Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 5, 1980

УДК 531.36

О КАЧЕСТВЕННОМ ИССЛЕДОВАНИИ ДВИЖЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ

К. Ш. Ходжаев, С. Д. Шаталов

(Ленинград)

Предлагается способ качественной оценки колебаний, описываемых уравнениями в стандартной форме или уравнениями со многими медленными и быстрыми переменными. Способ позволяет судить о движении исходной системы при всех временах, не основываясь на аппроксимации точных решений приближенными. В качестве примера рассматриваются движения твердого проводящего тела в быстропеременном во времени магнитном поле.

Наиболее общие теоремы асимптотических методов для систем в стандартной форме [1, 2] и для систем со многими быстрыми и медленными переменными [3] позволяют судить о близости точных и приближенных решений на конечном интервале времени порядка $1/\varepsilon$, ε — малый параметр. Для исследования свойств решений этих систем на бесконечном интервале времени используются, во-первых, теоремы о существовании у исходного уравнения точных решений определенного вида (например, квазипериодических), получаемые методом интегральных многообразий [4], и, во-вторых, теоремы об аппроксимации точных решений приближенными на бесконечном интервале. Из теорем второго типа часто оказывается полезной теорема Банфи [5,6] и ее обобщение на системы со многими быстрыми переменными [6].

Однако эти результаты применимы лишь при довольно жестких ограничениях на решения усредненной системы: равномерная асимптотическая устойчивость в случае теоремы Банфи, существование предельного цикла у уравнений первого приближения в случае теоремы о квазипериодических решениях и т. д. В частности, не охватывается случай, когда в первом приближении усредненная система является «нейтральной», например консервативной, а затухание или предельный цикл обнаруживается в высших приближениях. Тогда приближение, в котором впервые обнаружены, например, затухающие колебания у усредненной системы, не дает аппроксимации решения исходного уравнения на бесконечном интервале времени. Это видно уже в случае равномерной экспоненциальной устойчивости решений усредненной системы, обнаруживаемой в высших приближениях [7].

Ниже излагается простой способ чисто качественного исследования движений с помощью асимптотических методов нелинейной механики в условиях, когда для точных решений исходной системы и приближенных решений, полученных по методу усреднения, известна лишь близость на конечном интервале времени.

1. Качественное сравнение точных и приближенных решений систем в стандартной форме и квазилинейных систем со многими быстрыми переменными. Обозначим через $x(t)$ искомый n-мерный вектор-столбец, удовлетворяющий системе в стандартной форме

$$x^{\cdot} = \varepsilon X(x, t, \varepsilon), \quad \varepsilon \geqslant 0 \tag{1.1}$$

а через $x^{(m)}(\xi^{(m)}, t, \varepsilon)$ — m-е приближение к $x(t)$, полученное по методу усреднения

$$x^{(m)} = \xi^{(m)} + \varepsilon u_1(\xi^{(m)}, t) + \ldots + \varepsilon^{m-1} u_{m-1}(\xi^{(m)}, t) \tag{1.2}$$

Уравнение для $\xi^{(m)}$ имеет вид

$$d\xi^{(m)}/\partial t = \varepsilon \Xi_1(\xi^{(m)}) + \ldots + \varepsilon^m \Xi_m(\xi^{(m)}) = \varepsilon \Xi^{(m)}(\xi^{(m)}, \varepsilon) \tag{1.3}$$

При этом предполагается, что функция X при $t \geqslant t_*$, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ и x из некоторой области D непрерывна по t и равномерно ограничена вместе с производными порядка m по x и ε, а функции $\Xi_1, \ldots, \Xi_m$ и $u_1, \ldots, u_{m-1}$ равномерно ограничены вместе с первыми производными по $\xi^{(m)}$ соответственно при $\xi^{(m)} \in D$ и $\xi^{(m)} \in D$, $t \geqslant t_*$.

