Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 5, 1980

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕАВТОНОМНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ ПРИ РЕЗОНАНСЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. П. Иванов, А. Г. Сокольский

(Москва)

В нелинейной постановке рассматривается задача об устойчивости положения равновесия неавтономной 2π-периодической гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае, когда мультипликаторы линеаризованной системы равны и соответствуют параметрическому резонансу комбинационного типа. Изучены случаи простых и непростых элементарных делителей характеристической матрицы линейной системы. В зависимости от коэффициентов функции Гамильтона доказывается устойчивость в конечном приближении, формальная устойчивость или неустойчивость положения равновесия. Приводятся расчетные формулы.

1. Рассмотрим неавтономную гамильтонову систему с двумя степенями свободы

$$\frac{dq_k}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_k},\quad \frac{dp_k}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_k}\quad (k=1,2) \tag{1.1}$$

Пусть функция Гамильтона $H=H(q_k, p_k, t)$ непрерывна и 2π-периодична по t, а в окрестности начала координат фазового пространства q_k, p_k, являющегося изолированным положением равновесия системы (1.1), аналитична по q_k, p_k и, следовательно, представима рядом Тейлора

$$H=H_2+\ldots+H_m+\ldots \tag{1.2}$$

$$H_m=\sum_{\nu_1+\nu_2+\mu_1+\mu_2=m} h_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t)\, q_1^{\nu_1}q_2^{\nu_2}p_1^{\mu_1}p_2^{\mu_2}$$

$$h_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t+2\pi)=h_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t)$$

Запишем линеаризованную систему уравнений с гамильтонианом H_2

$$d\mathbf{x}/dt=\mathbf{J}\mathbf{h}(t)\,\mathbf{x},\quad \mathbf{x}=(q_1, q_2, p_1, p_2)^T \tag{1.3}$$

$$\mathbf{J}=\begin{Vmatrix} \mathbf{O}_2 & \mathbf{E}_2 \\ -\mathbf{E}_2 & \mathbf{O}_2\end{Vmatrix},\quad \mathbf{h}(t)=\begin{Vmatrix}\frac{\partial^2 H_2}{\partial \mathbf{x}^2}\end{Vmatrix},\quad \mathbf{h}(t+2\pi)=\mathbf{h}(t)$$

где $\mathbf{O}_2$, $\mathbf{E}_2$ — нулевая и единичная матрицы соответствующих порядков. Обозначим через $\mathbf{X}(t)$ фундаментальную матрицу решений системы уравнений (1.3), удовлетворяющую начальным условиям $\mathbf{X}(0)=\mathbf{E}_4$. Как известно [1-3], характеристическое уравнение системы (1.3) $\det\|\mathbf{X}(2\pi)-\rho E_4\|=0$ является возвратным (a_1 — след матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$, a_2 — сумма всех ее главных миноров второго порядка).

$$\rho^4-a_1\rho^3+a_2\rho^2-a_1\rho+1=0 \tag{1.4}$$

и вместе с корнем ρ уравнение (1.4) имеет корень $1 / \rho$. Следовательно [1-3], для устойчивости систем (1.3) и (1.1) необходимо, чтобы $|\rho_j| = 1$ ($j = 1, \ldots, 4$). Будем в дальнейшем считать эти условия выполненными. Если среди корней уравнения (1.4) нет кратных, то система (1.3) устойчива, но из этого еще не следует устойчивость системы (1.1).

Вопрос об устойчивости полной системы в этом случае неравных мультипликаторов ρ_j решен в ряде работ (см. [3]). В зависимости от коэффициента форм $H_2, H_3, H_4, \ldots$ получены утверждения о неустойчивости по Ляпунову или о формальной устойчивости (нерассмотренными остались лишь случаи одновременного выполнения нескольких резонансных соотношений). Случай равных мультипликаторов с теоретической точки зрения интересен тем, что даже при неустойчивости линеаризованной системы (1.3) полная система (1.1) может быть устойчива. В большинстве прикладных задач случай кратных мультипликаторов соответствует границам области устойчивости линейной системы и, таким образом, изучаемая здесь задача тесно связана с вопросом о «безопасности» границ области устойчивости в пространстве параметров [4].

Отметим еще связь рассматриваемой задачи с аналогичной задачей для автономных систем. Пронумеруем корни уравнения (1.4) таким образом, что $\operatorname{Im}\rho_k \geqslant 0$, $\rho_{k+2} = \bar\rho_k$ (черта означает комплексное сопряжение, а необходимое условие устойчивости $|\rho_j| = 1$ выполнено). Наложенное на мультипликаторы условие $|\rho_j| = 1$ эквивалентно тому, что все характеристические показатели $\pm i\lambda_k$ ($\rho_k = \exp(2\pi i\lambda_k)$) — чисто мнимые. Тогда мультипликаторы неавтономной системы могут быть равны только в одном из трех случаев: а) $\lambda_1 = \pm\lambda_2 \pmod 1$ при $\rho_1 = \rho_2 \neq \pm 1$; б) $2\lambda_1 \neq 0$, $2\lambda_2 = 0 \pmod 1$ при $\rho_1 \neq \pm 1$, $\rho_2 = \bar\rho_2 = \pm 1$; в) $2\lambda_1 = 0$, $2\lambda_2 = 0 \pmod 1$ при $\rho_1 = \bar\rho_1 \pm 1$, $\rho_2 = \bar\rho_2 = \pm 1$. Для автономных систем, в которых величины λ_1, λ_2 играют роль частот линейной системы, случай а) соответствует случаю равных частот (резонанс второго порядка) [5-7], случай б) — случаю нулевой частоты (резонанс первого порядка) [8], а случай в) — случаю двух нулевых частот (двойной резонанс первого порядка).

