λ , зависящие от всех пара-

метров — G, R_d, P, P_d, k , а также соответствующие собственные функции — амплитуды возмущений. Граница устойчивости для возмущений монотонного типа, характеризуемых вещественными λ , находится из условия $\lambda = 0$, а нейтральный режим колебательных возмущений — из условия $\lambda_r = 0$.

2. Длинноволновые возмущения. По аналогии с результатами исследования устойчивости конвективной фильтрации смеси в вертикальном пористом слое [3], можно ожидать, что в интересном диапазоне изменения параметров наиболее опасными являются длинноволновые возмущения с $k \rightarrow 0$. Для решения краевой задачи (1.5), (1.6) в этом предельном случае воспользуемся методом малого параметра.

Полагая в (1.5) $k = 0$, получим уравнения

$$(2.1) \quad -\lambda \varphi'' = \varphi^{IV} + \theta' + \xi', \quad -\lambda P \theta = \theta'', \quad -\lambda P_d \xi + R_d \varphi' = \xi''$$

с граничными условиями (1.6). Все определяемые этой краевой задачей возмущения затухают; исключение] составляет единственный (концентрационного типа) уровень в спектре, который является нейтральным

$$(2.2) \quad \lambda = 0, \quad \varphi = \theta = 0, \quad \xi = \text{const}$$

(далее принимается нормировка, при которой $\text{const} = 1$). Возмущение, соответствующее этому уровню, будучи нейтральным при $k = 0$, может оказаться (и действительно оказывается) нарастающим при малых k в определенной области параметров. Для исследования устойчивости по отношению к этому длинноволновому возмущению представим решение в виде разложения по степеням малого параметра k

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 k + \varphi_2 k^2 + \dots, & \theta &= \theta_1 k + \theta_2 k^2 + \dots \\ \xi &= 1 + \xi_1 k + \xi_2 k^2 + \dots; & \lambda &= \lambda_1 k + \lambda_2 k^2 + \dots \end{aligned}$$

В первом по k порядке имеем систему уравнений

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \varphi_1^{IV} + \theta_1' + \xi_1' &= 0, & \theta_1'' &= 0 \\ \xi_1'' - R_d \varphi_1' &= -\lambda_1 P_d + i G P_d \nu_0 \end{aligned}$$

(граничные условия во всех порядках совпадают с (1.6) и далее не выписываются). Условие разрешимости неоднородной системы (2.4) дает $\lambda_1 = 0$; решение имеет вид

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{i G P_d}{32 N \mu^7} (A_0 + A_1 \operatorname{ch} \mu x \cos \mu x + A_2 \operatorname{sh} \mu x \sin \mu x + \\ &+ \frac{x \operatorname{sh} \mu x \cos \mu x}{\operatorname{sh} \mu \cos \mu} - \frac{x \operatorname{ch} \mu x \sin \mu x}{\operatorname{ch} \mu \sin \mu}) \equiv i G P_d \bar{\varphi}_1 \\ \xi_1 &= \frac{i G P_d}{16 N \mu^5} (B_1 \operatorname{ch} \mu x \sin \mu x + B_2 \operatorname{sh} \mu x \cos \mu x + \\ &+ B_3 x \operatorname{sh} \mu x \sin \mu x + B_4 x \operatorname{ch} \mu x \cos \mu x) \equiv i G P_d \bar{\xi}_1 \\ \theta_1 &= 0 \\ A_0 &= \frac{2N}{\mu}, \quad A_1 = -\frac{2 \operatorname{sh} \mu \sin \mu}{\operatorname{sh} 2\mu + \sin 2\mu} \left[N_1 + \frac{2N}{\mu} (\operatorname{cth} \mu + \operatorname{ctg} \mu) \right] \end{aligned}$$

$$A_2 = \frac{2\operatorname{ch} \mu \cos \mu}{\operatorname{sh} 2\mu + \sin 2\mu} \left[N_1 + \frac{2N}{\mu} (\operatorname{th} \mu - \operatorname{tg} \mu) \right]$$

$$B_1 = \mu (A_1 + A_2) + \frac{3}{\operatorname{sh} \mu \cos \mu}, \quad B_2 = \mu (A_1 - A_2) + \frac{3}{\operatorname{ch} \mu \sin \mu}$$

$$B_3 = \mu \left(\frac{1}{\operatorname{sh} \mu \cos \mu} - \frac{1}{\operatorname{ch} \mu \sin \mu} \right), \quad B_4 = \mu \left(\frac{1}{\operatorname{sh} \mu \cos \mu} + \frac{1}{\operatorname{ch} \mu \sin \mu} \right)$$

$$N_1 = \operatorname{tg} \mu + \operatorname{ctg} \mu + \operatorname{th} \mu - \operatorname{cth} \mu$$

