

ИГРОВАЯ ЗАДАЧА СИНТЕЗА МНОГОИМПУЛЬСНОЙ КОРРЕКЦИИ ДВИЖЕНИЯ

А. А. Меликян

(Москва)

Рассматривается динамическая система, подверженная действию помех, ограниченных по величине. Отклонение, вызванное помехами, корректируется конечным числом импульсов, суммарный ресурс которых ограничен. Исследуется задача синтеза оптимальной коррекции, элементами которого являются некоторые (сигнальные) поверхности. Применение метода динамического программирования приводит к краевой задаче с неизвестной границей. Получены необходимые условия (соотношения (2.5)) оптимальности искомой границы (сигнальной поверхности). Эти условия вместе с известными соотношениями динамического программирования образуют полную систему необходимых условий, позволяющую построить решение задачи. Предложенный подход применяется к двухпараметрической системе, допускающей автономные решения.

Работа близка по тематике к исследованиям [1-4]; программный подход к задачам импульсной коррекции применялся в работах [3-5]; работы [6-9] содержат исследования синтеза оптимальной коррекции в стохастических системах.

1. Постановка задачи. Пусть движение динамической системы на фиксированном интервале времени $[t_0, T]$ описывается дифференциальным уравнением и начальным условием

$$(1.1) \quad \dot{x} = f(x, v, t) + B(t)u, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad x(t_0) = x^0$$

Здесь $x \in R^n$ — фазовый вектор системы, $B(t)$ — $n \times n$ -матрица, непрерывная по t , $u \in R^n$ — управляющее воздействие, $v \in R^m$ — вектор помех, значение которого в момент t подчинено ограничению

$$(1.2) \quad v(t) \in V_t \subset R^m, \quad m \leq n$$

где V_t — выпуклое компактное множество, непрерывно зависящее от времени. Допустимыми помехами считаются суммируемые функции времени $v(t)$, $t_0 \leq t \leq T$, удовлетворяющие ограничению (1.2).

Будем предполагать, что реализация во времени управления u является суммой конечного числа дельта-функций

$$(1.3) \quad u(t) = \sum_{i=1}^N u_i \delta(t - t_i), \quad t_0 \leq t_1 < \dots < t_N \leq T, \quad \sum_{i=1}^N R(u_i) \leq Q < 0$$

Суммарное число импульсов N и их ресурс Q заданы. Интенсивность отдельного импульса оценивается с помощью непрерывной скалярной функции $R(u)$, $R(u) > 0$, $u \in R^n$, $u \neq 0$, $R(0) = 0$.

Управляющее воздействие призвано нейтрализовать действие помех в смысле минимизации функционала

$$(1.4) \quad J = F(x(T))$$

где $F(x)$ — заданная непрерывная функция, ограниченная снизу.

Предполагается, что функция $f(x, v, t)$ в (1.1) непрерывна по совокупности аргументов x, v, t и удовлетворяет условию Липшица по x , так что для любых допустимой помехи $v(t)$ и вектора $x' \in R^n$ существует единственное решение задачи Коши [10] на интервале $[t', T]$, $t_0 \leq t' < T$

$$(1.5) \quad \dot{x} = f(x, v, t), \quad t' \leq t \leq T, \quad x(t') = x'$$

Движение (решение) системы (1.5) будем называть неуправляемым движением системы (1.1).

Далее будем рассматривать позиционный способ формирования управления u . Произвольное текущее состояние системы (1.1) полностью описывается заданием позиции (x, q, t, k) , $x \in R^n$, $q \in [0, Q]$, $t \in [t_0, T]$, $k = 0, 1, \dots, N$, где величина q имеет смысл суммарной интенсивности на разрешенные k импульсов. Вектор x для определенности трактуется как фазовое состояние системы до возможного импульса в момент t , т. е. $x = x(t-0)$.

Будем говорить, что задано позиционное управление (синтез), если в пространстве (x, q, t) заданы сигнальные гиперповерхности Γ_k , которые разделяют рассматриваемую область этого пространства для каждого $k = 1, \dots, N$ на два множества G_k и D_k (фигура) и функции $u_k = u_k(x, q, t)$ для $(x, q, t) \in D_k$. Поверхность Γ_k принадлежит границе замкнутого множества D_k .