Цель данной работы — решение задачи об устойчивости тривиального положения равновесия системы (1.1) в случае, когда мультипликаторы системы (1.3) равны, а характеристические показатели удовлетворяют соотношению $\lambda_1 = \pm \lambda_2 \pmod 1$. Это означает, что в принятых обозначениях $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, а $\rho \neq \pm 1$, т. е. коэффициенты уравнения (1.4) удовлетворяют соотношению $a_2 = 2 + a_1^2 / 4$ ($a_1 \neq \pm 4$), а числа λ_1, λ_2 определяются по ним формулами

$$\lambda_1 = \pm \frac{1}{2\pi} \arccos \frac{a_1}{4} + k_1, \quad \lambda_2 = \pm \frac{1}{2\pi} \arccos \frac{a_1}{4} + k_2$$
$$(a_1 = 4 \operatorname{Re} \rho)$$

где k_1, k_2 — произвольные целые числа. Как будет видно из дальнейшего, ответ на вопрос об устойчивости не зависит от чисел k_1, k_2. Поэтому можно считать $\lambda_1 = \delta\lambda_2 = \lambda$, где $0 < \lambda < 1$, $\lambda \neq 1/2$, $\delta = \pm 1$.

Рассматриваемый случай в конкретных механических задачах соответствует границе области параметрического резонанса комбинационного типа [2].

2. Как и для автономных систем, в зависимости от элементов матрицы $X(2\pi)$ в рассматриваемой задаче необходимо раздельно исследовать случаи простых и непростых элементарных делителей характеристической матрицы линеаризованной системы. Рассмотрим сначала случай непро-

стых элементарных делителей. Отметим, что для приложений этот случай более важен, чем рассмотренный в п. 3 случай простых элементарных делителей, так как для осуществления последнего помимо выполнения условий резонансности необходимо еще выполнение некоторых условий (типа равенств), наложенных на элементы матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$.

Нормализуем линейную систему (1.3). Согласно теореме Ляпунова о приводимости [1], система (1.3) может быть посредством невырожденной линейной замены приведена к системе с постоянными коэффициентами. Решению задачи нормализации линейных канонических систем посвящено много работ (см. библиографию в [2, 3]). Ниже описывается конструктивный способ приведения системы (1.3) к нормальной форме, аналогичный способу, предложенному А. П. Маркеевым [3] для случая неравных мультипликаторов.

Теорема 2.1. Существует непрерывно дифференцируемая и 2π-периодическая по t вещественная, симплектическая матрица $\mathbf{N}(t)$, такая, что замена

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}(t)\mathbf{x}' \quad (\mathbf{x}' = (q_1', q_2', p_1', p_2')^T) \tag{2.1}$$

приводит квадратичную часть H_2 гамильтониана системы (1.1) к нормальной форме ($\delta = \pm 1$)

$$H_2' = {}^1/_2\delta\,(q_1'^2 + q_2'^2) + \lambda\,(q_1'p_2' - q_2'p_1') \tag{2.2}$$

совпадающей с нормальной формой автономной задачи [5, 6].

Докажем теорему, построив матрицу $\mathbf{N}(t)$. Будем ее искать в виде [3]

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{A}e^{-\mathbf{B}t}\mathbf{C} \tag{2.3}$$

где

$$\mathbf{B} = \begin{Vmatrix} i\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -i\lambda \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -\delta & -i\delta \\ 1 & i & 0 & 0 \\ \delta & -i\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{Vmatrix} \tag{2.4}$$

а постоянную матрицу $\mathbf{A}$ подберем так, чтобы преобразование (2.1) было вещественным (т. е. $\mathbf{N}(t) = \overline{\mathbf{N}}(t)$), унивалентным, каноническим и 2π-периодическим по t. Заметим, что независимо от вида неособенной матрицы $\mathbf{A}$ преобразование (2.1) приводит систему (1.3) к виду

$$\frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \mathbf{J}\mathbf{h}'\mathbf{x}', \quad \mathbf{h}' = \left\| \frac{\partial^2 H_2'}{\partial \mathbf{x}'^2} \right\|$$

Так как матрицы $\mathbf{X}(t)$, $e^{-\mathbf{B}t}$, $\mathbf{C}$ — симплектические, то для каноничности и унивалентности преобразования (2.1) матрица $\mathbf{A}$ также должна быть симплектической, т. е.

$$\mathbf{A}^T\mathbf{J}\mathbf{A} = \mathbf{J} \tag{2.5}$$

Из требования 2π-периодичности матрицы $\mathbf{N}(t)$ вытекает условие

$$\mathbf{X}(2\pi)\mathbf{A} = \mathbf{A}e^{2\pi\mathbf{B}}, \quad e^{2\pi\mathbf{B}} = \begin{Vmatrix} \rho & 2\pi\rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar\rho & 0 \\ 0 & 0 & -2\pi\bar\rho & \bar\rho \end{Vmatrix} \tag{2.6}$$