Для амплитуд второго порядка получаем систему

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \varphi_2^{IV} + \theta_2' + \xi_2' &= iG (\nu_0 \varphi_1'' - \nu_0'' \varphi_1) \\ \theta_2'' &= -iG P T_0' \varphi_1 \\ \xi_2'' - R_d \varphi_2' &= 1 + iG (\nu_0 \xi_1 - C_0' \varphi_1) - \lambda_2 \end{aligned}$$

Условие разрешимости состоит в обращении в нуль интеграла от правой части последнего из уравнений. Отсюда определяется первый не исчезающий член в разложении декремента

$$(2.7) \quad \lambda = \lambda_2 k^2 + \dots, \quad \lambda_2 = \frac{1}{P_d} \left(1 - \frac{G^2}{G_c^2} \right)$$

$$(2.8) \quad G_c = \frac{F(\mu)}{P_d}, \quad F(\mu) = \left[\int_0^1 (\nu_0 \bar{\xi}_1 - C_0' \bar{\varphi}_1) dx \right]^{-1/2}$$

Из (2.7) видно, что в области $G < G_c$ декремент λ положителен при $k \neq 0$, т. е. длинноволновые возмущения затухают. В области $G > G_c$ декремент отрицателен при малых k , т. е. имеет место длинноволновая неустойчивость. Определяемое формулой (2.8) значение G_c дает границу устойчивости относительно длинноволновых возмущений. Критическим параметром служит произведение $G_c P_d$, зависящее от параметра продольной стратификации $\mu = (R_d/4)^{1/4}$. Функция $F(\mu)$ выражается громоздкой формулой, которая здесь не приводится. График $F(\mu)$ представлен на фиг. 1. Обсуждаемая мода неустойчивости существует в области правее асимптоты $\mu > \mu_* = 1.673$, соответственно $R_d > R_{d*} = 31.3$. Минимальная устойчивость потока отвечает параметру стратификации $\mu_m = 1.989$, т. е. $R_{dm} = 62.6$; критическое число Грасгофа при этом $G_c = 196.12 / P_d$.

3. Численные результаты. При произвольных конечных значениях волнового числа k краевая задача (1.5), (1.6) решалась численно.]

Использовались три метода — Галеркина, Рунге—Кутта с пошаговой ортогонализацией и дифференциальной прогонки. В методе Галеркина для аппроксимации амплитуд возмущений функции тока и температуры использовались те же базисы, что и при решении задач устойчивости течений однородной жидкости (см. [5]); эти базисы отвечают возмущениям в неподвижной жидкости. В качестве базиса для аппроксимации амплитуд возмущений концентрации применялись определенным образом нормированные собственные функции краевой задачи