Рассмотрим функцию $\xi_m(t, \varepsilon)$, определяемую соотношением

$$x = \xi_m + \varepsilon u_1(\xi_m, t) + \ldots + \varepsilon^{m-1} u_{m-1}(\xi_m, t) \tag{1.4}$$

(последующее не изменится, если, как это чаще делается в методе усреднения, ввести $\xi_m(t, \varepsilon)$ аналогичным соотношением, содержащим член $O(\varepsilon^{(m)})$).

Известна следующая оценка близости функций ξ_m и $\xi^{(m)}$. Пусть $x(t_0) \in D_\alpha$, где область D_α такова, что ее α-окрестность, $\alpha = O(\varepsilon)$, совпадает с D. Найдем с помощью (1.4) $\xi_m(t_0)$; при достаточно малых ε будет $\xi_m(t_0) \in D_\alpha$. Пусть решение уравнения (1.3) при начальном условии $\xi^{(m)}(t_0) = \xi_m(t_0)$ на промежутке $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T/\varepsilon$ остается в D_α. Тогда для функций $\xi^{(m)}$, ξ_m с указанными начальными условиями при достаточно малых $\varepsilon \leqslant \varepsilon_*$ справедливо соотношение

$$|\xi_m(t) - \xi^{(m)}(t)| \leqslant c_m \varepsilon^m, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T/\varepsilon \tag{1.5}$$

где c_m, T не зависят от ε.

Далее указываются некоторые случаи, когда по свойствам функций $\xi^{(m)}$ можно установить аналогичные свойства функций ξ_m на бесконечном интервале времени.

Рассмотрим некоторую ограниченную область D_1 и ее δ-окрестность D_δ, $\delta = d\varepsilon^{m-1}$, $d = \mathrm{const} > 0$, причем $D_\delta \subset D_\alpha$, и однозначную скалярную функцию $V(\xi, \varepsilon)$, определенную в D_δ, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_*$. Предполагается, что $|\partial V/\partial \xi| \neq 0$ при $\xi \leqslant D_\delta$, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_*$ и существуют

$$V_M = \sup_{\xi \in D_\delta,\ \varepsilon \leqslant \varepsilon_*} V(\xi, \varepsilon), \quad F = \sup_{\xi \in D_\delta,\ \varepsilon \leqslant \varepsilon_*} \left| \frac{\partial V}{\partial \xi} \right|$$

Теорема 1. Пусть при сделанных предположениях существует такая функция $V(\xi, \varepsilon)$, что для любого решения $\xi^{(m)}(t)$ уравнения (1.3), остающегося в течение какого-либо промежутка времени вида $t^{(0)} \leqslant t \leqslant t^{(0)} + T/\varepsilon$ в D_δ, выполняется неравенство

$$V(\xi^{(m)}(t^{(0)} + T/\varepsilon)) \geqslant V(\xi^{(m)}(t^{(0)})) + \varepsilon^{m-1} W_0 \tag{1.6}$$

с одним и тем же $W_0 > 0$ для всех $t^{(0)} \geqslant t_*$, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_*$ и всех указанных $\xi^{(m)}(t)$.

Тогда не существует решений $\xi_m(t)$, остающихся в D_1 при всех $t \geqslant t_*$.

Замечания. 1°. Условие (1.6) заведомо выполняется, если в D_δ существует функция $V(\xi, \varepsilon)$, производная которой в силу уравнений (1.3) удовлетворяет соотношению $V^{\cdot} \geqslant \varepsilon^m w_0$, $w_0 = \mathrm{const} > 0$; тогда можно принять $W_0 = w_0 T$.

2°. Из условия (1.6) сразу следует что не существует решений $\xi^{(m)}(t)$, остающихся в D_δ при всех $t \geqslant t_*$. Действительно, пусть $\xi^{(m)}(t_0) \in D_\delta$. Рассмотрим промежуток времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + kT/\varepsilon$, k — целое. По истечении этого промежутка времени функция V на любом решении, остающемся в D_δ, получит приращение $V(\xi^{(m)}(t_0 + kT/\varepsilon)) - V(\xi^{(m)}(t_0)) \geqslant k\varepsilon^{m-1} W_0$. В результате при достаточно большом k значение функции $V(\xi, \varepsilon)$ на решении $\xi^{(m)}(t)$ превзойдет V_M, что невозможно.