Следовательно, в рассматриваемом случае непростых элементарных делителей матрица $e^{2\pi\mathbf{B}}$ — жорданова симплектическая нормальная форма матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$, а столбцами матрицы $\mathbf{A}$, приводящей $\mathbf{X}(2\pi)$ к нормальной форме, служат собственные и присоединенные векторы матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$, нормированные условием (2.5). Поэтому положим $\mathbf{A} = \mathbf{LD}$, где неособенная матрица $\mathbf{L}$ — какое-нибудь решение уравнений (2.6), а матрицей $\mathbf{D}$ распорядимся для удовлетворения условия (2.5) нормировки собственных и присоединенных векторов. Пусть столбцы $\mathbf{l}_j$ матрицы $\mathbf{L}$ удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{X}(2\pi)\mathbf{l}_1 = \rho\mathbf{l}_1, \quad \mathbf{X}(2\pi)\mathbf{l}_2 = \rho\mathbf{l}_2 + 2\pi\rho\mathbf{l}_1 \tag{2.7}$$

$$\mathbf{X}(2\pi)\mathbf{l}_3 = \bar{\rho}\mathbf{l}_3 - 2\pi\bar{\rho}\mathbf{l}_4, \quad \mathbf{X}(2\pi)\mathbf{l}_4 = \bar{\rho}\mathbf{l}_4$$

Тогда, выбрав векторы $\mathbf{l}_j$ так, чтобы $\mathbf{l}_3 = \delta\bar{\mathbf{l}}_2$, $\mathbf{l}_4 = -\delta\bar{\mathbf{l}}_1$, и положив

$$\mathbf{D} = \begin{Vmatrix} \mathbf{D}' & \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_2 & \mathbf{D}'' \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{D}' = \begin{Vmatrix} d_1 & d_2 \\ 0 & d_1 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{D}'' = \begin{Vmatrix} \bar{d}_1 & 0 \\ -\bar{d}_2 & \bar{d}_1 \end{Vmatrix}$$

находим, что независимо от $d_1, d_2, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$ (из (2.7)) матрица удовлетворяет уравнению (2.6), а матрица $\mathbf{N}(t)$ — вещественная.

Таким образом, для удовлетворения последнего условия (2.5) осталось только по $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$ из (2.7) подобрать d_1, d_2. Для этого, переписав условие (2.5) в виде $\mathbf{A}^T\mathbf{J}\mathbf{A} = \mathbf{D}^T\mathbf{L}^T\mathbf{J}\mathbf{L}\mathbf{D} = \mathbf{D}^T\mathbf{F}\mathbf{D} = \mathbf{J}$, исследуем сначала свойства матрицы $\mathbf{F} = \| f_{jn} \|$, $f_{jn} = (\mathbf{l}_j, \mathbf{J}\mathbf{l}_n)$. Так как для любых четырехвекторов $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ справедливо $(\mathbf{U}, \mathbf{J}\mathbf{V}) = -(\mathbf{J}\mathbf{U}, \mathbf{V})$, то матрица $\mathbf{F}$ — кососимметрическая. Далее, как и при $\rho_1 \neq \rho_2$, из уравнений (2.7) и выбора $\mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4$ следует, что $f_{12} = f_{34} = 0$, $f_{13} = \bar{f}_{24}$, $f_{23} = -\bar{f}_{23}$ (f_{23} — чисто мнимое число).

Покажем, что $f_{14} = -\delta(\mathbf{l}_1, \mathbf{J}\bar{\mathbf{l}}_1) = 0$. Пусть M_4 — евклидово пространство, натянутое на векторы $\mathbf{l}_j$. Рассмотрим его трехмерное подпространство M_3, ортогональное вектору $\mathbf{J}\mathbf{l}_4$. Оно инвариантно относительно линейного преобразования с матрицей $\mathbf{X}(2\pi)$. Действительно, если $\mathbf{g} \in M_3$ (т. е. $(\mathbf{g}, \mathbf{J}\mathbf{l}_4) = 0$), то

$$(\mathbf{X}(2\pi)\mathbf{g}, \mathbf{J}\mathbf{l}_4) = (\mathbf{X}(2\pi)\mathbf{g}, \mathbf{J}\mathbf{X}(2\pi)\mathbf{l}_4)/\bar{\rho} = (\mathbf{g}, \mathbf{J}\mathbf{l}_4)/\bar{\rho} = 0$$

Двумерное линейное подпространство M_2, натянутое на векторы $\mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4$, также инвариантно и содержится в M_3 (матрица $\mathbf{X}(2\pi)$ — неособенная). Следовательно [9], в M_3 обязательно содержится еще один собственный вектор матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$, т. е. вектор $\mathbf{l}_1$, а это и означает, что $f_{14} = (\mathbf{l}_1, \mathbf{J}\mathbf{l}_4) = 0$. Отсюда также можно получить, что $f_{24} = \bar{f}_{24}$ (f_{24} — вещественное число).

Итак, установлен вид матрицы $\mathbf{F}$, а значит, и матрицы $\mathbf{A}^T\mathbf{J}\mathbf{A}$. Приравнивая элементы последней матрицы элементам матрицы J, получаем соотношения нормировки

$$d_1 = \bar{d}_1 = |(\mathbf{l}_1, \mathbf{J}\bar{\mathbf{l}}_2)|^{-1/2}, \quad d_2 = -\bar{d}_2 = -{}^1/_2\delta(\mathbf{l}_2, \mathbf{J}\bar{\mathbf{l}}_2)d_1^3$$

$$\delta = \operatorname{sign}(\mathbf{l}_1, \mathbf{J}\bar{\mathbf{l}}_2)$$

Наконец, в системе с гамильтонианом (2.2) сделаем еще каноническое преобразование $q_k' = q_k''$, $p_k' = \delta p_k''$ с валентностью δ. Собирая полученные результаты, для нормализующей матрицы $\mathbf{N}(t)$, имеющей теперь валентность δ и приводящей функцию H_2 к виду (2.2), где $\delta = 1$, окончательно получаем такое выражение:

$$\mathbf{N}(t) = \sqrt{2}\mathbf{X}(t)\,\|\mathbf{r}_2, -\mathbf{s}_2, -\mathbf{r}_1, \mathbf{s}_1\|\begin{Vmatrix} \mathbf{Q}(t) & \mathbf{O}_2 \\ t\mathbf{Q}(t) & \mathbf{Q}(t)\end{Vmatrix} \tag{2.8}$$

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{Vmatrix} \cos\lambda t & \sin\lambda t \\ -\sin\lambda t & \cos\lambda t\end{Vmatrix}$$

где $\mathbf{r}_k$, $\mathbf{s}_k$ — вещественные и мнимые части векторов $\mathbf{A}_1 = d_1\mathbf{l}_1$, $\mathbf{A}_2 = d_2\mathbf{l}_1 + d_1\mathbf{l}_2$, являющихся первыми столбцами матрицы $\mathbf{A}$. Это и завершает доказательство теоремы 2.1.