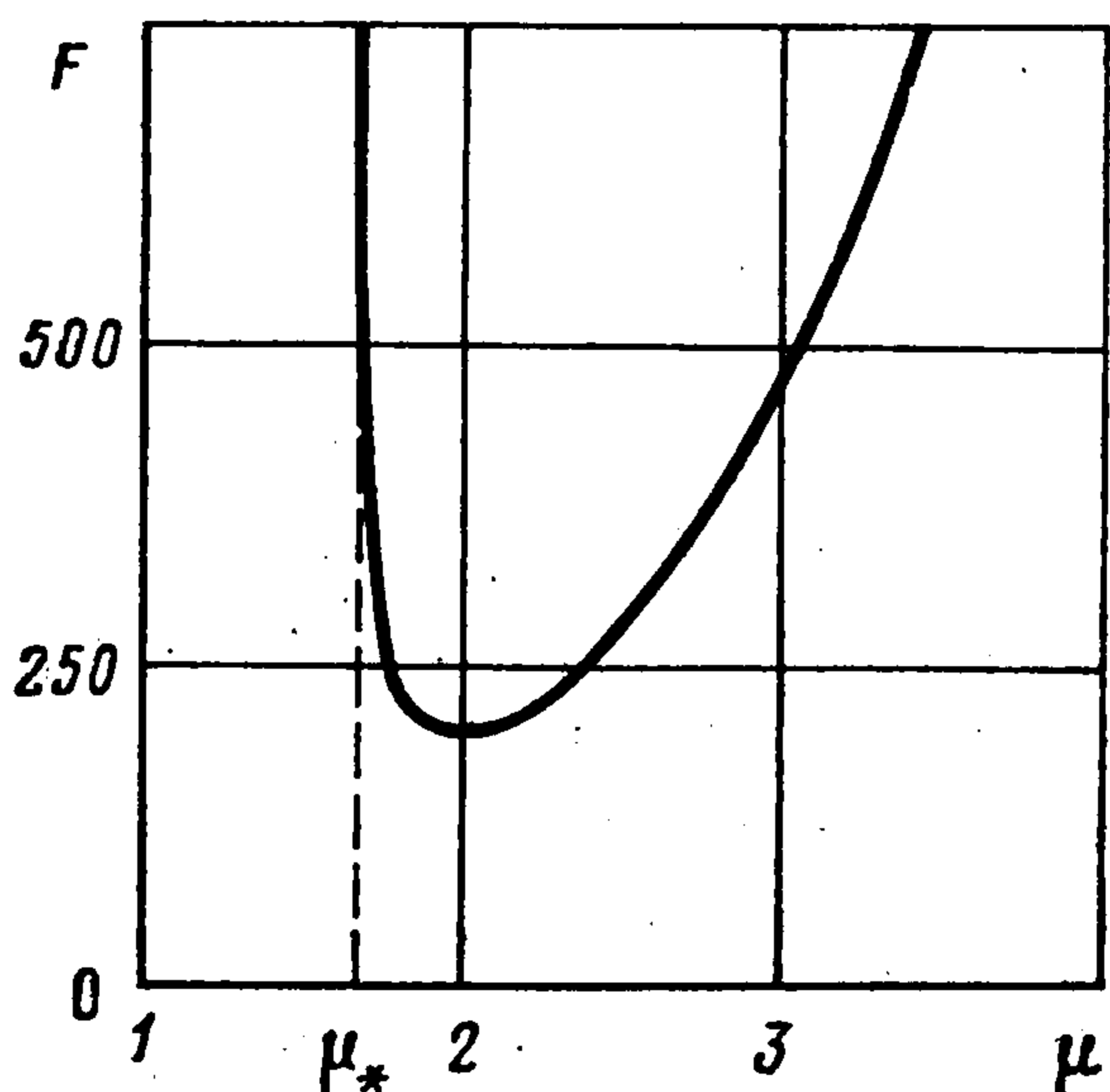
$$\xi'' - k^2 \xi = -\lambda P_d \xi, \quad \xi'(\pm 1) = 0$$

Удерживаемое в разложениях φ , θ и ξ_1 число базисных функций определялось из требования внутренней сходимости метода и зависело от значений параметров задачи. Численное интегрирование по методу Рунге—Кутта—Мерсона с ортогонализацией проводилось по схеме, описанной применительно к задачам устойчивости

