Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 5, 1980

УДК 531.36

# УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МОМЕНТОВ И УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ СО СКАЛЯРНЫМ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ ВОЗМУЩЕНИЕМ ЦЕПЬЮ МАРКОВА

**Е. Н. Березина, М. В. Левит**

(Ленинград)

Рассматриваются линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В условиях возмущения коэффициентов случайным марковским процессом с конечным числом состояний исследуется структура уравнений первых и вторых моментов. Предполагается метод анализа устойчивости по первому и второму моментам с помощью построения передаточных функций. Метод иллюстрируется на примере уравнения второго порядка, возмущенного симметричным телеграфным сигналом.

**1. Введение.** Основы исследования устойчивости дифференциальных уравнений с марковским возмущением были заложены в работе [1]. В работе [2] рассматривалась система $n$ линейных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{A}(\xi)\mathbf{x} \tag{1.1}$$

находящаяся под воздействием однородной марковской цепи $\xi_t$ с непрерывным временем, конечным множеством состояний $\{h_1, \ldots, h_N\}$ и инфинитезимальной матрицей $\mathbf{Q} = \{q_{ij}\}$. В [2,3] показано, что исследование среднеквадратичной устойчивости системы стохастических дифференциальных уравнений (1.1) можно свести к рассмотрению устойчивости детерминированной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\mathbf{M}_r^{\cdot}(t) = \mathbf{A}(h_r)\mathbf{M}_r(t) + \mathbf{M}_r(t)\mathbf{A}^T(h_r) + \sum_{j=1}^{N} q_{jr}\mathbf{M}_j(t), \quad r = 1, \ldots N \tag{1.2}$$

где $\mathbf{M}_r(t)$ — симметричные матрицы порядка $n$. Установлено [2], что среднеквадратичная устойчивость системы (1.1) эквивалентна асимптотической устойчивости тривиального решения линейной матричной системы (1.2).

Важно отметить, что

$$\langle \mathbf{x}\mathbf{x}^T \rangle = \sum_{r=1}^{N} \mathbf{M}_r \tag{1.3}$$

а это указывает на практическую возможность синтеза детерминированной системы, выходом которой служила бы матрица вторых моментов исходной стохастической системы. Рассуждения, аналогичные приведенным в работах [2,3], позволяют получить детерминированную систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для определения первых моментов

(1.4) $$\mathbf{m}_r^{\cdot}(t) = \mathbf{A}(h_r)\,\mathbf{m}_r(t) + \sum_{j=1}^{N} q_{jr}\mathbf{m}_j(t), \quad r = 1, \ldots, N$$

причем векторы $\mathbf{m}_r(t)$ таковы, что

(1.5) $$\langle \mathbf{x} \rangle = \sum_{r=1}^{N} \mathbf{m}_r$$

Устойчивость системы (1.4) — необходимое условие для среднеквадратичной устойчивости исходной системы (1.1).

Ниже исследуется структура систем (1.2) и (1.4) в наиболее важном на практике частном случае линейной зависимости матрицы $\mathbf{A}(\xi)$ от возмущения $\xi$

(1.6) $$\mathbf{A}(\xi) = \mathbf{A} + \xi \mathbf{b}\mathbf{c}^T$$

где $\mathbf{A}$ — постоянная матрица порядка $n \times n$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — постоянные векторы порядка $n$. Ограничение (1.6) дает возможность вывести простые условия устойчивости системы (1.4) в терминах передаточной функции $\chi(p) = \mathbf{c}^T(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$ линейного блока

(1.7) $$\mathbf{y}^{\cdot} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}v, \quad u = \mathbf{c}^T\mathbf{y}$$

от входа $v$ к выходу $u$ и в терминах заданных характеристик возмущения $\xi_t$. Предлагаемый в работе метод исследования устойчивости системы (1.4) первых моментов удается применить и к изучению системы (1.2) вторых моментов и окончательные условия устойчивости привести с использованием передаточной матрицы-функции $\mathbf{X}(p)$ линейного блока

(1.8) $$\mathbf{Y}^{\cdot} = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{A}^T + \mathbf{b}\mathbf{V}^T + \mathbf{V}\mathbf{b}^T, \quad \mathbf{U} = \mathbf{Y}\mathbf{c}$$

от векторного входа $\mathbf{V}$ к векторному выходу $\mathbf{U}$. Промежуточный результат работы — установление факта существования линейных невырожденных преобразований фазовых координат систем (1.4), (1.2), расщепляющих эти системы на $N$ однотипных блоков вида (1.7), (1.8). Использование этих преобразований приводит к упрощению структуры систем (1.4), (1.2), причем во множество их новых фазовых переменных непосредственно входят вектор первых моментов $\langle \mathbf{x} \rangle$ и матрица вторых моментов $\langle \mathbf{x}\mathbf{x}^T \rangle$. В наиболее важном случае, когда матрица $\mathbf{Q}$ имеет простую структуру, системам (1.4) и (1.2) можно придать вид

(1.9) $$u_i = \chi(p - \lambda_i)\,v_i, \quad v_i = \sum_{j=1}^{N} \varphi_{ij}u_j, \quad i = 1, \ldots, N$$

(1.10) $$\mathbf{U}_i = \mathbf{X}(p - \lambda_i)\,\mathbf{V}_i, \quad \mathbf{V}_i = \sum_{j=1}^{N} \varphi_{ij}\mathbf{U}_j, \quad i = 1, \ldots, N$$

соответственно. Здесь $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ — собственные числа матрицы $\mathbf{Q}$, а матрица $\Phi = \{\varphi_{ij}\}$ построена по заданным характеристикам цепи Маркова $\xi_t$. Устойчивость линейных детерминированных систем (1.9) и (1.10) и характеризует устойчивость в среднем и в среднем квадратичном исследуемой стохастической системы.