Доказательство. Сопоставим с «точным» решением $\xi_m(t)$, $\xi_m(t_0) \in D_1$, последовательность «приближенных» решений $\xi_j^{(m)}(t)$, $j = 0, 1, \ldots$, определяемых условиями

$$\xi_0^{(m)}(t_0) = \xi_m(t_0)$$

$$\xi_1^{(m)}(t_0 + T/\varepsilon) = \xi_m(t_0 + T/\varepsilon), \quad \ldots, \quad \xi_j^{(m)}(t_0 + jT/\varepsilon) = \xi_m(t_0 + jT/\varepsilon)$$

Покажем, что невозможно, чтобы при всех сколь угодно больших j на промежутках $t_0 + jT/\varepsilon \leqslant t \leqslant t_0 + (j+1)T/\varepsilon$ было $\xi_j^{(m)}(t) \in D_\delta$. Пусть $\xi_j^{(m)}(t) \in D_\delta$, $t_0 + jT/\varepsilon \leqslant t \leqslant t_0 + (j+1)T/\varepsilon$ при всех j. Тогда $\xi_m(t_0 + jT/\varepsilon) \in D_\delta$ при всех j. На решении $\xi_0^{(m)}(t)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T/\varepsilon$ функция $V(\xi, \varepsilon)$ по условию теоремы получит приращение

$$V(\xi_0^{(m)}(t_0 + T/\varepsilon)) - V(\xi_0^{(m)}(t_0)) \geqslant \varepsilon^{m-1} W_0 \tag{1.7}$$

Рассмотрим величину $V(\xi_m(t_0 + T/\varepsilon))$. В соответствии с (1.5)

$$|V(\xi_m(t_0 + T/\varepsilon)) - V(\xi_0^{(m)}(t_0 + T/\varepsilon))| \leqslant \leqslant F|\xi_m(t_0 + T/\varepsilon) - \xi_0^{(m)}(t_0 + T/\varepsilon)| \leqslant F c_m \varepsilon^m \tag{1.8}$$

Отсюда следует

$$V(\xi_m(t_0 + T/\varepsilon)) \geqslant V(\xi_0^{(m)}(t_0 + T/\varepsilon)) - \varepsilon^m F c_m \tag{1.9}$$

Учитывая, что $V(\xi_0^{(m)}(t_0)) = V(\xi_m(t_0))$, и обозначив $W = W_0(1 - \varepsilon_* F c_m / W_0)$, из (1.7), (1.9) получим оценку

$$V(\xi_m(t_0 + T/\varepsilon)) - V(\xi_m(t_0)) \geqslant \varepsilon^{m-1} W \tag{1.10}$$

Тем же путем (сравнивая с приращением $V(\xi_1^{(m)}(t))$ на промежутке $t_0 + T/\varepsilon \leqslant t \leqslant t_0 + 2T/\varepsilon$) можно оценить $V(\xi_m(t_0 + 2T/\varepsilon))$. Аналогично (1.10) получим

$$V(\xi_m(t_0 + 2T/\varepsilon)) - V(\xi_m(t_0 + T/\varepsilon)) \geqslant \varepsilon^{m-1} W$$

Отсюда и из (1.10) следует

$$V(\xi_m(t_0 + 2T/\varepsilon)) - V(\xi_m(t_0)) \geqslant 2\varepsilon^{m-1} W \tag{1.11}$$

Используя $j + 1$ функций $\xi_0^{(m)}, \ldots, \xi_j^{(m)}$, получим

$$V(\xi_m(t_0 + (j+1)T/\varepsilon)) - V(\xi_m(t_0)) \geqslant (j+1)\varepsilon^{m-1} W \tag{1.12}$$

В результате при достаточно большом j величина $V(\xi_m(t_0 + (j + 1)T/\varepsilon))$ превзойдет V_M, что невозможно.