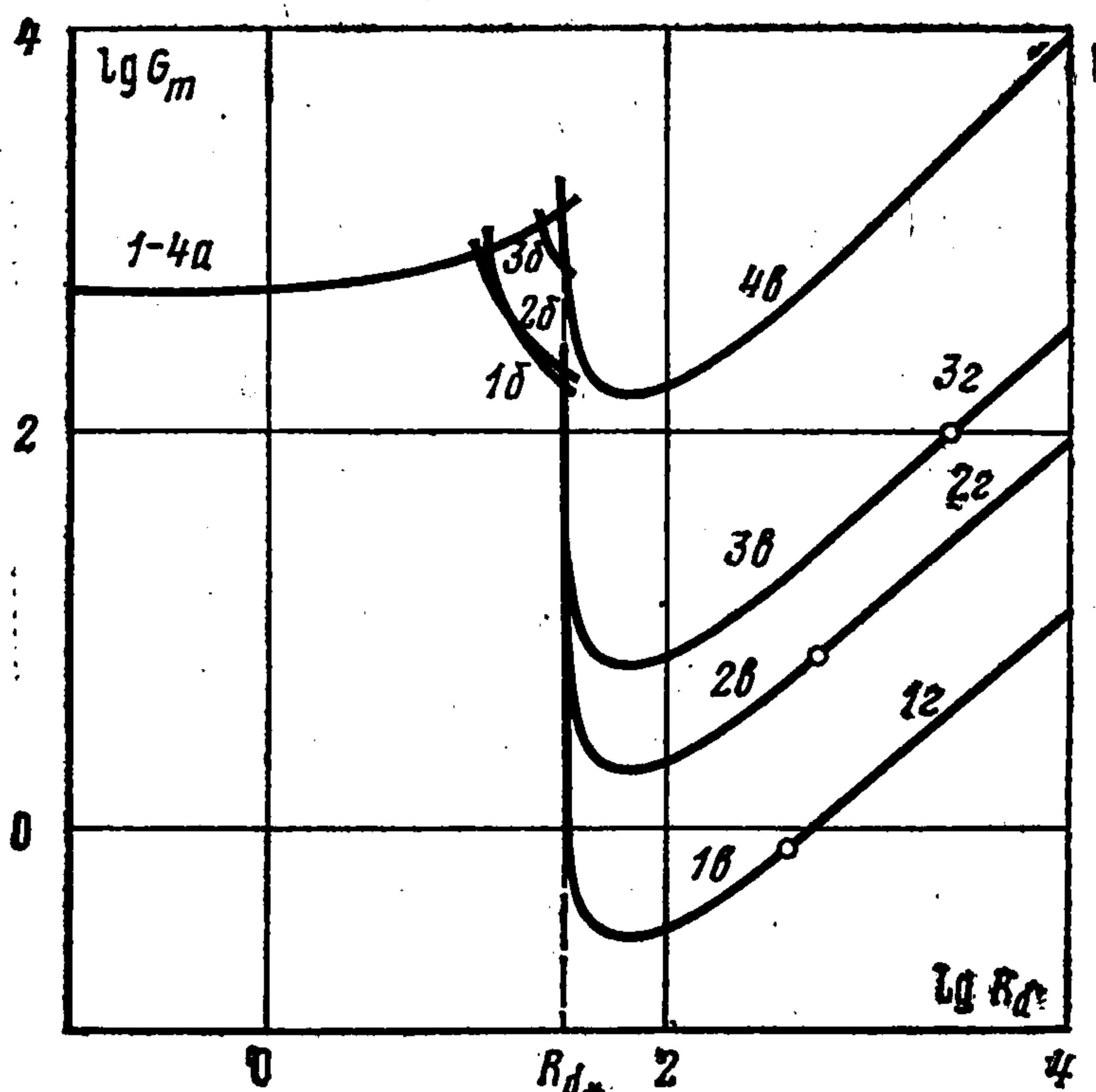
конвективных течений в [6]. Проводилось также численное интегрирование амплитудных уравнений методом дифференциальной прогонки [7].

В результате решения определялся спектр собственных значений λ , а также граница устойчивости и параметры критических возмущений. Метод Галеркина применялся главным образом для получения общего обзора спектра декрементов; определение границ устойчивости и параметров критических возмущений проводилось преимущественно двумя названными методами численного интегрирования. В обследованной области параметров все применявшиеся методы давали совпадающие результаты.

Некоторые результаты расчетов приведены на фиг. 2—5. Фигура 2 дает зависимость минимального (по k) критического числа Грасгофа G_m от характеризующего продольную стратификацию концентрационного



Фиг. 1



[Фиг. 2

числа Рэлея R_d при фиксированных значениях P и P_d (кривые соответствуют комбинациям параметров 1 — $P = 6.7$, $P_d = 676.7$; 2 — $P = 6.7$, $P_d = 100$; 3 — $P = 6.7$, $P_d = 30$; 4 — $P = 0.7$, $P_d = 1.3$).

В разных областях изменения основного параметра R_d течение обнаруживает неустойчивость, обусловленную различными механизмами. Обсудим, для примера, границу устойчивости при значениях $P = 6.7$, $P_d = 676.7$ (типичный пример жидкой бинарной смеси — водного раствора соли). При малых значениях R_d ($0 < R_d < 13$, кривая 1a), как и в однородной жидкости ($R_d = 0$), неустойчивость имеет чисто гидродинамическую природу и связана с образованием стационарных вихрей на границе встречных потоков. Увеличение вертикального градиента концентрации в этой области оказывает некоторое стабилизирующее действие. Вследствие гидродинамической природы кризиса граница устойчивости в этой области слабо зависит от P и P_d (участки кривых 1a — 4a с точностью графика совпадают).