Таким образом, основное отличие предлагаемого ниже метода исследования стохастических систем (1.1), (1.6) от методов работы [2] состоит в анализе блочной структуры уравнений для моментов. По мнению авторов, подобный анализ с использованием передаточных функций блоков делает более доступным и следующий шаг исследования — определение спектральных характеристик стационарного случайного процесса при его прохождении через линейный блок, параметрически возмущенный цепью Маркова. Последний вопрос требует отдельного обсуждения и в данной работе не рассматривается.

**2. Исследование структуры уравнений для моментов.** Прежде всего дадим строгое определение векторов $m_r(t)$ и матриц $M_r(t)$

$$\mathbf{m}_r(t) = \langle \mathbf{x}_t \delta(h_r - \xi_t) \rangle, \quad \delta(s) = \begin{cases} 1, & s = 0 \\ 0, & s \neq 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\mathbf{M}_r(t) = \langle \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t^T \delta(h_r - \xi_t) \rangle, \quad r = 1, \ldots, N \tag{2.2}$$

Здесь $\mathbf{x}_t$ — решение стохастической системы (1.1). Из определений (2.1), (2.2) немедленно следуют равенства (1.3) и (1.5).

*Теорема 1.* Пусть вектор $\mathbf{x}_0$ и числа $P_1(0), \ldots, P_N(0)$ — начальные условия стохастической системы (1.1): $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$, $P_r(0) = P(\xi_0 = h_r)$. Тогда набор векторов (2.1) $\mathbf{m}_1(t), \ldots, \mathbf{m}_N(t)$ — решение системы уравнений (1.4) с начальными условиями $\mathbf{m}_r(0) = \mathbf{x}_0 p_r(0)$, $r = 1, \ldots, N$, а набор матриц $\mathbf{M}_1(t), \ldots, \mathbf{M}_N(t)$ — решение системы уравнений (1.2) с начальными условиями $\mathbf{M}_r(0) = \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T P_r(0)$, $r = 1, \ldots, N$. В предположении (1.6) исходная система принимает вид

$$\mathbf{x}^\cdot = \mathbf{A}\mathbf{x} + \xi_t \mathbf{b}\mathbf{c}^T \mathbf{x} \tag{2.3}$$

Исследуем структуру уравнений для моментов решений системы (2.3). Системы (1.4) и (1.2) ввиду (1.6) преобразуются следующим образом:

$$\mathbf{m}_r^\cdot(t) = \mathbf{A}\mathbf{m}_r(t) + h_r \mathbf{b}\mathbf{c}^T \mathbf{m}_r(t) + \sum_{j=1}^N q_{jr} \mathbf{m}_j(t) \tag{2.4}$$

$$\mathbf{M}_r^\cdot(t) = \mathbf{L}_a \mathbf{M}_r(t) + h_r \mathbf{L}_{bc} \mathbf{M}_r(t) + \sum_{j=1}^N q_{jr} \mathbf{M}_j(t) \tag{2.5}$$

$$\mathbf{L}_a \mathbf{Z} = \mathbf{A}\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\mathbf{A}^T, \quad \mathbf{L}_{bc} \mathbf{Z} = \mathbf{b}\mathbf{c}^T \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\mathbf{c}\mathbf{b}^T.$$

Здесь $\mathbf{L}_a$, $\mathbf{L}_{bc}$ — линейные операторы, действующие в пространстве симметричных матриц $\mathbf{Z}$ порядка $n$.

*Теорема 2.* Пусть инфинитезимальная матрица $\mathbf{Q}$ приводима к диагональной форме. Обозначим $\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_N$ собственные векторы матрицы $\mathbf{Q}$, отвечающие собственным числам $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$, и составим матрицу $\mathbf{D} = (\mathbf{d}_1, \ldots$

$\ldots, \mathbf{d}_N) = \{d_{ij}\}_1^N$. Тогда система для первых моментов (2.4) в результате линейного преобразования

$$(2.6)\qquad \mathbf{y}_i = \sum_{r=1}^{N} \mathbf{m}_r d_{ri}, \quad i = 1, \ldots, N$$

распадается на $N$ линейных блоков

$$(2.7)\qquad \mathbf{y}_i^{\cdot} = (\mathbf{A} + \lambda_i \mathbf{I}_n)\, \mathbf{y}_i + \mathbf{b} v_i,\ u_i = \mathbf{c}^T \mathbf{y}_i,\ i = 1, \ldots, N$$