Следовательно, существуют такие k и t_1, $t_0 + kT/\varepsilon \leqslant t_1 \leqslant t_0 + (k + 1)T/\varepsilon$, что $\xi_k^{(m)}(t_1) \overline{\in} D_\delta$. Тогда в силу (1.5) и соотношения $\delta = d\varepsilon^{m-1}$ получим $\xi_m(t_1) \overline{\in} D_1$.

Точно так же показывается, что $\xi_m(t)$ выйдет не только из D_1, но и из любой $\theta\delta$-окрестности D_1, где $\theta < 1$, θ не зависит от ε.

Полезно оценить время Δt, за которое решение $\xi_m(t)$ заведомо выйдет из области D_1

$$\Delta t \leqslant \frac{V_M}{\varepsilon^m W} = \frac{T_1}{\varepsilon^m}$$

Теорема 2. Пусть функция V удовлетворяет условиям теоремы 1 и, кроме того, везде в D_δ производная $V^\cdot$, вычисленная в силу уравнений (1.3), неотрицательна. Пусть область D_1 ограничена поверхностями $V = C_1$, $V = C_2$, $C_2 > C_1$, причем все поверхности семейства $V = C$ замкнуты. Тогда любое решение $\xi_m(t)$, $\xi_m(t_0) \in D_1$ по истечении некоторого времени пересечет поверхность $V = C_2$ и навсегда покинет область D_1.

Замечание. Обозначим поверхность вида $V = C$ через $S(C)$. Из указанных выше свойств производной $\partial V / \partial \xi$ следует, что семейство $S(C)$ не имеет особенностей в D_δ. Поскольку поверхности замкнуты, то они охватывают одна другую. Предположим, что для всех $C' < C''$ поверхность $S(C')$ охватывает $S(C'')$; это позволяет употреблять выражения «область вне $S(C_1)$», «внутри $S(C_2)$» и т. п. Случай, когда $S(C'')$ охватывает $S(C')$, рассматривается аналогично.

Доказательство. Покажем сначала, что $\xi_m(t)$ обязательно окажется внутри $S(C_2)$. «Приближенное» решение $\xi_0^{(m)}(t)$ (см. выше) может выйти из D_δ, только пересекая $S(C_2)$. Если $\xi_0^{(m)}(t)$ выходит из D_δ на промежутке $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T/\varepsilon$, то $\xi_m(t)$ выйдет из D_1 на том же промежутке через $S(C_2)$ (если $\xi_m(t_0)$ лежит близко к границе $S(C_1)$, то «по пути» $\xi_m(t)$ может выходить из D_1 через эту границу, что несущественно).

Пусть $\xi_0^{(m)}(t) \in D_\delta$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T/\varepsilon$. Точка $\xi_0^{(m)}(t_0 + T/\varepsilon)$ лежит внутри $S(C_1)$ на расстоянии ρ от нее. Для ρ имеем оценку (аналогично (1.8)) $\rho \geqslant \varepsilon^{m-1}W_0/F$. Точка $\xi_m(t_0 + T/\varepsilon)$ в силу (1.5) тоже будет находиться внутри $S(C_1)$ на расстоянии $\rho_1 = O(\rho)$ от нее. Рассмотрев функцию $\xi_1^{(m)}(t)$, получим, что точка $\xi_m(t_0 + 2T/\varepsilon)$ будет находиться внутри $S(C_1)$ на расстоянии $\rho_2 \geqslant \rho_1 + \varepsilon^{m-1}W/F$ от границы. На втором промежутке точка $\xi_m(t)$ уже не может оказаться вне $S(C_1)$. Далее получим $\rho_3 \geqslant \rho_1 + 2\varepsilon^{m-1}W/F$ и т. д. Следовательно, точка $\xi_m(t)$, которая должна выйти из D_1 по теореме 1, выйдет из D_1 через $S(C_2)$.