Если в начальный момент имеет место $(x, q, t) \in D_k$ (точка 1 на фигуре), то сразу же подается первый из k допустимых импульсов интенсивностью $u_k(x, q, t)$. В точках множества G_k полагаем $u_k(x, q, t) = 0$; импульс подается лишь по достижении изображающей точки (x, q, t) сигнальной поверхности Γ_k (точка 2). По определению полагаем $\Gamma_0 = D_0 = \{(x, q, t): t = T\}$.

Из (1.3) вытекают следующие ограничения на синтез:

$$(1.6) \quad R(u_k(x, q, t)) \leq q, \quad k = 1, \dots, N$$

$$(x^+, q^+, t) \in G_{k-1} \cup M_0, \quad M_0 = \{(x, q, t): q = 0\}, \quad k = 2, \dots, N$$

$$x^+ = x + B(t)u_k, \quad q^+ = q - R(u_k)$$

Здесь M_0 — множество в пространстве (x, q, t) , соответствующее нулевому ресурсу. Включение в (1.6) обеспечивает разнесенность во времени двух последовательных ненулевых импульсов, т. е. строгие неравенства в (1.3).

Совокупность (u_k, Γ_k) , $k = 1, \dots, N$, удовлетворяющую ограничениям (1.6), будем называть допустимым синтезом и обозначать для краткости через u . Отметим, что поверхности Γ_k можно было специально не

выделять, а рассматривать их через посредство функций $u_k(x, q, t)$ как границы множеств, на которых $u_k = 0$. В терминах Γ_k , однако, записываются необходимые условия оптимальности, приведенные далее в работе.

По заданным допустимым синтезу u , помехе v и позиции (x, q, t, k) определяется единственная фазовая траектория $x(\tau)$, $\tau \in [t, T]$ системы (1.1), имеющая не более $k + 1$ интервалов абсолютной непрерывности.

Опишем алгоритм построения траектории. Если $q = 0$ или $k = 0$, то движение системы (1.1) неуправляемо и приведенное утверждение справедливо. Пусть $q, k > 0$. Рассматривается неуправляемое движение $x(\tau)$, $\tau \in [t, T]$, $x(t) = x$ и находится наименьший момент времени $\tau = t_1 \in [t, T]$, для которого выполнено включение $x(\tau) \in D_k$. Если для всех $\tau \in [t, T]$ имеет место $x(\tau) \notin D_k$, то построение траектории завершено. В противном случае по изображающей точке до скачка (x_1, q, t_1) , $x_1 = x(t_1)$, строится изображающая точка после скачка (x_1^+, q^+, t_1) согласно равенствам (1.6). Если $t_1 = T$, то построение закончено, траектория завершается скачком в момент T . В случае $t \leq t_1 < T$ приходим к исходной ситуации с позицией $(x_1^+, q^+, t_1, k - 1)$. Процедура повторяется не более k раз, и процесс заканчивается либо построением последней неуправляемой части траектории, либо скачком в момент T . В последнем случае для подсчета функционала (1.4) следует брать вектор $x(T + 0)$.

Итак, заданным $u, v(x, q, t, k)$ отвечает единственная траектория системы (1.1) и, соответственно, значение $J = J(u, v, x, q, t, k) = F(x(T))$ функционала (1.4).

Определим функцию Беллмана $S_k(x, q, t)$, $k = 0, 1, \dots, N$, $x \in R^n$, $q \in [0, Q]$, $t \in [t_0, T]$ равенством

$$(1.7) \quad S_k(x, q, t) = \min_u \sup_v J$$

в предположении, что минимум существует. Экстремумы в (1.7) вычисляются по тем частям допустимых синтезов и помех, которые определяют движение из позиции (x, q, t, k) . Продолжим функции $S_k(x, q, t)$, $k = 1, \dots, N$ на границу $t = T$ по непрерывности и доопределим там функцию S_0 равенством

$$(1.8) \quad S_0(x, q, T) = F(x)$$

Можно показать, что тогда функции $S_k(x, q, t)$, $k = 0, 1, \dots, N$ непрерывны для $x \in R^n$, $q \in [0, Q]$, $t \in [t_0, T]$. Величина $S_k(x, q, t)$ — минимальное гарантированное значение функционала (1.4), если движение системы (1.1) начинается в момент t из точки x и на k импульсов коррекции задан ресурс q . По смыслу задачи и из равенства (2.1) следует, что функции $S_k(x, q, t)$ убывают, вообще говоря, с ростом q или k .