связанных соотношениями

$$(2.8)\qquad v_i = \sum_{j=1}^{N} \varphi_{ij} u_j$$

а система для вторых моментов (2.5) после аналогичного преобразования

$$(2.9)\qquad \mathbf{Y}_i = \sum_{r=1}^{N} \mathbf{M}_r d_{ri}, \quad i = 1, \ldots, N$$

распадается на блоки

$$(2.10)\qquad \begin{aligned} &\mathbf{Y}_i^{\cdot} = (\mathbf{L}_a + \lambda_i \mathbf{I}_n)\, \mathbf{Y}_i + \mathbf{L}_b \mathbf{V}_i,\ \mathbf{U}_i^T = \mathbf{c}^T \mathbf{Y}_i,\ i = 1, \ldots, N \\ &\mathbf{L}_b \mathbf{z} = \mathbf{b}\mathbf{z}^T + \mathbf{z}\mathbf{b}^T \end{aligned}$$

с соотношениями связи

$$(2.11)\qquad \mathbf{V}_i = \sum_{j=1}^{N} \varphi_{ij} \mathbf{U}_j, \quad i = 1, \ldots, N$$

где

$$(2.12)\qquad \Phi = \{\varphi_{ij}\} = \mathbf{D}^T \mathbf{H}\, (\mathbf{D}^T)^{-1}, \quad \mathbf{H} = \mathrm{diag}\,[h_1, \ldots, h_N]$$

а $L_b$ — линейный оператор, отображающий пространство векторов порядка $n$ в пространство симметричных матриц порядка $n$.

Структура связей между блоками системы (2.7), (2.8) в случае возмущения цепью Маркова с тремя состояниями указана на фигуре, где приняты обозначения

$$\Sigma_i = \sum_{j=1}^{3} \varphi_{ij} u_j, \quad \chi_i = \chi(p - \lambda_i)$$

Аналогичное строение имеет и система (2.10), (2.11).

Структура систем (2.7), (2.8) и (2.10), (2.11) позволяет заметить следующее:

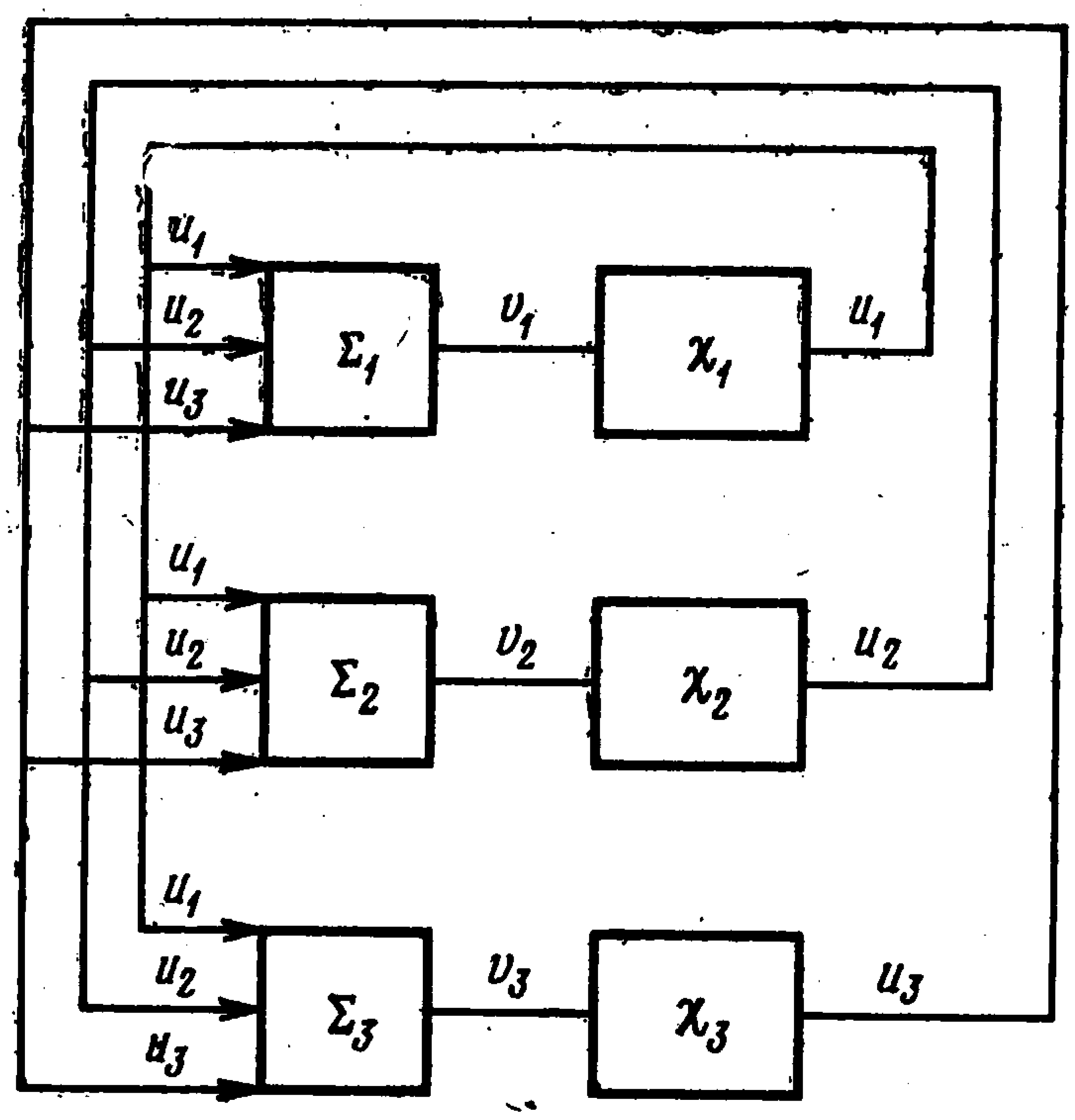
1°. Каждый из блоков (2.7) имеет скалярные вход $v_i$ и выход $u_i$ и описывается системой дифференциальных уравнений порядка $n$.