Пусть теперь $\xi_m(t_1)$ лежит внутри $S(C_2)$. Пусть некоторое число решений $\xi_j^{(m)}(t)$, $\xi_0^{(m)}(t_1) = \xi_m(t_1)$, и т. д. остается в D_δ. Тогда уже на втором промежутке $t_1 + T/\varepsilon \leqslant t \leqslant t_1 + 2T/\varepsilon$ решение $\xi_m(t)$ не может выйти за $S(C_2)$ так же, как ранее решение $\xi_m(t)$ на соответствующем промежутке не могло выйти за $S(C_1)$. Остается случай, когда некоторое решение $\xi_k^{(m)}(t)$ выходит из D_δ. Обозначим через C_M наибольшее значение C, при котором $S(C)$ целиком лежит в D_δ; $C_M - C_2 = O(\varepsilon^{m-1})$. На промежутке $t_1 + kT/\varepsilon \leqslant t \leqslant t_1 + (k+1)\, T/\varepsilon$ точка $\xi_m(t)$ может оказаться вне $S(C_M)$ лишь на расстоянии $O(\varepsilon^m)$ от границы. Теперь очевидно, что независимо от того, выйдет или не выйдет $\xi_{k+1}^{(m)}(t)$ за D_δ, $\xi_m(t)$ и на следующем промежутке не попадет в D_1.

Из теоремы 2 следует

Теорема 3. Пусть поверхности $S(C)$ при $C \to C_*$ стягиваются в точку. Пусть для любого сколь угодно малого $\eta > 0$ существует такое $\varepsilon(\eta)$, что при $\varepsilon \leqslant \varepsilon(\eta) \leqslant \varepsilon_*$ и $C_2 - C_* = \eta$ выполняется теорема 2. Тогда при достаточно малых ε, начиная с некоторого $t = t(\eta)$, решение $\xi_m(t)$ навсегда останется в сколь угодно малой η-окрестности точки $V = C_*$.

Согласно (1.4), решения $x(t)$ исходной системы (1.1) в условиях теоремы 3 при достаточно больших t будут оставаться в $(\eta + O(\varepsilon))$-окрестности точки $V = C_*$. Пусть точка $V = C_*$ соответствует положению равновесия некоторой механической системы. Тогда колебания, описываемые исходной системой (1.1), будут качественно представлять собой суперпозицию вида (1.4) медленного эволюционного движения, стремящегося «почти» к положению равновесия, и малых быстрых вибраций. При достаточно больших t движение сведется к малым быстрым колебаниям около среднего положения, может быть, медленно блуждающего в малой области. Такие колебания практически мало отличаются от квазистатических.

В случае, когда поверхность $S(C'')$ охватывает $S(C')$ при $C'' > C'$, из теоремы 2 следует, что решение $\xi_m(t)$ навсегда выйдет за поверхность $S(C_2)$. Если условия теоремы 2 справедливы при достаточно больших или даже сколь угодно больших C_2, то $x(t)$ в этом случае будет описывать наложение малых вибраций на «уходящее» движение.

В теоремах 1—3 после очевидных изменений можно основываться на существовании не возрастающих, а убывающих функций V; например, в теореме 1 можно взять условие

$$V(\xi^m(t^{(0)} + T/\varepsilon)) - V(\xi^{(m)}(t^{(0)})) \leqslant -\varepsilon^{m-1} W_0$$

предполагая, что существует $\inf V$ в D_δ. Использование таких функций удобнее, в частности, в последующем примере (см. п. 2).

Функцию V можно найти в случае, когда в первом приближении или в нескольких низших приближениях уравнения (1.3) допускают первый интеграл $V(\xi, \varepsilon) = \mathrm{const}$, а в следующем приближении этот интеграл исчезает, причем можно установить знак $V^\cdot$. Очевидно, что в этом случае $V^\cdot = O(\varepsilon^m)$, m — номер приближения, в котором впервые исчезает интеграл. Наиболее прост часто встречающийся случай, когда $V = \mathrm{const}$ — интеграл энергии, а соотношение $V^\cdot = 0$ нарушается вследствие диссипации, выявляемой в старших приближениях.

Приведенные теоремы можно распространить на системы, отличные от системы в стандартной форме, если для них доказана близость точного и приближенного решений на интервале T/ε, а определение приближенного решения сводится к интегрированию автономной системы.