Отметим, что вопрос о достаточных условиях существования оптимального синтеза для системы (1.1) — (1.3) является предметом специального исследования и в данной работе не рассматривается.

2. Необходимые условия. Введем в рассмотрение функции $S_k^+(x, q, t)$,

$x \in R^n$, $q \in [0, Q]$, $t \in [t_0, T]$, положив по определению

$$(2.1) \quad S_k^+(x, q, t) = \min_u S_{k-1}(x + B(t)u, q - R(u), t), \quad R(u) \leq q \\ k = 1, \dots, N$$

Из непрерывности функций S_k и R следует непрерывность S_k^+ в области ее определения. Пусть, далее, $S(x, t)$ — дифференцируемая по x и t скалярная функция. Примем обозначение

$$(2.2) \quad P(S) = \frac{\partial S}{\partial t} + \max_v \left(\frac{\partial S}{\partial x}, f(x, v, t) \right), \quad v \in V_t$$

в котором скалярное произведение вектора градиента с вектором правых частей в (1.5) указано круглыми скобками.

Предположим, что существует оптимальный синтез u , т. е. оптимальные u_k и Γ_k , а функции S_k , S_k^+ имеют в рассматриваемых областях непустые множества точек непрерывной дифференцируемости. Тогда имеет место следующая система необходимых условий оптимальности:

$$(2.3) \quad P(S_k) = 0, \quad (x, q, t) \in G_k, \quad S_k|_{\Gamma_k} = S_k^+, \quad S_0^+|_{\Gamma_0} = F(x) \\ k = 0, 1, \dots, N$$

$$(2.4) \quad S_k(x, q, t) = S_k^+(x, q, t), \quad (x, q, t) \in D_k, \quad k = 1, \dots, N$$

$$(2.5) \quad P(S_k^+) \geq 0, \quad (x, q, t) \in D_k$$

$$P(S_k^+) \leq 0, \quad (x, q, t) \in G_k \cap N^e, \quad k = 1, \dots, N$$

Соотношения, содержащие оператор P , имеют место в точках непрерывной дифференцируемости функций S_k , S_k^+ . Второе неравенство (2.5) рассматривается в ε -окрестности только таких точек $N = (x', q', t')$ границы Γ_k , для которых существует ненулевой интервал $0 < \delta < \delta_0(N)$ значений δ , удовлетворяющих при некотором $\varepsilon = \varepsilon(N) > 0$ условию

$$(2.6) \quad (x, q, t - \delta) \in G_k, \quad (x, q, t + \delta) \in D_k, \quad (x, q, t) \in \Gamma_k \cap N^e$$