2°. Каждый из блоков (2.10) имеет векторные вход $\mathbf{V}_i$ и выход $\mathbf{U}_i$ порядка $n$ и описывается системой дифференциальных уравнений порядка $n(n + 1) / 2$.

3°. Первые блоки систем (2.7), (2.8) и (2.10), (2.11), в качестве фазовых координат имеют соответственно вектор первых моментов $\mathbf{y}_1 = \langle \mathbf{x} \rangle$ и матрицу вторых моментов $\mathbf{Y}_1 = \langle \mathbf{x}\mathbf{x}^T \rangle$ исходной стохастической системы (2.3) (предполагается, что $\lambda_1 = 0$, $\mathbf{d}_1^T = (1, \ldots, 1)$).

4°. Линейные преобразования фазовых переменных (2.6) и (2.9) невырождены, и поэтому устойчивость систем (2.4) и (2.5) эквивалентна устойчивости систем (2.7), (2.8) и (2.10), (2.11) соответственно.

Сделанные замечания указывают на возможность исследования устойчивости исходной системы (2.3) по первому и второму моментам на основе анализа передаточных функций и матриц-функций линейных блоков (2.7) и (2.10).




Аналогичные блочные представления систем (2.4) и (2.5) можно получить и в случае, когда матрица $\mathbf{Q}$ не приводится к диагональной форме. Для этого в качестве матрицы линейного преобразования $\mathbf{D}$ следует взять матрицу, приводящую матрицу $\mathbf{Q}$ к жордановой форме.

**3. Устойчивость по первому и второму моментам.** Уточним рассматриваемые в работе понятия устойчивости.

*Определение 3.1.* Будем говорить, что система (1.1) или (2.3) устойчива по первому (по второму) моменту, если асимптотически устойчиво в целом тривиальное решение линейной системы (1.4) (линейной системы (1.2)).

Так как системы (1.4) и (1.2) — линейные системы с постоянными коэффициентами, то устойчивость по первому (по второму) моменту означает, что $\langle \mathbf{x}_t \rangle \to 0$ при $t \to \infty$ ($\langle \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t^T \rangle \to 0$ при $t \to \infty$), причем порядок стремления к нулю экспоненциален. Согласно результату [2], устойчивость по второму моменту эквивалентна асимптотической устойчивости в среднем квадратичном. Заметим также, что определенная выше устойчивость по первому моменту необходима для асимптотической устойчивости в среднем и тем более в среднем квадратичном (см. упомянутые определения устойчивости в [4, 5]).

*Теорема 3.* Пусть инфинитезимальная матрица $\mathbf{Q}$ имеет простую структуру, $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ — собственные числа $\mathbf{Q}$, матрица $\mathbf{D} = (\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_N)$ составлена из соответствующих собственных векторов $Q$, матрицы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{\Phi}$ определены формулами (2.12), а $\chi(p)$ и $\mathbf{X}(p)$ — передаточные функции линейных блоков (1.7) и (1.8) соответственно, $\Delta_1(p) = \det(p\mathbf{I} - \mathbf{A})$ и $\Delta_2(p)$ — характеристический многочлен матричного дифференциального уравнения в (1.8) порядка $n(n+1)/2$. Тогда для устойчивости стохастической системы (2.3) по первому моменту необходимо и достаточно, чтобы многочлен

$$\Delta_1(p-\lambda_1) \ldots \Delta_1(p-\lambda_N) \det [\mathbf{I}_N - \operatorname{diag}[\chi(p-\lambda_1), \ldots \\ \ldots, \lambda(p-\lambda_N)]\,\mathbf{\Phi}] \tag{3.1}$$

был многочленом Гурвица, т. е. чтобы все его нули лежали на комплексной плоскости слева от мнимой оси. Для устойчивости стохастической системы (2.3) по второму моменту необходимо и достаточно, чтобы многочлен

$$(3.2)\qquad \Delta_2(p-\lambda_1)\ldots\Delta_2(p-\lambda_N)\det[\mathbf{I}_{Nn}-\operatorname{diag}[\mathbf{X}(p-\lambda_1),\ldots,\mathbf{X}(p-\lambda_N)]\,\mathbf{\Phi}\otimes\mathbf{I}_n]$$

был многочленом Гурвица. В формуле (3.2) $\mathbf{\Phi}\otimes\mathbf{I}_n$ означает прямое произведение матриц $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{I}_n$ (см. [6]).