Таковы, например, квазилинейные системы со многими быстрыми переменными

$$(1.13)\qquad x^{\cdot} = \varepsilon X(x, y, t, \varepsilon)$$
$$y^{\cdot} = A(x)\, y + f(x, t)$$

Здесь x, y — искомые n- и l-мерные векторы-столбцы, матрица $A(x)$ такова, что ее собственные числа $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_l(x)$ удовлетворяют условию $\operatorname{Re} \lambda_i \leqslant -\mu < 0$, $\mu = \text{const}$.

Для системы (1.13) имеем [7,8]

$$(1.14)\qquad |\xi_m - \xi^{(m)}| \leqslant c_m \varepsilon^m, \quad |x - x_m| \leqslant c^{(m)} \varepsilon^m$$
$$|x - x_m^{(m)}| \leqslant c_m^{(m)} \varepsilon^m, \quad |y - y^{(m-1)}(\xi^{(m)}, t, \varepsilon)| \leqslant b_m \varepsilon^m$$

Здесь

$$(1.15)\qquad y^{(m-1)}(\xi_m, t, \varepsilon) = \varphi^{(m-1)}(x(\xi_m, t, \varepsilon), t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{m-1} \varepsilon^i \varphi_i(x, t, \varepsilon)$$

функции $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ определяются из линейных уравнений

$$(1.16)\qquad \varphi_0^{\cdot} = A\varphi_0 + f$$
$$\varphi_1^{\cdot} = A\varphi_1 - \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} X(x, \varphi_0, t, 0)$$

и т. д., которые интегрируются при условии $x = \text{const}$, с начальными условиями $\varphi_0(x(t_0), t_0) = y(t_0)$, $\varphi_i(x(t_0), t_0) = 0$ (подробнее см. [7,8]). Через x_m в (1.14) обозначено решение системы в стандартной форме

$$(1.17)\qquad x_m^{\cdot} = \varepsilon X(x_m, \varphi^{(m-1)}(x_m, t, \varepsilon), t, \varepsilon)$$

$x_m^{(m)}$ — m-е приближение к x_m вида (1.2), а ξ_m, $\xi^{(m)}$ вводятся для системы (1.17) так же, как для системы (1.1). Для $\xi^{(m)}$ получается автономная система вида (1.3); далее $\xi^{(m)}$, ξ_m могут быть качественно сравнены с помощью доказанной теоремы. После этого можно установить соответствующие свойства искомых функций $x(t)$, $y(t)$.

2. Пример. Движение проводящего твердого тела в высокочастотном магнитном поле. Движение проводящего твердого тела в быстропеременном во времени магнитном поле и токи Фуко в теле описываются уравнениями [9]

$$(2.1)\qquad q^{\cdot} = \varepsilon A^{-1}(q)\, p$$
$$p^{\cdot} = \varepsilon\left(-\frac{1}{2} p^T \frac{\partial A^{-1}}{\partial q} p + J\left(\frac{\partial L_e}{\partial q}\right)^T i\right) + \varepsilon^2 Q(q, p)$$
$$Li^{\cdot} + Ri = -(L_e J)^{\cdot}$$

Здесь q, p — n-мерные векторы-столбцы безразмерных механических координат и импульсов, $A(q)$ — матрица инерционных коэффициентов, $\varepsilon^2 Q$ — вектор обобщенных сил, i — бесконечномерный вектор безразмерных токов Фуко в теле, L, R — бесконечномерные матрицы коэффициентов индукции и взаимных сопротивлений условных контуров, на которые разбивается тело [10], $J(t)$ — заданный ток в контуре, создающем внешнее поле, L_e — вектор коэффициентов взаимной индукции контура с током J и контуров токов Фуко в теле, t — безразмерное время. Символ

$p^T (\partial A^{-1}/\partial q)\, p$ означает вектор, j-я компонента которого равна $p^T (\partial A^{-1}/\partial q_j)\, p$. О записи уравнений электромеханических систем в дискретной форме (2.1) см. [10], гл. VII.