Заметим, что линейная система с гамильтонианом (2.2) неустойчива, так как в общем решении содержатся растущие члены вида $t \sin \lambda t$. Однако, как будет видно из дальнейшего, отсюда еще не следует неустойчивость полной системы.

Будем далее в этом пункте считать, что в системе с гамильтонианом (1.2) линейная нормализация (2.1) с матрицей (2.8) уже осуществлена и квадратичная часть гамильтониана имеет вид (2.2), где $\delta = 1$. Обозначения для переменных оставим прежние (без штрихов).

Методом Депри — Хори проведем теперь в полной системе такую нелинейную нормализацию [1]

$$(q_k, p_k) \to (Q_k, P_k) \quad (k = 1, 2) \tag{2.9}$$

чтобы новая функция Гамильтона

$$K = K_2 + \ldots + K_m + \ldots \tag{2.10}$$

приобрела более простой вид. Нелинейную нормализацию удобнее проводить в комплексных переменных, связанных с вещественными переменными формулами

$$(q_1{}^*, q_2{}^*, p_1{}^*, p_2{}^*)^T = \mathbf{C}\,(q_1, q_2, p_1, p_2)^T \tag{2.11}$$

где матрица $\mathbf{C}$ определена в (2.4), а $\delta = 1$. В комплексных переменных (ниже звездочка означает, что соответствующая функция записана в комплексных переменных) $H_2{}^* = i\lambda\,(q_1{}^*p_1{}^* + q_2{}^*p_2{}^*) + q_2{}^*p_1{}^*$, а коэффициенты форм $H_m{}^*$ удовлетворяют соотношениям

$$h^*_{\mu_2\mu_1\nu_2\nu_1} = (-1)^{\nu_1+\mu_2}\bar{h}^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} \tag{2.12}$$

Замена (2.9) близка к тождественной. Поэтому $K_2 = H_2$ $(K_2{}^* = H_2{}^*)$. Коэффициенты формы $K_m{}^*$ связаны с коэффициентами соответствующей формы $S_m{}^*$ производящей функции метода Депри — Хори и с коэффициентами формы $G_m{}^*$, однозначно определяемой по уже известным формам $K_2{}^*, \ldots, K^*_{m-1}$, $S_3{}^*, \ldots, S^*_{m-1}$, $H_2{}^*, \ldots, H^*_{m-1}$, $H_m{}^*$, дифференциальны-

[1] *Маркеев А. П., Сокольский А. Г.* Некоторые вычислительные алгоритмы нормализации гамильтоновых систем. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, 1976, № 31.

ми уравнениями вида

$$(2.13)\quad \left(\frac{d}{dt}+ir_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}\right)s^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}+(\nu_1+1)s^*_{\nu_1-1,\,\nu_2-1,\,\mu_1,\,\mu_2}-$$
$$-(\mu_2+1)s^*_{\nu_1,\,\nu_2,\,\mu_1-1,\,\mu_2+1}=k^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}-g^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}\,(r_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}=$$
$$=\lambda(\nu_1+\nu_2-\mu_1-\mu_2),\ \ \nu_1+\nu_2+\mu_1+\mu_2=m)$$

Функцией $k^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t)$ можно распорядиться так, чтобы максимально упростить гамильтониан (2.10) и чтобы только существовало 2π-периодическое решение уравнения (2.13) относительно $s^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t)$. Если число $r_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ не целое или ν_2, μ_1 не равны одновременно нулю, то можно положить $k^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}=0$. Если $r_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}=N$ (целое) и $\nu_2=\mu_1=0$, то в $K_m{}^*$ нельзя уничтожить член с коэффициентом $k^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$, но можно положить

$$(2.14)\quad k^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t)=\varkappa_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}\exp(-ir_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}t)$$
$$\varkappa_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t)\exp(ir_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}t)\,dt$$

При этом числа (2.14) обладают свойством (2.12). Заметим, что так выбранные коэффициенты новой функции Гамильтона инвариантны относительно замены $\lambda\to\lambda+$ целое число, и именно поэтому (как отмечалось в п. 1) можно считать $0<\lambda<1$.

Чтобы исключить явную зависимость коэффициентов от времени, сделаем еще одно каноническое преобразование $(Q_k{}^*,\ P_k{}^*)\to(Q_k{}^{**},\ P_k{}^{**})$ с помощью производящей функции $T=(Q_1{}^*P_1{}^{**}+Q_2{}^*P_2{}^{**})\exp(-i\lambda t)$. Тогда окончательно в комплексных переменных гамильтониан принимает нормальный вид (для переменных оставлены прежние обозначения)

$$(2.15)\quad K^*=Q_2{}^*P_1{}^*+\sum\varkappa_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}Q_1{}^{*\nu_1}Q_2{}^{*\nu_2}P_1{}^{*\mu_1}P_2{}^{*\mu_2}+K^*_{m+1}+\ldots$$

Здесь суммирование производится по таким неотрицательным индексам ν_1, ν_2, μ_1, μ_2, что $3\leqslant\nu_1+\nu_2+\mu_1+\mu_2\leqslant m$, $\nu_2{}^2+\mu_1{}^2\neq0$, а $r_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}=N$ (целые числа).