Условия теорем 2 и 3 оставляют в стороне случай, когда матрица $\mathbf{Q}$ не приводится к диагональному виду. Тем не менее использование линейного преобразования, приводящего $\mathbf{Q}$ к жордановой форме, дает результаты, аналогичные сформулированным выше.

**4. Определение матричной передаточной функции.** Указанные в теореме 3 условия устойчивости по второму моменту предполагают, что известна передаточная матрица-функция $\mathbf{X}(p)$ линейного блока (1.8) от входа $\mathbf{V}$ к выходу $\mathbf{U}$. Эта функция представляет собой квадратную матрицу порядка $n$, элементы которой — правильные рациональные дроби со степенью знаменателя $n(n+1)/2$. Укажем два способа ее вычисления.

Первый способ использует векторное представление блока (1.8). Такое представление всегда можно получить, формируя вектор независимых фазовых координат $\mathbf{z}$ из $n(n+1)/2$ элементов матрицы $\mathbf{Y}$, лежащих на главной диагонали и выше, т. е.

$$(4.1)\qquad \mathbf{z}^{\boldsymbol\cdot}=\mathbf{A}_1\mathbf{z}+\mathbf{B}\mathbf{V},\quad \mathbf{U}=\mathbf{C}^T\mathbf{z}$$

Например, при $n=2$ в этом представлении

$$\mathbf{z}=\begin{Vmatrix} y_{11}\\ y_{12}\\ y_{22}\end{Vmatrix},\quad \mathbf{A}_1=\begin{Vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 0\\ a_{21} & a_{11}+a_{22} & a_{12}\\ 0 & 2a_{21} & 2a_{22}\end{Vmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{Vmatrix} 2b_1 & 0\\ b_2 & b_1\\ 0 & 2b_2\end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{Vmatrix} c_1 & 0\\ c_2 & c_1\\ 0 & c_2\end{Vmatrix}$$

где $a_{ij}$, $b_i$, $c_j$ — элементы матрицы $\mathbf{A}$ и векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

В силу представления (4.1) получаем $\mathrm{X}(p)=C^T(p\mathbf{I}_{n(n+1)/2}-\mathrm{A}_1)^{-1}\mathbf{B}$. К сожалению, с увеличением порядка $n$ быстро растут и размерности матриц $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$. Усложняются и формулы их построения. Поэтому представляет интерес вопрос определения передаточной матрицы $\mathrm{X}_{(p)}$ без обращения к векторному представлению (4.1).

Второй способ использует метод решения матричного уравнения Ляпунова, предложенный в работе [7]. Передаточная матрица характеризует зависимость между изображениями по Лапласу входа и выхода блока (1.8) следующим образом: $\mathbf{U}=\mathbf{X}(p)\,\mathbf{V}$. Эта же зависимость определяется соотношениями

$$p\mathbf{Y}=\mathbf{A}\mathbf{Y}+\mathbf{Y}\mathbf{A}^T+\mathbf{b}\mathbf{V}^T+\mathbf{V}\mathbf{b}^T,\quad \mathbf{U}=\mathbf{Y}\mathbf{c}$$

Поэтому столбцы $\mathbf{X}_i(p)$ матрицы $[\mathbf{X}_1(p),\ldots,\mathbf{X}_n(p)]=X(p)$ могут быть найдены как решения матричных алгебраических уравнений

$$(4.2)\qquad \left(\mathbf{A}-\frac{p}{2}\mathbf{I}\right)\mathbf{Y}+\mathbf{Y}\left(\mathbf{A}-\frac{p}{2}\mathbf{I}\right)^T=-(\mathbf{b}\mathbf{e}_i^T+\mathbf{e}_i\mathbf{b}^T),\quad \mathbf{X}_i(p)=\mathbf{Y}\mathbf{c}$$

$$i=1,\ldots,n$$

Здесь $\mathbf{e}_i$ — вектор порядка $n$, у которого координата с номером $i$ равна единице, а остальные координаты равны нулю. Согласно [7], для вычисления столбцов $\mathbf{X}_i(p)$ нужно выполнить следующие операции.