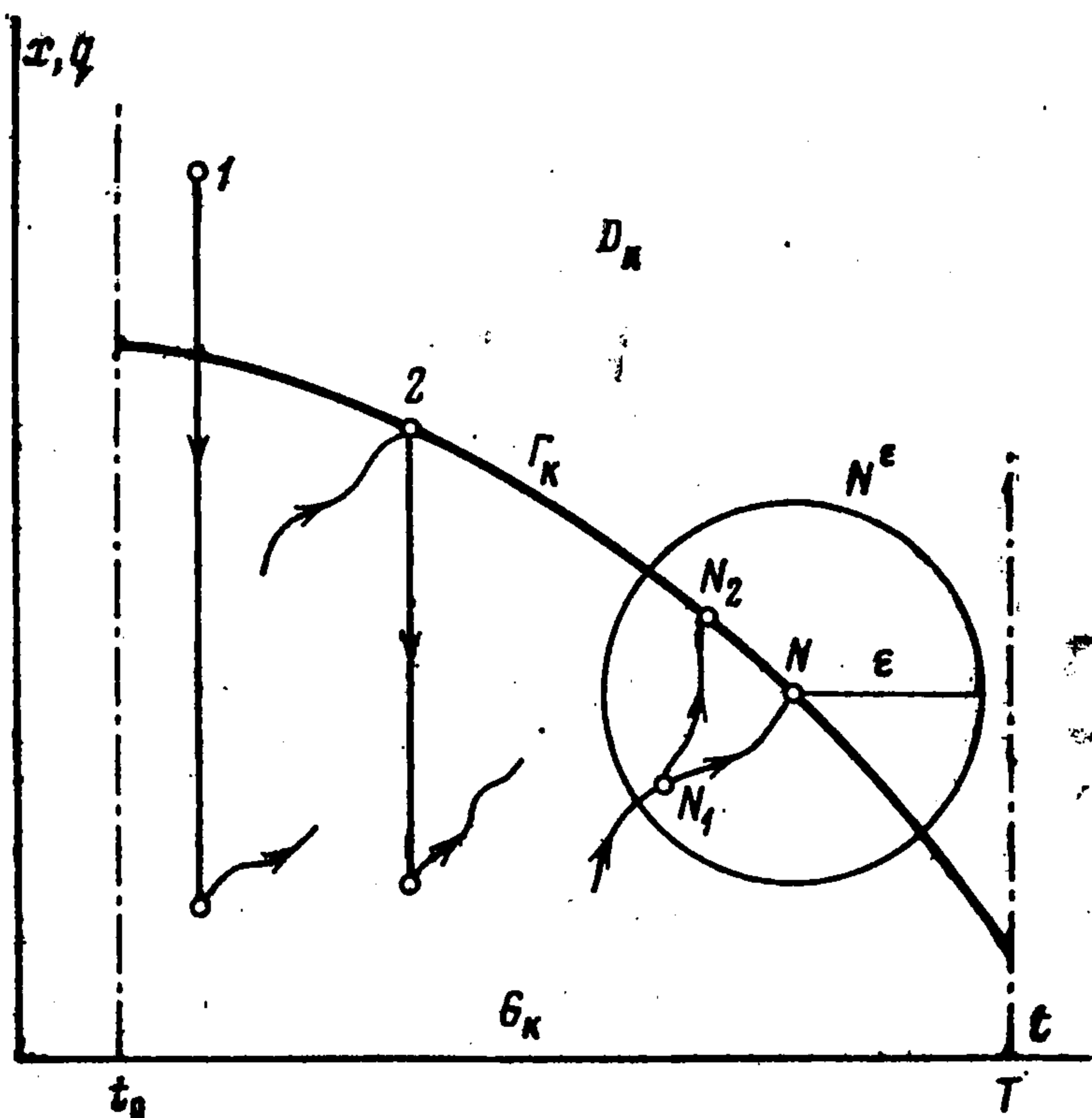
Условие (2.6) означает, что прямая, параллельная оси t в пространстве (x, q, t) , строго пересекает в точке N поверхность Γ_k .

Обратимся к обоснованию необходимости условий (2.3)—(2.5)

Равенство (2.4) вытекает из определения функций S_k и S_k^+ , области D_k и выражает соотношение дискретного динамического программирования [11]. Условия (2.3) — соотношения динамического программирования для непрерывной системы; их можно получить рассмотрев в области G_k вспомогательный управляемый процесс (1.5) с параметром q , условием окончания $(x, q, t) \in \Gamma_k$ и максимизируемым функционалом, равным величине $S_k^+(x, q, t)$ в момент окончания процесса.

Для обоснования первого неравенства в (2.5) рассмотрим произвольную внутреннюю точку (x, q, t) множества D_k ; q здесь играет роль параметра, поэтому можно допускать для него и граничные значения $0, Q$. Из оптимальности рассматриваемого синтеза следует, что для любого достаточно малого $\Delta t > 0$ найдется помеха $v(\tau)$, $t \leq \tau \leq t + \Delta t$, такая, что для соответствующего приращения Δx фазового вектора в силу (1.5) $(x + \Delta x, q, t + \Delta t) \in D_k$, $S_k^+(x, q, t) \leq S_k^+(x + \Delta x, q, t + \Delta t)$. Иными словами, если управляющая сторона во множестве D_k медлит с подачей импульса, то существует помеха, которая ухудшает, вообще говоря, позицию с точки зрения минимизации функционала. Максимизируя правую часть приведенного неравенства по v и положив $\Delta t \rightarrow 0$, приходим к неравенству $P(S_k) = P(S_k^+) \geq 0$.