Ограничиваясь, как и в автономной задаче [5, 6], анализом на основе членов до четвертого порядка ($m=3,4$), приходим к необходимости рассмотрения трех существенно различных случаев: 1) $3\lambda\neq N$, $4\lambda\neq N$; 2) $3\lambda=N$ (из-за наличия условия $0<\lambda<1$ достаточно рассмотреть только $N=1,2$); 3) $4\lambda=N$ (здесь $N=1,2,3$).

В случае 1) в вещественных переменных (см. (2.11)) нормальная форма гамильтониана принимает вид

$$(2.16)\quad K=K^{(0)}+K^{(1)}$$

$$(2.17)\quad K^{(0)}=\frac{1}{2}(Q_1{}^2+Q_2{}^2)+A(P_1{}^2+P_2{}^2)^2$$
$$K^{(1)}=(P_1{}^2+P_2{}^2)[B(Q_1P_2-Q_2P_1)+C(Q_1{}^2+Q_2{}^2)]+K_5+\ldots$$

и аналогична нормальной форме автономной задачи [5]. Здесь необходимый в дальнейшем вещественный коэффициент A выражается через коэффициенты гамильтониана (1.2) (записанного после проведения линейной нормализации (2.1)) по формуле (см. также (2.12))

$$A = \frac{1}{4}\varkappa_{2002}, \quad \varkappa_{2002} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g^*_{2002}(t)\,dt \tag{2.18}$$

$$g^*_{2002} = h^*_{2002} + h^*_{2010}s^*_{1002} + 2h^*_{1011}s^*_{2001} + 3h^*_{0012}s^*_{3000} + h^*_{2001}s^*_{0102} + $$
$$+ 2h^*_{1002}s^*_{1101} + 3h^*_{0003}s^*_{2100}$$

$$h^*_{2002} = \frac{1}{2}(3h_{0040} + h_{0022} + 3h_{0004})$$

$$s^*_{3000} = F(3\lambda, h^*_{3000}), \qquad s^*_{2100} = F(3\lambda, \quad h^*_{2100} + 3s^*_{3000})$$
$$s^*_{2001} = F(\lambda, h^*_{2001}), \qquad s^*_{1101} = F(\lambda, h^*_{1101} + 2s^*_{2001})$$
$$s^*_{1002} = F(-\lambda, h^*_{1002}), \qquad s^*_{0102} = F(-\lambda, h^*_{0102} + s^*_{1002})$$

$$F(r, f) = e^{-irt}\left[-I(t) + \frac{I(2\pi)}{1 - e^{2\pi i r}}\right], \quad I(\tau) = \int_0^\tau f(t)e^{irt}\,dt$$

$$h^*_{3000} = \frac{1}{2\sqrt{2}}[(-h_{0030} + h_{0012}) + i(h_{0021} - h_{0003})]$$

$$h^*_{2001} = \frac{1}{2\sqrt{2}}[(3h_{0030} + h_{0012}) + i(-h_{0021} - 3h_{0003})]$$

$$h^*_{2100} = \frac{1}{2\sqrt{2}}[(h_{1020} - h_{1002} - h_{0111}) + i(-h_{1011} - h_{0120} + h_{0102})]$$

$$h^*_{2010} = \frac{1}{2\sqrt{2}}[(h_{1020} - h_{1002} + h_{0111}) + i(-h_{1011} + h_{0120} - h_{0102})]$$

$$h^*_{1101} = \frac{1}{\sqrt{2}}[(-h_{1020} - h_{1002}) + i(h_{0120} + h_{0102})]$$

Теорема 2.2. Если в нормальной форме (2.16), (2.17) $A > 0$, то положение равновесия формально устойчиво. Если $A < 0$, то имеет место неустойчивость по Ляпунову.

Для доказательства первого утверждения теоремы заметим, что описанное выше нормализующее преобразование (2.9) можно провести во всех порядках. Тогда система будет допускать формальный (из-за возможной расходимости преобразования (2.9)) интеграл $K = \mathrm{const}$, определяемый формулой (2.16), в которой $K^{(1)}$ не зависит от времени явно. Так как при $A > 0$ функция K определенно-положительная, то, согласно определению [10], положение равновесия нормализованной (а следовательно, и исходной) системы формально устойчиво.

Неустойчивость доказывается так же, как и в автономной задаче [5].

Заметим, что при $\varkappa_{2002} = 0$ имеем $A = 0$ и вопрос об устойчивости решается членами более высокого порядка рассмотрением выражений $\varkappa_{3003}(P_1^2 + P_2^2)^3$ и т. д. в нормальной форме (2.16). Теорема доказана.

Случаи 2) и 3) являются особыми только в неавтономной задаче.

В случае 2) нормальная форма в вещественных переменных принимает вид (2.16), где теперь

$$K^{(0)} = \frac{1}{2}(Q_1^2 + Q_2^2) + a(P_1^3 - 3P_1P_2^2) + b(3P_1^2P_2 - P_2^3) \tag{2.19}$$
$$K^{(1)} = K_4 + \ldots$$

$$a=-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Re}\varkappa_{3000},\quad b=-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Im}\varkappa_{3000},\quad \varkappa_{3000}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h_{3000}^*(t)e^{3i\lambda t}\,dt \tag{2.20}$$

Теорема 2.3. Если $\varkappa_{3000}\neq 0$, то положение равновесия неустойчиво (при $\varkappa_{3000}=0$ вопрос об устойчивости решается теоремой 2.2).