1. Определить коэффициенты $f_j(p)$ и $\mathbf{F}_j(p)$ скалярного и матричного многочленов $f(\lambda, p)$ и $\mathbf{F}(\lambda, p)$

$$f(\lambda, p) = \lambda^n + f_1(p)\lambda^{n-1} + \ldots + f_n(p) = \det\left(\left(\lambda + \frac{p}{2}\right)\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)$$

$$\mathbf{F}(\lambda, p) = \mathbf{F}_1(p)\lambda^{n-1} + \ldots + \mathbf{F}_n(p) = f(\lambda, p)\left(\left(\lambda + \frac{p}{2}\right)\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}$$

Причем для вычисления коэффициентов матричного многочлена $F(\lambda, p)$ можно использовать рекуррентные формулы

$$\mathbf{F}_1(p) = \mathbf{I}, \quad \mathbf{F}_2(p) = \left(\mathbf{A} - \frac{p}{2}\mathbf{I}\right)\mathbf{F}_1(p) + f_1(p)\mathbf{I}, \ldots, \mathbf{F}_n(p) =$$
$$= \left(\mathbf{A} - \frac{p}{2}\mathbf{I}\right)\mathbf{F}_{n-1}(p) + f_{n-1}\mathbf{I}$$

2. Найти первую строчку $[\alpha_1(p), \ldots, \alpha_n(p)]$ матрицы $[\mathbf{H}_n(f)]^{-1}$, где $\mathbf{H}_n(f)$ — матрица Гурвица многочлена $f(\lambda, p)$

$$\mathbf{H}_n(f) = \begin{Vmatrix} f_1(p) & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ f_3(p) & f_2(p) & f_1(p) & \ldots & 0 \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdots & \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdots & \cdot\ \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & f_{n-2}(p) \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & f_n(p) \end{Vmatrix}$$

3. Определить $n$-мерные столбцы

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{g}_1(p) \\ \mathbf{g}_2(p) \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{g}_n(p) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{F}_1(p) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \mathbf{F}_3(p) & \mathbf{F}_2(p) & \mathbf{F}_1(p) & \ldots & 0 \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\ \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & \mathbf{F}_n(p) \end{Vmatrix} \times$$
$$\times \begin{Vmatrix} (\mathbf{b}\mathbf{e}_i^T + \mathbf{e}_i\mathbf{b}^T)\mathbf{F}_1^T(p)\mathbf{c} \\ -(\mathbf{b}\mathbf{e}_i^T + \mathbf{e}_i\mathbf{b}^T)\mathbf{F}_2^T(p)\mathbf{c} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (-1)^{n-1}(\mathbf{b}\mathbf{e}_i^T + \mathbf{e}_i\mathbf{b}^T)\mathbf{F}_n^T(p)\mathbf{c} \end{Vmatrix}$$

4. Вычислить столбец

$$\mathbf{X}_i(p) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(p)\mathbf{g}_j(p)$$

**5. Пример.** Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x^{\cdot\cdot} + (a_1 + \alpha\xi)x^{\cdot} + (a_2 + \beta\xi)x = 0 \tag{5.1}$$

подверженное возмущению симметричным телеграфным сигналом. Под последним понимаем марковскую цепь $\xi_t$ с двумя состояниями $h$ и $-h$ и инфинитезимальной матрицей

$$\mathbf{Q} = \begin{Vmatrix} -\lambda & \lambda \\ \lambda & -\lambda \end{Vmatrix}$$

положительны. В этом случае матрица $\mathbf{Q}$ имеет простую структуру, числа равны $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2\lambda$, им соответствуют собственные векторы $\mathbf{d}_2 = (1, -1)^T$. Согласно определению (2.12), получаем матрицу

$$\mathbf{\Phi} = h\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

для исследования устойчивости по первому моменту найдем передаточную функю системы (5.1) от входа $v = \alpha\xi x^{\cdot} + \beta\xi x$ к выходу $u = \alpha x^{\cdot} + \beta x$

$$\chi(p) = \frac{\gamma(p)}{\Delta_1(y)} = -\frac{\alpha p + \beta}{p^2 + a_1 p + a_2}$$

Многочлен (3.1) примет вид

$$\Delta_1(p)\Delta_1(p + 2\lambda) - h^2\gamma(p)\gamma(p + 2\lambda) \tag{5.2}$$

Уравнение (5.1) устойчиво по первому моменту, если (5.2) — многочлен Гурвица.

Интересно отметить, что асимптотическая устойчивость тривиального решения невозмущенного уравнения $x^{\cdot\cdot} + a_1 x^{\cdot} + a_2 x = 0$ не является необходимым условием устойчивости (5.1) по первому моменту. Так, например, уравнение

$$x^{\cdot\cdot} + (1 + \xi)x^{\cdot} - \lambda\xi x = 0 \tag{5.3}$$

устойчиво по первому моменту при любом $\lambda > 0$ и $h = 1$. Это означает, что $\langle x_t\rangle \to 0$ и $\langle x_t^{\cdot}\rangle \to 0$ при $t \to \infty$. Тем не менее тривиальное решение невозмущенного уравнения $x^{\cdot\cdot} + x^{\cdot} = 0$ не является асимптотически устойчивым и, более того, реализации решения возмущенного уравнения (5.3) подчиняются на одних интервалах времени неустойчивому уравнению $x^{\cdot\cdot} + 2x^{\cdot} - \lambda x = 0$, а на других интервалах — асимптотически неустойчивому уравнению $x^{\cdot\cdot} + \lambda x = 0$.