Дадим схему доказательства второго неравенства (2.5). Предположим противное: существует точка $N = (x, q, t) \in \Gamma_k$, обладающая свойством (2.6), и ее ε -окрестность N^ε с некоторым $\varepsilon > 0$, для которых имеет место строгое неравенство $P(S_k^+) > 0$ при $(x, q, t) \in N^\varepsilon \cap G_k$. Рассмотрим на характеристике упомянутой выше вспомогательной задачи оптимального управления точку N_1 , достаточно близкую к N (фигура). Предположив противное, можно указать такое значение помехи на участке движения от N_1 к Γ_k , что для новой точки N_2 выхода на границу получим $S_k^+(N) \leq S_k^+(N_1) < S_k^+(N_2)$ в противоречие с тем, что из точки N_1 наихудшая помеха приводит к величине $S_k^+(N)$ для функционала J .



Отметим, что если величина $P(S_k^+)$ непрерывна в окрестности Γ_k , то условие (2.5) дает для точек $(x, q, t) \in \Gamma_k$ равенство

$$(2.7) \quad P(S_k^+) = 0$$

которое при известной функции S_k^+ можно трактовать как неявное задание поверхности Γ_k .

Опишем алгоритм построения оптимальных функций S_k, u_k и границ Γ_k с помощью условий (2.3) — (2.5), (2.7).

Этап 1. Для некоторого k известны граница Γ_k , область D_k и функции $u_k, S_k = S_k^+$ в этой области. Решается краевая задача (2.3): $P(S_k) = 0, S_k = S_k^+$ при $(x, q, t) \in \Gamma_k$. Функция $S_k(x, q, t)$ становится известна во всей рассматриваемой области $D_k \cup G_k$. При решении краевой задачи находятся значения наихудшей помехи, доставляющие максимум по v в операторе P .

Этап 2. По известной функции S_k строится согласно (2.1) функция S_{k+1}^+ для всех (x, q, t) , т. е. в области $G_{k+1} \cup D_{k+1}$. Тем самым найдены функции S_{k+1} и u_{k+1} в неизвестной пока еще области D_{k+1} , см. (2.4). Величина u_{k+1} доставляет минимум в (2.1).

Этап 3. С помощью построенной функции S_{k+1}^+ по соотношениям (2.5), (2.7) находится граница Γ_{k+1} как множество точек (x, q, t) , на котором величина $P(S_{k+1})$ меняет знак, либо обращается в нуль. После этого можно обратиться к этапу 1 при числе импульсов, равном $k + 1$.

Работа алгоритма начинается с этапа 1 для $k = 0$ при заданных в (2.3) $D_0 = \Gamma_0$ и $S_0^+ = F(x)$.

Сделаем замечание о применении соотношений (2.5), (2.7). Нахождение границы Γ_1 качественно отличается от случая $\Gamma_k, k > 1$, поскольку минимум по u в (2.1) для $S_k^+, k > 1$ в окрестности точек $(x, q, t) \in \Gamma_k$ достигается во внутренней точке $u^*, R(u^*) < q$. Это объясняется тем, что на последующие импульсы коррекции должен остаться ненулевой ресурс. Поэтому при $k > 1$ можно ожидать гладкости функции S_k^+ в окрестности Γ_k и применять для нахождения границы равенство (2.7). Можно показать, что при некоторых предположениях о функциях f, F, R поверхность Γ_1 лежит на границе множества точек (x, q, t) , для которых минимум (2.1) достигается

на u^* , таких, что $R(u^*) < q$. Таким образом, по разные стороны границы Γ_1 характер минимума (2.1) различен, что может явиться источником негладкости функции S_k^+ на Γ_1 .

3. Оптимальная коррекция двухпараметрической системы. Рассмотрим задачу синтеза оптимальной коррекции для системы (1.1) — (1.4) вида

$$(3.1) \quad \dot{x} = (T - t)^\alpha u + v, \quad 0 \leq t \leq T, \quad |v| \leq 1$$

$$u(t) = \sum_{k=1}^N u_k \delta(t - t_k), \quad \sum_{k=1}^N |u_k|^\sigma \leq Q, \quad J = |x(T)|$$

где x, u, v — векторы одинаковой размерности, $|x|$ — длина вектора x , α, σ — положительные скалярные параметры. Функция R из (1.3) здесь имеет вид $R(u) = |u|^\sigma$.