Теорема доказывается построением функции Четаева [11]

$$V=-(Q_1P_1+Q_2P_2)K^{(0)} \tag{2.21}$$

производная которой в силу уравнений движения с гамильтонианом (2.16), (2.19) будет определенно-положительной в области $V>0$ (аналогичная функция была впервые использована Четаевым при обращении теоремы Лагранжа — Дирихле).

В случае 3) в нормальной форме (2.16) теперь

$$K^{(0)}={}^1/_2\,(Q_1^2+Q_2^2)+K^{(0P)}\,(P_1,P_2)$$

$$K^{(1)}=(P_1^2+P_2^2)\,[B\,(Q_1P_2-Q_2P_1)+C\,(Q_1^2+Q_2^2)]+$$
$$+K_5+\ldots$$

$$K^{(0P)}=A\,(P_1^2+P_2^2)^2+a\,(P_1^4-6P_1^2P_2^2+P_2^4)+$$
$$+4b\,(P_1^3P_2+P_1P_2^3)$$

$$a={}^1/_2\operatorname{Re}\varkappa_{4000},\quad b={}^1/_2\operatorname{Im}\varkappa_{4000},\quad \varkappa_{4000}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g_{4000}^*(t)\,e^{4i\lambda t}\,dt \tag{2.22}$$

$$g_{4000}{}^*=h_{4000}{}^*+3h_{2010}{}^*s_{3000}{}^*+h_{2001}{}^*s_{2100}{}^*$$

$$h_{4000}^*=\frac{1}{4}\,[(h_{0040}-h_{0022}+h_{0004})+i\,(-h_{0031}+h_{0013})]$$

Теорема 2.4. Если форма $K^{(0P)}$ определенно-положительна относительно P_1, P_2, то положение равновесия формально устойчиво. В остальных случаях (за исключением случая знакоположительности, когда вопрос об устойчивости решается членами более высокого порядка) имеет место неустойчивость.

Первое утверждение теоремы доказывается так же, как и в теореме 2.2. Неустойчивость доказывается с помощью функции Четаева (2.21).

3. Рассмотрим теперь случай простых элементарных делителей матрицы $\mathrm{X}\,(2\pi)-\rho\mathrm{E}_4$ при $\rho_1=\rho_2\neq\pm1$.

Сначала (как и в предыдущем случае) кратко опишем процедуру линейной нормализации системы (1.3).

Теорема 3.1. Существует непрерывно дифференцируемая и 2π-периодическая по t вещественная, симплектическая матрица $\mathrm{N}\,(t)$, такая, что замена (2.1) приводит гамильтониан H_2 системы (1.3) к нормальной форме

$$H_2'={}^1/_2\delta_1\lambda\,(q_1'^2+p_1'^2)+{}^1/_2\delta_2\lambda\,(q_2'^2+p_2'^2) \tag{3.1}$$

где числа $\delta_k=\pm1$ определяются в процессе линейной нормализации.

Запишем искомую матрицу $N(t)$ в виде (2.3), где теперь

$$(3.2)\qquad \mathbf{B}=\operatorname{diag}\{i\lambda,\, i\lambda,\, -i\lambda,\, -i\lambda\},\quad \mathbf{C}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Vmatrix}-\Delta & i\mathbf{E}_2\\ i\mathbf{E}_2 & -\Delta\end{Vmatrix},\quad \Delta=\begin{Vmatrix}\delta_1 & 0\\ 0 & \delta_2\end{Vmatrix}$$

а произвольная неособенная матрица **A** удовлетворяет условиям симплектичности (2.5) и периодичности (2.6). Заметим, что теперь матрица $e^{2\pi\mathbf{B}}$ — диагональная нормальная форма матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$, т. е. **A** составлена из собственных векторов матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$. Положим опять $\mathbf{A}=\mathbf{LD}$ и запишем для столбцов матрицы **L** соотношения, аналогичные (2.7) (векторы $\mathbf{l}_j$ должны быть линейно-независимые),

$$(3.3)\qquad \mathbf{X}(2\pi)\mathbf{l}_k=\rho\bar{\mathbf{l}}_k,\quad \mathbf{X}(2\pi)\mathbf{l}_{k+2}=\bar{\rho}\mathbf{l}_{k+2}\quad (k=1,\,2)$$

Тогда, выбрав $\mathbf{l}_{k+2}=i\delta_k\bar{\mathbf{l}}_k$ и положив

$$\mathbf{D}=\begin{Vmatrix}\mathbf{D}' & \mathbf{O}_2\\ \mathbf{O}_2 & \mathbf{D}''\end{Vmatrix},\quad \mathbf{D}'=\begin{Vmatrix}d_1 & d_2\\ 0 & d_3\end{Vmatrix},\quad \mathbf{D}''=\begin{Vmatrix}\bar{d}_1 & \delta_1\delta_2\bar{d}_2\\ 0 & \bar{d}_3\end{Vmatrix}\quad (d_1=\bar{d}_1,\ d_3=\bar{d}_3)$$

(т. е. удовлетворив условию вещественности $\mathbf{N}(t)$), приходим к задаче выяснения структуры кососимметрической матрицы $\mathbf{F}=\mathbf{L}^T\mathbf{J}\mathbf{L}$. Анализ показывает, что

$$\mathbf{F}=\begin{Vmatrix}\mathbf{O}_2 & \mathbf{M}\\ -\mathbf{M} & \mathbf{O}_2\end{Vmatrix},\quad \mathbf{M}=\begin{Vmatrix}f_{13} & f_{14}\\ \delta_1\delta_2\bar{f}_{14} & f_{24}\end{Vmatrix}$$

причем можно так выбрать вектор $\mathbf{l}_1$ (из двух линейно-независимых векторов $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$ из (3.3)), чтобы $f_{13}=i\delta_1(\mathbf{l}_1,\, \mathbf{J}\bar{\mathbf{l}}_1)\neq 0$. Выпишем элементы матрицы $\mathbf{A}^T\mathbf{J}\mathbf{A}$ и приравняем их к элементам матрицы **J** (условие симплектичности). Решив полученные уравнения относительно элементов матрицы **D**, получим соотношения нормировки, в которых знаки δ_1, δ_2 коэффициентов нормальной формы (3.1) выбираются так, чтобы подкоренные выражения (они вещественны) были положительны.