Для исследования уравнения (5.1) по второму моменту найдем передаточную матрицу $\mathbf{X}(p)$ линейного блока (1.8), в котором

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{Vmatrix} -\beta \\ -\alpha \end{Vmatrix}$$

Согласно изложенному в п. 4, получаем

$$\mathbf{X}(p) = \frac{\varkappa(p)}{\Delta_2(p)}, \quad \varkappa(p) = \begin{Vmatrix} (p + 2a_1)(\alpha p + 2\beta) & 2\alpha p + 4\beta \\ p(-2\alpha a_2 + \beta(p + 2a_1)) & 2\alpha(p^2 + a_1 p + 2a_2) + 2\beta p \end{Vmatrix}$$

$$\Delta_2(p) = (p + a_1)(p^2 + 2a_1 p + 4a_2)$$

и многочлен (3.2) принимает вид

$$\Delta_2(p)\Delta_2(p + 2\lambda) - h^2\,\mathrm{sp}\,[\varkappa(p + 2\lambda)\varkappa(p)] + h^4 4\alpha^2(\alpha p + 2\beta)(\alpha(p + 2\lambda) + 2\beta) \tag{5.4}$$

Уравнение (5.1) устойчиво по второму моменту, если (5.4) — многочлен Гурвица.

Для уравнения (5.3) многочлен (5.4) не может быть многочленом Гурвица, так как его свободный член равен $(-16\lambda^3(\lambda + 1))$ и потому отрицателен при всех $\lambda > 0$. Таким образом, уравнение (5.3) не может быть устойчивым по второму моменту.

**6. Доказательство теорем 1—3.** В теореме 1 докажем лишь первое утверждение, ибо второе было доказано в [2, 3]. Запишем систему (1.1) в интегральном виде

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{A}(\xi_\tau)\,\mathbf{x}_\tau\,d\tau$$

умножим обе части на функцию $\delta(h_r - \xi_t)$ (см. (2.1)) и применим операцию математического ожидания

$$\mathbf{m}_r(t) = \mathbf{x}_0 p_r(t) + \int_0^t \langle \mathbf{A}(\xi_\tau)\,\mathbf{x}_\tau\delta(h_r - \xi_t)\rangle\,d\tau$$

Преобразуем выражение под знаком интеграла, чтобы получить си… …ных уравнений для функций $\mathbf{m}_r(t)$.

Применим операцию условного математического ожидания ($\langle\cdot\rangle =$ … $\tau \leqslant t$

$$\langle \mathbf{A}(\xi_\tau)\,\mathbf{x}_\tau\delta(h_r-\xi_t)\rangle = \sum_{j=1}^{N} \langle \mathbf{A}(\xi_\tau)\,\mathbf{x}_\tau\delta(h_j-\xi_\tau)\,\delta(h_r-\xi_t)\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \langle \mathbf{A}(\xi_\tau)\,\mathbf{x}_\tau\delta(h_j-\xi_\tau)\,\langle\delta(h_r-\xi_t)\,|\,\xi_\tau\rangle\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \langle \mathbf{A}(h_j)\,\mathbf{x}_\tau\delta(h_j-\xi_\tau)\,\langle\delta(h_r-\xi_t)\,|\,\xi_\tau = h_j\rangle\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \mathbf{A}(h_j)\,\langle \mathbf{x}_\tau\delta(h_j-\xi_\tau)\rangle\,\langle\delta(h_r-\xi_t)\,|\,\xi_\tau = h_j\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \mathbf{A}(h_j)\,\mathbf{m}_j(\tau)\,\pi_{jr}(t-\tau)$$

Здесь $\{\pi_{jr}(t)\}_{j,r=1}^{N} = \pi(t)$ — матрица переходных вероятностей марковской цепи за время $t$.

Отсюда следует, что векторные функции $m_r(t)$ удовлетворяют системе

$$\mathbf{m}_r(t) = \mathbf{x}_0 p_r(t) + \int_0^t \sum_{j=1}^{N} \mathbf{A}(h_j)\,\mathbf{m}_j(\tau)\,\pi_{jr}(t-\tau)\,d\tau, \qquad r = 1,\ldots,N \tag{6.1}$$

Система уравнений (1.4) получается дифференцированием правой и левой части (6.1).

В доказательствах теорем 2 и 3 будем использовать понятие прямого произведения матриц. Все необходимые свойства прямого произведения квадратных матриц можно найти в [6,8]. Используя обозначения (2.12), $\mathbf{m}^T = \mathbf{m}^T(t) = [\mathbf{m}_1{}^T(t), \ldots, \mathbf{m}_N{}^T(t)]$, $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}^T(t) = [\mathbf{M}_1(t), \ldots, \mathbf{M}_N(t)]$ и символ $\otimes$ прямого произведения, преобразуем системы (2.4) и (2.5) к виду

$$\mathbf{m}^\cdot = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A})\,\mathbf{m} + (\mathbf{H} \otimes \mathbf{b}\mathbf{c}^T)\,\mathbf{m} + (\mathbf{Q}^T \otimes \mathbf{I}_n)\,\mathbf{m} \tag{6.2}$$

$$\mathbf{M}^\cdot = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{L}_a)\,\mathbf{M} + (\mathbf{H} \otimes \mathbf{L}_{bc})\,\mathbf{M} + (\mathbf{Q}^T \otimes \mathbf{I}_n)\,\mathbf{M} \tag{6.3}$$