В технических задачах, например в задаче об ориентировании деталей переменным магнитным полем, «внешние» обобщенные силы являются силами трения, например вязкого.

Система (2.1) включает быстрые i и медленные q, p переменные и, являясь частным случаем (1.13), может быть изучена указанным выше методом (в [9] использован более сложный в данном случае общий метод В. М. Волосова).

Рассмотрим второе приближение. После исключения быстрых переменных, как указано выше, придем к системе в стандартной форме относительно q_2, p_2. Ее приближенное решение имеет вид

$$q_2^{(2)} = \xi^{(2)} + \varepsilon u_1 (\xi^{(2)}, \eta^{(2)}, t)$$

$$p_2^{(2)} = \eta^{(2)} + \varepsilon v_1 (\xi^{(2)}, \eta^{(2)}, t)$$

Функции u_1, v_1 определим так, чтобы их средние по времени $\langle u_1\rangle$, $\langle v_1\rangle$ обращались в нуль, чем устраняется произвол в их выборе. Тогда уравнения для $\xi^{(2)}$, $\eta^{(2)}$ будут иметь вид [9]

$$\text{(2.2)}\qquad \xi^{(2)\cdot} = \varepsilon A^{-1} (\xi^{(2)})\, \eta^{(2)}$$

$$\eta^{(2)\cdot} = \varepsilon \left(-\frac{1}{2}\eta^{(2)T} \frac{\partial A^{-1}}{\partial \xi^{(2)}} \eta^{(2)} - \frac{\partial \Lambda}{\partial \xi^{(2)}} - B (\xi^{(2)})\, \xi^{(2)\cdot}\right) + \varepsilon^2 Q_2$$

Здесь $\Lambda = \langle W (i_0)\rangle$, $W = {}^1/_2\, i^T L i$ — энергия магнитного поля токов Фуко в теле, $i_0 (\xi^{(2)})$ — токи Фуко, найденные в порождающем приближении, т. е. из уравнения

$$\text{(2.3)}\qquad L i_0^{\cdot} + R i_0 = -L_e (\xi^{(2)})\, J^{\cdot}$$

в котором $\xi^{(2)}$ считается постоянной величиной. Иначе говоря, в (2.3) используется среднее значение энергии магнитного поля, найденное в порождающем приближении. Член $(-\varepsilon B \xi^{(2)\cdot})$ — величина второго порядка, поскольку $\xi^{(2)\cdot} = O (\varepsilon)$. Матрица B симметричная [9], вследствие чего этот член описывает или диссипативные, или «раскачивающие» силы. Таким образом, влияние магнитного поля на медленные движения приводит к появлению потенциальных сил в первом приближении и диссипативных во втором.

Рассмотрим систему (2.2) в первом приближении, т. е. без членов $O (\varepsilon^2)$. Эта система консервативна и имеет функцию Гамильтона

$$H = \frac{\varepsilon}{2}\eta^{(2)T} A^{-1} (\xi^{(2)})\, \eta^{(2)} + \varepsilon\Lambda$$

Возьмем поэтому функцию V в виде $V = H / \varepsilon$.

Пусть система первого приближения имеет устойчивое положение равновесия. Оно будет окружено замкнутыми поверхностями $V = C$, $C = \mathrm{const}$. Пусть в положении равновесия $\Lambda = 0$. Примем за D_1 область, ограниченную двумя поверхностями $S(C_1)$, $S(C_2)$, $C_1 > C_2$, C_1, $C_2 = O(1)$, из которых первая охватывает вторую. Производная $V^{\cdot}$ в силу уравнений (2.2) равна

$$V^{\cdot} = -\varepsilon^2 (A^{-1}\eta^{(2)})^T (B + G)(A^{-1}\eta^{(2)}) \tag{2.4}$$

Здесь G — матрица коэффициентов сил внешнего вязкого трения. Рассмотрим случай, когда матрица B положительно определена. Можно показать, что выполняется неравенство

$$V(\xi^{(2)}(t^{(0)} + T/\varepsilon)) - V(\xi^{(2)}(t^{(0)})) \leqslant -\varepsilon^{m-1}W_0 \tag{2.5}$$