В области $13 < R_d < 30$ (кривая 1b) наиболее опасна волновая мода. Эта мода связана с нарастающими колебательными возмущениями концен-

трационного типа, причем имеются две равноправные с точки зрения устойчивости волны, распространяющиеся в восходящем и нисходящем конвективных потоках.

При $R_d > R_{d*} \approx 30$ неустойчивость имеет термоконцентрационную природу и существенно обусловлена наличием вертикальной стратификации смеси. В области $R_{d*} < R_d < R_{d0}$ (для обсуждаемых значений параметров $R_{d0} = 399$) эта неустойчивость связана со стационарными длинноволновыми возмущениями ($k = 0$; участок кривой 1ϵ), которые наиболее опасны. Для всех P и P_d численные значения критического числа Грасгофа длинноволновой неустойчивости полностью совпадают с результатами асимптотического рассмотрения в п. 2, формула (2.8). Как видно из результатов, термоконцентрационная мода приводит в этой области к существенной дестабилизации течения. Дестабилизация особенно сильно выражена при больших P_d (жидкие растворы); так, на кривой 1 критическое число Грасгофа на три порядка ниже, чем в области действия гидродинамического механизма неустойчивости.

При $R_d > R_{d0}$, где R_{d0} зависит от P и P_d , сохраняется термоконцентрационная природа неустойчивости, однако наиболее опасными теперь становятся возмущения с $k \neq 0$ (ячеистая структура возмущений). Граница устойчивости в этой области повышается с ростом R_d (пример — кривая 1ζ ; точки на кривых $1-3$ отмечают границы областей длинноволновой и ячеистой неустойчивости). При больших R_d основное течение (1.3) приобретает структуру разомкнутых пограничных слоев возле стенок и практически неподвижного ядра. Существующие в ядре горизонтальные градиенты температуры и концентрации приводят к компенсации соответствующих градиентов плотности. Таким образом, при больших R_d задача устойчивости течения переходит в задачу устойчивости равновесия вертикального слоя смеси с продольной стратификацией.

Рассмотрение этой задачи в работе [8] показало, что неустойчивость [связана с развитием коротковолновой конвекции в виде слоистых течений, причем граница устойчивости и критическое волновое число k_m зависят от R_d

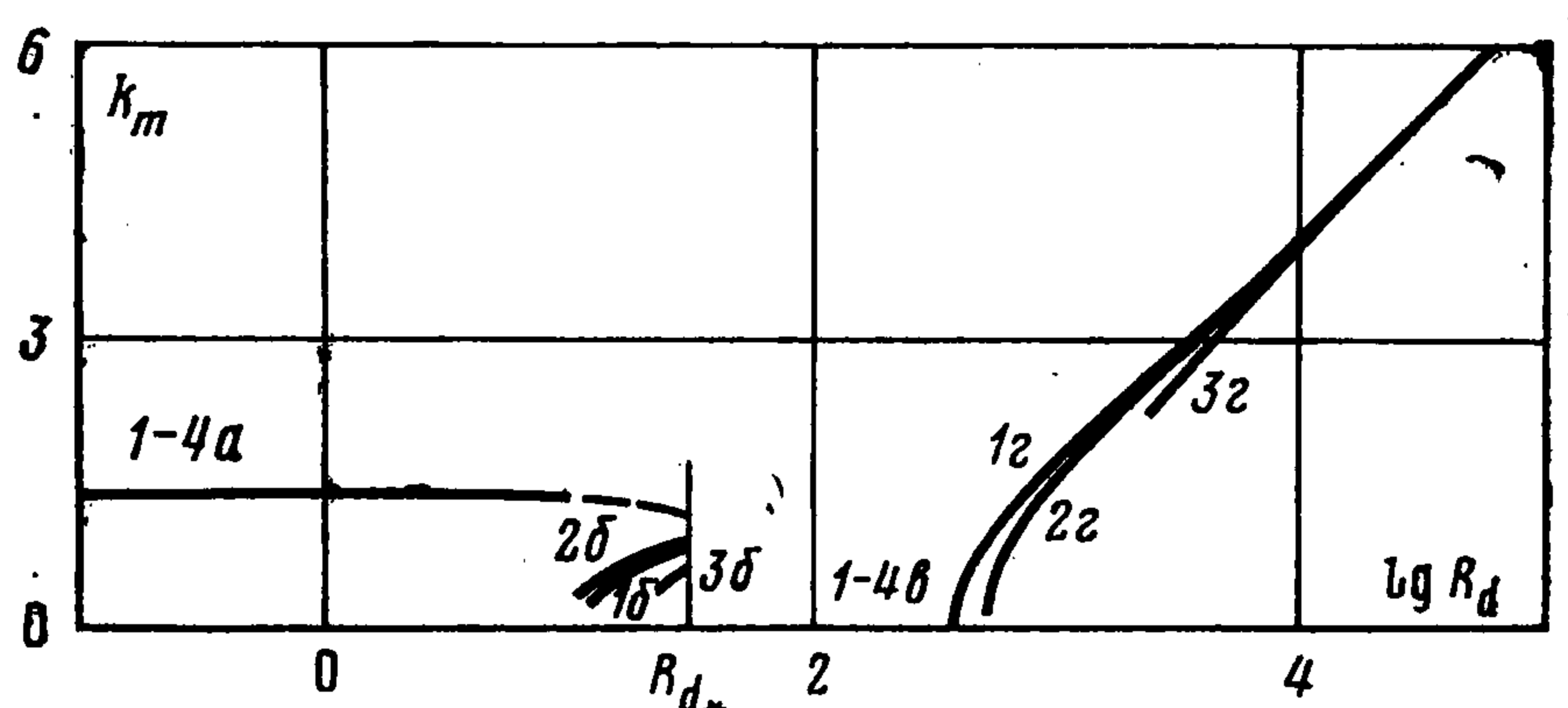
$$G_m = \frac{3.72R_d^{5/6}}{|P_d - P|}, \quad k_m = 1.03R_d^{1/6}$$