Докажем первое утверждение теоремы 2, а именно получим систему (2.7), (2.8), эквивалентную системе (2.4). В системе (6.2) сделаем линейную замену (2.6) $\mathbf{y} = (\mathbf{D}^T \otimes \mathbf{I}_n)\,\mathbf{m}$ и выпишем систему линейных дифференциальных уравнений для новых фазовых переменных $\mathbf{y}^T = [\mathbf{y}_1{}^T, \ldots, \mathbf{y}_N{}^T]$

$$\mathbf{y}^\cdot = (\mathbf{D}^T \otimes \mathbf{I}_n)\,[(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A}) + (\mathbf{H} \otimes \mathbf{b}\mathbf{c}^T) + (\mathbf{Q} \otimes \mathbf{I}_n)]\,[(\mathbf{D}^T)^{-1} \otimes \mathbf{I}_n]\,\mathbf{y} \tag{6.4}$$

Пользуясь свойствами прямого произведения и обозначениями

$$\Phi = \mathbf{D}^T\mathbf{H}\,(\mathbf{D}^T)^{-1}, \quad \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$$

получим

$$\mathbf{y}^\cdot = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A})\,\mathbf{y} + (\Phi \otimes \mathbf{b})\,(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{c}^T)\,\mathbf{y} + (\Lambda \otimes \mathbf{I}_n)\,\mathbf{y} \tag{6.5}$$

Расщепляя систему (6.5) на блоки, переходим к требуемым соотношениям (2.7), (2.8). Второе утверждение теоремы 2 доказывается аналогично — с использованием векторного представления матричных уравнений.

Для доказательства теоремы 3 достаточно показать, что характеристические многочлены линейных систем (2.10), (2.11) и (2.7), (2.8) имеют вид (3.2) и (3.1) соответственно. Согласно сказанному в п. 4, матричная система (2.10), (2.11) — линейная

где числа $h$ и $\lambda$ $n(n+1)N/2$ и имеет блочное векторное представление вида
ее собственные $= (\mathbf{A}_i + \lambda_i \mathbf{I})\,\mathbf{z}_i + \mathbf{B}\mathbf{V}_i,\ \mathbf{U}_i = \mathbf{C}^T\mathbf{z}_i,\ i = 1, \ldots, N.$
$\mathbf{d}_1 = (1, 1)^T$ и
ями связи между блоками (2.11). Здесь $\mathbf{A}_i$ — квадратная матрица порядка 2, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ — прямоугольные матрицы размерности $n(n+1)/2 \times n$. Си .7), (2.8) и (6.6), (2.11) однотипны и различаются лишь размерностью фазовых, ых и выходных векторов. Ограничимся вычислением характеристического многочлена системы (2.7), (2.8). Вводя обозначения

$$\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} + \Lambda \otimes \mathbf{I}_n = \mathbf{A}_2,\quad \Phi \otimes \mathbf{b} = \mathbf{B}_2,\quad \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{c}^T = \mathbf{C}_2^T$$

представим систему (6.5) в виде

$$\mathbf{y}^\cdot = (\mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{C}_2^T)\,\mathbf{y} \tag{6.7}$$

Вычислим ее характеристический многочлен. Известно (см. [8], стр. 132), что

$$\det[p\mathbf{I}_{nN} - (\mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2 C_2^T)] =$$
$$= \det(p\mathbf{I}_{nN} - \mathbf{A}_2)\cdot \det[\mathbf{I}_N - \mathbf{C}_2^T(p\mathbf{I}_{nN} - \mathbf{A}_2)^{-1}\mathbf{B}_2]$$

Далее

$$\det(p\mathbf{I}_{nN} - \mathbf{A}_2) = \Delta_1(p - \lambda_1)\ldots\Delta_1(p - \lambda_N)$$
$$\mathbf{C}_2^T(p\mathbf{I}_{nN} - \mathbf{A}_2)^{-1}\mathbf{B}_2 = \operatorname{diag}[\chi(p - \lambda_1), \ldots, \chi(p - \lambda_N)]\,\Phi$$

Окончательно, $\det[p\mathbf{I}_{nN} - (\mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{C}_2^T)]$ равен многочлену (3.1), что и требовалось доказать.

Поступила 12 XI 1979

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Кац И. Я., Красовский Н. Н.* Об устойчивости систем со случайными параметрами. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
2. *Мильштейн Г. Н.* Среднеквадратичная устойчивость линейных систем, находящихся под воздействием марковской цепи. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
3. *Мильштейн Г. Н., Репин Ю. М.* О воздействии марковского процесса на систему дифференциальных уравнений. Дифференц. уравнения, 1969, т. 5, № 8.
4. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., «Наука», 1969.
5. *Евланов Л. Г., Константинов В. М.* Системы со случайными параметрами. М., «Наука», 1976.
6. *Ланкастер П.* Теория матриц. М., «Наука», 1978.
7. *Левит М. В.* О вычислении решений некоторых матричных уравнений. Вестн. Ленингр. ун-та, 1973, № 1, вып. 1.
8. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М., «Наука», 1969.