Собирая полученные результаты, для нормализующей матрицы $\mathbf{N}(t)$ окончательно получаем такое выражение

$$\mathbf{N}(t)=\sqrt{2}\,\mathbf{X}(t)\,\|\mathbf{r}_1,\,\mathbf{r}_2,\,\mathbf{s}_1,\,\mathbf{s}_2\|\begin{Vmatrix}-\cos\lambda t\,\Delta & \sin\lambda t\,\mathbf{E}_2\\ -\sin\lambda t\,\Delta & -\cos\lambda t\,\mathbf{E}_2\end{Vmatrix}$$

где $\mathbf{r}_k$, $\mathbf{s}_k$ — вещественные и мнимые части векторов $\mathbf{A}_1=d_1\mathbf{l}_1$, $\mathbf{A}_2=d_2\mathbf{l}_1+d_3\mathbf{l}_2$, являющихся первыми столбцами матрицы **A**. Это и завершает доказательство теоремы 3.1.

Заметим, что теперь в отличие от рассмотренного в п. 2 случая непростых элементарных делителей линейная система с гамильтонианом (3.1) устойчива, хотя отсюда еще и не следует устойчивость полной системы (см. ниже).

Для проведения нелинейной нормализации перейдем к комплексным переменным (2.11), где матрица **C** определяется выражением (3.2). В комплексных переменных получаем $H_2^*=i\lambda(q_1^*p_1^*+q_2^*p_2^*)$, а уравнение для определения коэффициентов производящей функции метода Деприи — Хори и коэффициентов нового гамильтониана принимает вид соотношения (2.13), в котором отсутствуют два последних слагаемых левой части.

Таким образом, аналогично формуле (2.15), полученной для случая непростых элементарных делителей, теперь имеем

$$K^* = \sum \varkappa_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} Q_1{}^{*\nu_1} Q_2{}^{*\nu_2} P_1{}^{*\mu_1} P_2{}^{*\mu_2} + K^*_{m+1} + \ldots \tag{3.4}$$

где суммирование производится по таким индексам ν_1, ν_2, μ_1, μ_2, что $3 \leqslant \nu_1 + \nu_2 + \mu_1 + \mu_2 \leqslant m$, $r_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = N$ (целые числа), а коэффициенты $\varkappa_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ удовлетворяют соотношениям

$$\varkappa_{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2} = i^{(\nu_1+\nu_2+\mu_1+\mu_2)} \delta_1{}^{(\nu_1+\mu_1)} \delta_2{}^{(\nu_2+\mu_2)} \overline{\varkappa}_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$$

аналогичным соотношениям (2.12). Переходя в (3.4) к вещественным «полярным переменным» φ_k (координата), r_k (импульс) по формулам

$$Q_k{}^* = i\sqrt{r_k} \exp(i\delta_k\varphi_k), \quad P_k{}^* = -\delta_k \sqrt{r_k} \exp(-i\delta_k\varphi_k)$$
$$(k = 1, 2)$$

получаем окончательное выражение для нормальной формы функции Гамильтона

$$K = \sum i^{(\nu_1+\nu_2)} (-\delta_1)^{\mu_1} (-\delta_2)^{\mu_2} \varkappa_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} [r_1^{(\nu_1+\mu_1)} r_2^{(\nu_2+\mu_2)}]^{1/2} \times$$
$$\times \exp\{i[\delta_1(\nu_1 - \mu_1)\varphi_1 + \delta_2(\nu_2 - \mu_2)\varphi_2]\} + K_{m+1} + \ldots \tag{3.5}$$

Теорема 3.2. Пусть $\delta_1\delta_2 > 0$. Если $k\lambda \neq N$ (k, N — целые, $k = 3, \ldots$ $\ldots, m$), то положение равновесия устойчиво при учете членов до порядка m включительно.

Проводя нормализацию гамильтониана до членов порядка m, можно убедиться, что укороченная система допускает определенно-положительный интеграл $r_1 + r_2 = \text{const}$. Это и доказывает теорему. Заметим, кроме того, что если число λ — иррациональное, то отсюда следует формальная устойчивость положения равновесия.

Пусть теперь $\delta_1\delta_2 < 0$ и $3\lambda \neq N$, $4\lambda \neq N$. Тогда нормализованный до членов четвертого порядка (относительно q_k, p_k) гамильтониан (3.5) принимает вид, аналогичный нормальной форме автономной задачи [5]

$$K = K^{(0)} + K^{(1)}, \quad K^{(1)} = K_5 + \ldots \tag{3.6}$$

$$K^{(0)} = -a_{2020} r_1{}^2 - 2\delta_1\delta_2 r_1{}^{3/2} r_2{}^{1/2} (a_{2011} \cos\varphi - b_{2011} \sin\varphi) -$$
$$- r_1 r_2 (\delta_1\delta_2 a_{1111} + 2a_{2002} \cos 2\varphi - 2b_{2002} \sin 2\varphi) -$$
$$- 2\delta_1\delta_2 r_1{}^{1/2} r_2{}^{3/2} (a_{0211} \cos\varphi + b_{0211} \sin\varphi) - a_{0202} r_2{}^2 \tag{3.7}$$
$$\varphi = \delta_1\varphi_1 - \delta_2\varphi_2, \quad \varkappa_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = a_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} + ib_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$$

причем функции $K_5, \ldots$ 2π-периодически зависят от t и угловых переменных φ_1, φ_2. Рассмотрим функцию $\Phi(\varphi) = r^{-2} K^{(0)} |_{r_1=r_2=r}$, зависящую 2π-периодически от одной переменной $\varphi = \delta_1\varphi_1 - \delta_2\varphi_2$ (здесь $\delta_1\delta_2 < 0$).