Данные расчетов в области больших R_d хорошо согласуются с этими формулами.

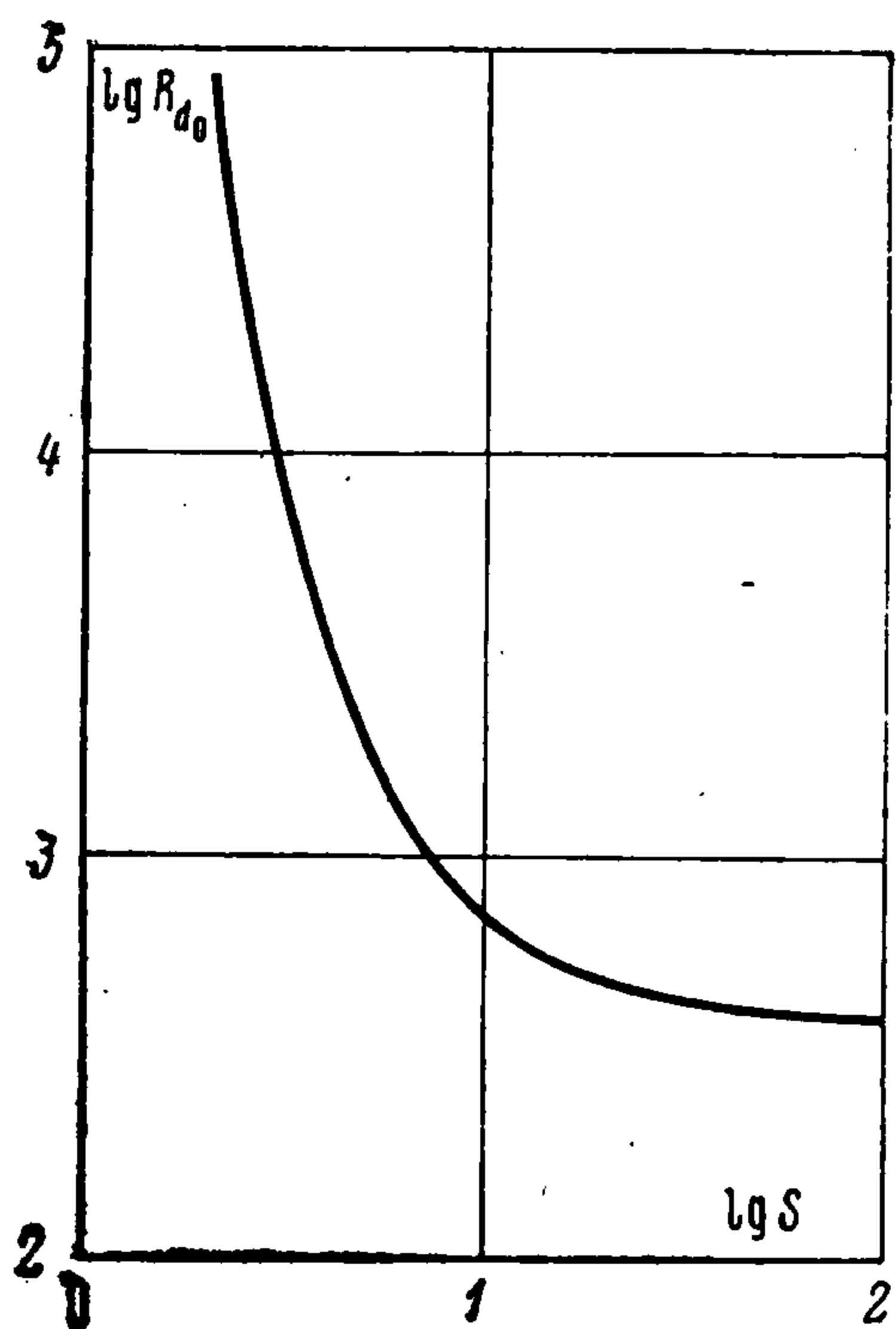
На фиг. 3 представлены зависимости от R_d критических волновых чисел k_m наиболее опасных возмущений. Кривые $1-4$ соответствуют тем же значениям параметров P и P_d , что и на фиг. 2. Индексы $a, b, в$ и $г$ отмечают уже названные четыре области неустойчивости — гидродинамическую, концентрационно-волновую, длинноволновую и ячеистую термоконцентрационные.