Отметим, что к виду (3.1) можно прийти рассматривая уравнения движения $\dot{x} = \varphi(T - t)u + \psi(T - t)v$, если скалярные функции φ и ψ при некоторых a и α связаны соотношением $\varphi(h(\tau)) = a\tau^\alpha$, где $h(\tau)$ — функция, обратная к $\rho(\xi)$, такой, что $d\rho/d\xi = \psi(\xi)$, $\rho(0) = 0$. К виду (3.1) с $\alpha = 1/2$ приводится также задача коррекции динамической системы $\dot{x} = u + v$ с функционалом $|x(T)|$.

В силу изотропности системы (3.1) функция Беллмана (4.7) для нее будет зависеть от трех скалярных аргументов: $|x|, q, \tau = T - t$ и индекса k , причем размерность векторов не вызывает различий в рассмотрении. Предположим для простоты, что x, u, v — скаляры. Можно показать, что функция $S_k(|x|, q, \tau)$ для системы (3.1) не убывает с ростом $|x|$. Следовательно, минимум по u в (2.1) достигается при $u = -px/|x|$, $p = |u|$ и минимизацию можно проводить по параметру p . Переход от аргумента x к $|x|$ и от управления u к p приводит к дополнительному ограничению $|x| - \tau^\alpha p \geq 0$. Следствием монотонности S_k по $|x|$ является также равенство $|\partial S_k / \partial x| = \partial S_k / \partial |x|$. С учетом этих замечаний устанавливаем, что основные соотношения в (2.1) — (2.5), которые используются для построения оптимального синтеза, имеют для системы (3.1) вид

$$(3.2) \quad S_k^+ (|x|, q, \tau) = \min_p S_{k-1} (|x| - \tau^\alpha p, q - p^\sigma, \tau), \quad S_k^+ = S_k$$

$$p^\sigma \leq q, \quad |x| - \tau^\alpha p \geq 0$$

$$P(S_k) = -\frac{\partial S_k}{\partial \tau} + \frac{\partial S_k}{\partial |x|} = 0, \quad P(S_k^+) \leq 0, \quad P(S_k^+) \geq 0$$

и инвариантны относительно однопараметрической (с параметром C) группы преобразований

$$(3.3) \quad S_k = CS_k', \quad S_k^+ = CS_k^+, \quad |x| = C|x'|, \quad \tau = C\tau'$$

$$q = C^{\sigma(1-\alpha)}q'$$

Можно поэтому функции S_k, S_k^+ искать, например, в виде

$$(3.4) \quad S_k(|x|, q, \tau) = |x| \varphi_k(\xi, \eta), \quad S_k^+ (|x|, q, \tau) = |x| \varphi_k^+(\xi, \eta)$$

$$\xi = \tau / |x|, \quad \eta = q |x|^{\sigma(\alpha-1)}$$

Границы Γ_k — кривые в плоскости автомодельных переменных ξ, η ; эти кривые определяются с помощью оператора P , преобразованного к новым переменным.

Итак, искомые функции φ_k, φ_k^+ зависят не от трех, а от двух скалярных переменных. В области G_k (в переменных ξ, η) с помощью (2.3) и (3.2), (3.4) получаем следующее уравнение для функции φ_k :

$$(3.5) \quad P(\varphi_k) = -(1 + \xi) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi} + \sigma(\alpha - 1) \eta \frac{\partial \varphi_k}{\partial \eta} + \varphi_k = 0$$

Общее решение этого линейного неоднородного уравнения [12] имеет вид

$$(3.6) \quad \varphi_k(\xi, \eta) = (1 + \xi) F_k(\eta (1 + \xi)^{\sigma(\alpha-1)}), \quad k = 0, 1, \dots, N$$

где F_k — функции одной переменной.

Отметим ряд свойств искомых функций $F_k(\lambda)$. При нулевом ресурсе, т. е. при $q = 0$ ($\eta = 0$), функция Беллмана, очевидно, не зависит от индекса k . Имеем $\varphi_k(\xi, 0) = \varphi_0(\xi)$, откуда с учетом полученного ниже вида φ_0 получаем $F_k(0) = 1, k = 1, \dots, N$. Кроме того, $F_k(\lambda)$ — невозрастающие функции аргумента λ , что следует из отмеченного в п. 2 соответствующего свойства функций $S_k(x, q, t)$ по аргументу q .