Действительно, если $|\eta^{(2)}(t^{(0)})| = O(1)$, то в силу (2.4) приращение функции V на решении $\xi^{(2)}(t)$, $\eta^{(2)}(t)$ на любом промежутке времени величины Δt не больше, чем $(-\varepsilon^2[\text{const}\,\Delta t)$. Если же $|\eta^{(2)}(t^{(0)})|$ — малая величина, то через время порядка

$$\Delta t = \text{const}\left(\varepsilon \inf_{D_1}\left|\frac{\partial\Lambda}{\partial\xi^{(2)}}\right|\right)^{-1}$$

в соответствии со вторым уравнением (2.2) получим $|\eta^{(2)}| = O(1)$. Выбирая $T = \varepsilon k\Delta t$, $k > 1$, что влияет только на постоянную c_m в оценке $|\xi_m - \xi^{(m)}| \leqslant c_m\varepsilon^m$, получим нужное неравенство.

Неравенство (2.5) и соотношение (2.4) выполняются при любом немалом C_2. Это позволяет применить теорему 3. В результате получим, что любая фазовая траектория $\xi^{(2)}(t)$, $\eta^{(2)}(t)$, оказавшаяся в области D_1 указанного выше вида, при достаточно малых ε в конце концов попадает в некоторую малую η-окрестность положения равновесия и там останется. Этому соответствуют колебания исходной системы, качественно похожие на затухающие колебания, стремящиеся к квазистатическим (однако для доказательства, что решения исходной системы стремятся к квазистатическим, требуется дополнительное исследование).

Аналогично в случае, когда матрица суммарного трения $B + G$ отрицательно-определенная, будем иметь «раскачивающиеся» колебания; однако здесь нужно еще дополнительно доказать, что раскачиваются колебания с начальными условиями вблизи положения равновесия.

Матрица B зависит от $\xi^{(2)}$. Поэтому возможен случай, когда вблизи положения равновесия суммарные непотенциальные силы $\varepsilon^2 Q_2 - \varepsilon B\xi^{(2)\cdot}$ будут «раскачивающими», а вдали — диссипативными. В таких случаях возможен предельный цикл. По крайней мере для случая одной механической степени свободы можно тем же путем показать, что $\xi_2(t)$ попадет в малую окрестность этого цикла. При этом колебания в случае периодической функции $J(t)$ при больших t будут качественно похожи на квазипериодические, а движения системы будут похожими на затухающие или нарастающие колебания, стремящиеся к квазипериодическим. Заметим, однако, что существование точных квазипериодических решений в случаях, когда предельный цикл обнаруживается в высших приближениях, по-видимому, не доказано.

Поступила 28V 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев, «Наукова думка», 1971.
2. *Забрейко П. П., Ледовская И. Б.* К обоснованию метода Н. Н. Боголюбова — Н. М. Крылова для обыкновенных дифференциальных уравнений. Дифференц. уравнения, 1969, т. 5, № 2.
3. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М., Изд-во МГУ, 1971.
4. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. М., «Наука», 1973.
5. *Banfi C.* Sull'approssimazione di processi non stazionari in mecanica non lineare, Boll. Unione mat. Ital., 1967, vol. 22, No. 4.
6. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Ташкент, «Фан», 1974.
7. *Реймерс Н. А., Ходжаев К. Ш.* Усреднение квазилинейных систем со многими быстрыми переменными. Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, № 8.
8. *Миркина А. С., Ходжаев К. Ш.* Аппроксимация нестационарных процессов на бесконечном интервале времени при экспоненциальной устойчивости медленных движений. ПММ, 1979, т. 43, вып. 2.
9. *Ветюков М. М., Ходжаев К. Ш.* Уравнения медленных движений систем с квазициклическими координатами и электромеханических систем. В сб.: Динамика систем, вып. 9. Изд-во Горьковск. ун-та, 1976.
10. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М., «Наука», 1967.