Значение R_{d0} , при котором наступает переход от длинноволновой ($k_m = 0$) к ячеистой ($k_m \neq 0$) форме неустойчивости, в обследованной области параметров P и P_d , как показывают расчеты, определяется отношением $P_d / P = \chi / D = S$. Зависимость R_{d0} от S представлена на

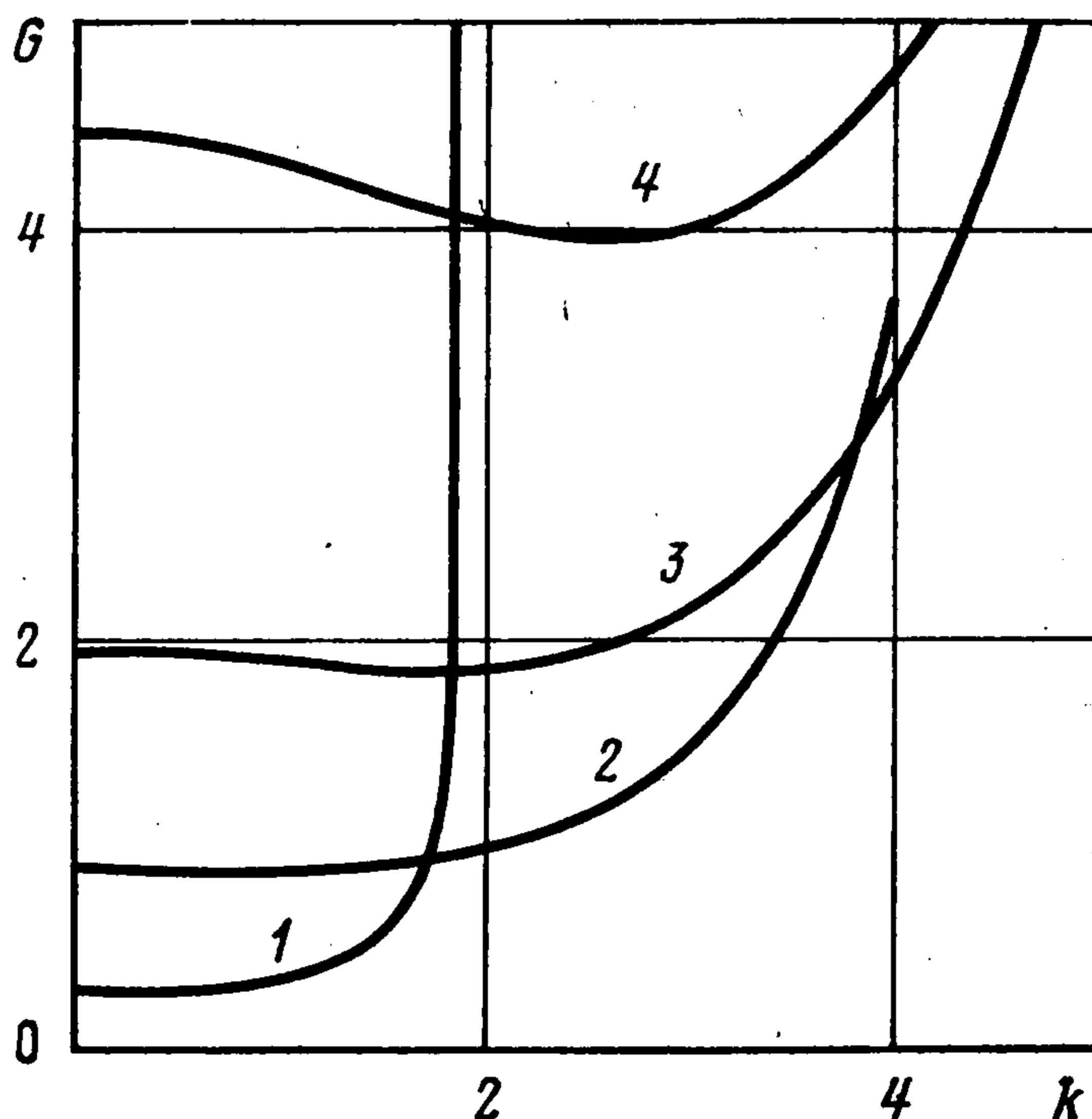
фиг. 4. Согласно этой зависимости, в частности, для значений $P = 0.7$ и $P_d = 1.3$ (пример газовой смеси) соответствующая кривая устойчивости 4 на фиг. 2 во всей области $R_d > R_{d*}$ определяется длинноволновыми возмущениями.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 5 приведен пример семейства нейтральных кривых термоконцентрационной неустойчивости для $P = 6.7$, $P_d = 676.7$ и разных R_d (1 — $R_d = 64$, 2 — $R_d = 419.4$, 3 — $R_d = 1024$, 4 — $R_d = 2500$). Это семейство демонстрирует переход от длинноволновой к ячейистой форме возмущений по мере увеличения R_d .