Граница Γ_0 задается равенством $\tau = T - t = 0$ или $\xi = 0$. Поскольку для системы (3.1) имеем $J = F(x) = |x|$, то из (1.8), (3.4) и (3.6) получаем $\varphi_0(0, \eta) \equiv 1$, или $F_0 \equiv 1$. Таким образом, $\varphi_0 = \varphi_0(\xi) = 1 + \xi$ и выполнен этап 1 алгоритма п. 2.

Для выполнения второго этапа алгоритма запишем соотношение (2.1) с помощью (3.2), (3.4) в виде

$$(3.7) \quad \varphi_k^+(\xi, \eta) = \min_r h \varphi_{k-1}(\xi/h, \eta(1 - r^\sigma)h^{\sigma(\alpha-1)}), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad h \geq 0$$

$$r = p/q, \quad h = 1 - r\xi^\alpha \eta^{1/\sigma}$$

Используя (3.7) для $k = 1$ и $\varphi_0 = 1 + \xi$, получим

$$(3.8) \quad \varphi_1^+(\xi, \eta) = \max [\xi, 1 + \xi - \xi^\alpha \eta^{1/\sigma}]$$

Два выражения для функции φ_1^+ соответствуют внутреннему и граничному минимуму по r в (3.7). В соответствии с замечанием к этапу 3 в п. 2 граница Γ_1 — кривая, на которой эти выражения равны. Этот же вывод можно получить с помощью (2.5), (3.5) и (3.8), поскольку

$$(3.9) \quad P(\xi) = -1 < 0, \quad P(1 + \xi - \xi^\alpha \eta^{1/\sigma}) = \alpha \xi^{\alpha-1} \eta^{1/\sigma} \geq 0$$

Приравняв выражения в квадратных скобках в (3.8) и используя (2.5), (3.9), получаем

$$(3.10) \quad \Gamma_1 = \{(\xi, \eta) : \xi^\alpha \eta^{1/\sigma} = 1\}$$

$$D_1 = \{(\xi, \eta) : \xi^\alpha \eta^{1/\sigma} \leq 1\}, \quad G_1 = \{(\xi, \eta) : \xi^\alpha \eta^{1/\sigma} > 1\}$$

Тем самым выполнен один (первый) шаг по индексу k алгоритма п. 2. Согласно этапу 1 следующего шага на границе Γ_1 , имеем $\varphi_1 = \varphi_1^+$, отку-

да с помощью (3.6) и (3.8) получаем равенство, определяющее функцию F_1

$$(3.11) \quad F_1(\eta(1+\xi)^{\sigma(\alpha-1)}) = \xi / (1+\xi), \quad \xi^{\alpha\sigma}\eta = 1$$

Эффективное выполнение этапа 2, т. е. вычисление минимума (3.7), существенно зависит от значений α, σ . Из результатов, полученных для программной задачи оптимальной коррекции [4, 5], следует, что в системе (3.1) при $\sigma = 1$ каждый оптимальный импульс коррекции направлен против вектора x и либо является компенсирующим (обращающим в нуль текущее значение $|x|$), либо использует весь ресурс коррекции. Позиционная форма такого закона коррекции имеет вид

$$(3.12) \quad \begin{aligned} u_k &= -q^{1/\sigma}x / |x|, & (x, q, \tau) \in D_1 \\ u_k &= -x / \tau^\alpha, & (x, q, \tau) \in D_k \setminus D_1, \quad k = 1, \dots, N \end{aligned}$$

в исходных переменных и вид

$$(3.13) \quad \begin{aligned} r_k &= 1, & (\xi, \eta) \in D_1 \\ r_k &= 1 / (\xi^\alpha \eta^{1/\sigma}), & (\xi, \eta) \in D_k \setminus D_1, \quad k = 1, \dots, N \end{aligned}$$

в автомодельных переменных (3.4), (3.7). Таким образом, значения (3.12) ((3.13)) при $\sigma = 1$ доставляют минимум в (3.2) (в (3.7)).

В дальнейшем ограничимся рассмотрением только таких значений α, σ , при которых синтез оптимальной коррекции в системе (3.1) имеет вид (3.12), (3.13). При некоторых значениях параметров α, σ оптимальный синтез может иметь, вообще говоря, иной вид.