Теорема 3.3. Если в области $r_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant 0$ форма (3.7) при любых φ знакоопределена, то положение равновесия формально устойчиво. Если $\Phi(\varphi) \neq 0$ при $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, но форма (3.7) незнакоопределена, то положение равновесия устойчиво при учете в разложении функции Гамильтона (1.2) членов до четвертого порядка. Если функция $\Phi(\varphi)$ принимает значения любого знака (знакопеременная), то имеет место неустойчивость по Ляпунову.

Докажем сначала утверждение о неустойчивости, предположив, что существует такое значение φ^*, что $\Phi(\varphi^*) = 0$, а $\Phi'(\varphi^*) \neq 0$ (это ограничение несущественно). Используя периодичность $\Phi(\varphi)$, выберем число ε так, чтобы в окрестности $|\varphi - \varphi^*| < \varepsilon$ выполнялось неравенство $\Phi'(\varphi) < 0$. Рассмотрим функцию Четаева [3, 5, 8]

$$V = [r_2^\alpha - (r_1 - r_2)^2] \sin \Psi, \quad \Psi = \frac{\pi}{2\varepsilon}(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi^* + \varepsilon) \tag{3.8}$$

$$2 < \alpha < 3$$

За область $V > 0$ примем область $r_2^\alpha - (r_1 - r_2)^2 > 0$, $|\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi^*| < \varepsilon$. В этой области, очевидно, $r_1 = r_2 + \beta r_2^{\alpha/2}$, $|\beta| < 1$. Для производной функции (3.8) в силу уравнений движения с гамильтонианом (3.6) получаем

$$\frac{dV}{dt} = r_2^{\alpha+1}\left[\frac{\pi}{\varepsilon}(1 - \beta^2)\Phi(\varphi)\cos\Psi - \alpha\Phi'(\varphi)\sin\Psi\right] + o(r_2^{\alpha+1})$$

Эта функция в области $V > 0$ определенно-положительна [5, 8], откуда на основании теоремы Четаева [11] получаем неустойчивость положения равновесия.

Для доказательства второго утверждения теоремы заметим, что укороченная система с гамильтонианом (3.7) имеет два интеграла: $K^{(0)} = \mathrm{const}$, $r_1 - r_2 = \mathrm{const}$ и, следовательно, допускает интеграл $G = (r_1 - r_2)^2 + [K^{(0)}]^2$, который является определенно-положительным. Таким образом, на основании теоремы Ляпунова [1] получаем устойчивость полной системы в четвертом порядке (если $k\lambda \neq N$, где $k = 3, \ldots, m$, то отсюда следует даже устойчивость в m-м порядке, а при иррациональном λ — формальная устойчивость).

Пусть теперь функция (3.7) — знакоопределенная относительно r_1, r_2 при любых φ. Проведем в системе нормализацию до членов бесконечного порядка. Это означает, что функция (3.6) не зависит от времени явно и, следовательно, является формальным интегралом. Так как этот интеграл знакоопределен, то, согласно определению [10], положение равновесия формально устойчиво. Заметим, что это утверждение теоремы справедливо и при $\delta_1\delta_2 > 0$. Теорема доказана.

Случаи $3\lambda = N$ и $4\lambda = N$ для простых элементарных делителей не рассматривались подробно. Заметим, что эта задача аналогична случаям одновременного выполнения двух резонансных соотношений для многомерных гамильтоновых систем, изучение которых даже в более простых вариантах далеко не завершено (см. обзор [12]).

Наконец, все описанные выше результаты легко переносятся на случай неавтономной системы с $n + 2$ степенями свободы, если предположить, что ее частоты $\lambda, \lambda_3, \ldots, \lambda_{n+2}$ не связаны соотношениями параметрического резонанса.

Авторы благодарят А. П. Маркеева за внимание к работе.

Поступила 26 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., т. 2. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1956.
2. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М., «Наука», 1972.
3. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М., «Наука», 1978.
4. *Баутин Н. Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.— Л., Гостехиздат, 1949.
5. *Сокольский А. Г.* Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае равных частот. ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
6. *Сокольский А. Г.* Доказательство устойчивости лагранжевых решений при критическом соотношении масс. Письма в АЖ, 1978, т. 4, № 3.
7. *Ковалев А. М., Чудненко А. Н.* К устойчивости положения равновесия двумерной гамильтоновой системы в случае равных частот. Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 11.
8. *Сокольский А. Г.* Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе первого порядка. ПММ, 1977, т. 41, вып. 1.
9. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., «Наука», 1966.
10. *Moser J.* New aspects in the theory of stability of Hamiltonian systems. Comm. Pure Appl. Math., 1958, vol. 11, No. 1, p. 81—114.
11. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М., «Наука», 1965.
12. *Куницын А. Л., Маркеев А. П.* Устойчивость в резонансных случаях. В сб.: Итоги науки и техники. Сер. Общая механика, т. 4. ВИНИТИ, 1979.