Как уже указывалось выше, рассмотренная задача решалась в работе [1]. Для численного определения границ устойчивости применялся метод Галеркина с базисом, отличным от использованного в данной работе. Определена граница устойчивости для $P = 6.7$, $P_d = 676.7$. Поведение границ устойчивости при малых и больших R_d согласуется с данными, приведенными на фиг. 2. В работе [1] установлено также понижение устойчивости термоконцентрационного происхождения. Однако результаты, относящиеся к этой наиболее интересной области, представляются ошибочными. Прежде всего следует отметить, что в [1] не обнаружена длинноволновая мода термоконцентрационной неустойчивости; дестабилизация при конечных R_d , согласно [1], связана с ячейистыми возмущениями. Имеются также значительные количественные расхождения в области минимума кривой $G_m(R_d)$. Так, при указанных P и P_d , сог

ласно [1], наименьшее значение $G_m = 2.1$ и достигается при $R_d = 333$, тогда как по формуле (2.8) и численным результатам фиг. 2 (кривая 1e) имеем $G_m = 0.29$ при $R_d = 62.6$. Заметим, что в [1] не обнаружена и концентрационно-волновая мода неустойчивости.

Поступила 11 XI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Hart J. E. On sideways diffusive instability. J. Fluid Mech., 1971, vol. 49, pt 2.
2. Turner J. S. Double-diffusive phenomena. Annual. Rev. Fluid Mech., vol. 6, Palo Alto, Calif., Ann. Revs Inc., 1974.
3. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Любимов Д. В. Об устойчивости стационарной конвективной фильтрации смеси в вертикальном пористом слое. Изв. АН СССР, МЖГ, 1980, № 1.
4. Bayazitoglu Y., Bayazitoglu Y. O. The stability of conduction regime of combined buoyancy mode driven flow in a slot. Lett. Appl. and Eng. Sci., 1977, vol. 5, No. 4.
5. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
6. Бирих Р. В.; Рудаков Р. Н. Применение метода ортогонализации в пошаговом интегрировании при исследовании устойчивости конвективных течений. В сб.: Гидродинамика, вып. 5. Уч. зап. Пермск. ун-та, 1974, № 316.
7. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск, «Наука», 1977.
8. Thorpe S. A., Hutt P. K., Soulsby R. The effect of horizontal gradients on thermohaline convection. J. Fluid Mech., 1969, vol. 38, pt 2.