При сделанном предположении итеративное применение алгоритма п. 2 приводит к следующим выражениям для функций $\varphi_k^+, \varphi_k, k = 1, \dots, N$:

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \varphi_k^+(\xi, \eta) &= \begin{cases} 1 + \xi - \xi^\alpha \eta^{1/\sigma}, & (\xi, \eta) \in D_1 \\ \xi F_{k-1}(\eta \xi^{\sigma(\alpha-1)} - \xi^{-\sigma}), & (\xi, \eta) \in G_1 \end{cases} \\ \varphi_k(\xi, \eta) &= \begin{cases} \varphi_k^+(\xi, \eta), & (\xi, \eta) \in D_k \\ (1 + \xi) F_k(\eta(1 + \xi)^{\sigma(\alpha-1)}), & (\xi, \eta) \in G_k \end{cases} \end{aligned}$$

и рекуррентной системе равенств для построения функций F_k и границ Γ_k .

$$(3.15) \quad \begin{aligned} F_k(\eta(1 + \xi)^{\sigma(\alpha-1)}) &= \xi(1 + \xi)^{-1} F_{k-1}((\rho - 1) / \xi^\sigma) \\ (\xi, \eta) &\in \Gamma_k, \quad k = 1, \dots, N \end{aligned}$$

$$(3.16) \quad \begin{aligned} F_{k-1}((\rho - 1) / \xi^\sigma) + \sigma \xi^{-\sigma} [1 + \xi + (\alpha - 1)\rho] F_{k-1}'((\rho - 1) / \xi^\sigma) &= 0 \\ k &= 2, \dots, N, \quad \rho = \xi^{\alpha\sigma}\eta \end{aligned}$$

Равенство (3.15) является следствием граничного условия (2.3), полученным с помощью (3.4), (3.6); при известных Γ_k и F_{k-1} оно определяет функцию F_k . Дифференциальное равенство (3.16) представляет собой условие (2.7) неявного задания границы Γ_k , преобразованное посредством (3.5), (3.6); при заданном F_{k-1} оно служит для нахождения точек границы Γ_k . Имея $F_0 \equiv 1$ и Γ_1 в (3.10), можно с помощью (3.15), (3.16) определить.

последовательно $F_1, \Gamma_2, F_2, \Gamma_3, \dots, F_k, \Gamma_{k+1}, \dots$. После этого становятся известны области D_k, G_k , а искомые величины S_k, u_k определяются равенствами (3.4), (3.14), (3.12).

Таким образом, в рассматриваемом случае решение задачи синтеза оптимальной коррекции системы (3.1) сводится к построению с помощью соотношений (3.15), (3.16) двух семейств кривых: границ Γ_k и графиков функций $F_k(\lambda)$.

Соотношения (3.15), (3.16) при $\alpha = 1$ несколько упрощаются и допускают следующее аналитическое решение:

$$(3.17) \quad F_k(\eta) = [1 + (\eta/k)^{1/\sigma}]^{-k}$$

$$\Gamma_k = \{(\xi, \eta): \xi^\sigma \eta = k\}, \quad k = 1, \dots, N$$

При $\sigma = 1$ формулы (3.17) можно получить также из решения программной задачи, рассмотренной в [3, 5].

Автор благодарит Н. Н. Болотника и М. Ю. Бородовского за обсуждение работы.

Поступила 3 IX 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбунов В. К., Черноусько Ф. Л. Задача оптимальной многоимпульсной коррекции возмущений. Автоматика и телемеханика, 1970, № 8.
2. Ананьев Б. И., Куржанский А. Б., Шелементьев Г. С. Минимаксный синтез в задачах импульсного наведения и коррекции движения. ПММ, 1976, т. 40, вып. 1.
3. Корнеев В. А., Меликян А. А. Дифференциальная игра с импульсным управлением одного игрока. ПММ, 1977, т. 41, вып. 2.
4. Корнеев В. А., Меликян А. А. Дифференциально-импульсная игра сближения. ПММ, 1978, т. 42, вып. 2.
5. Черноусько Ф. Л., Меликян А. А. Игровые задачи управления и поиска. М., «Наука» 1978.
6. Бородовский М. Ю., Братусь А. С., Черноусько Ф. Л. Оптимальная импульсная коррекция при случайных возмущениях. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
7. Бородовский М. Ю. Численное решение некоторых задач синтеза статистически оптимального импульсного управления. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, т. 16, № 6.
8. Lions J. L. On the numerical approximation of problems of impulse control. Lecture Notes in Computer Science, 1975, vol. 27, pp. 232—251.
9. Черноусько Ф. Л., Колмановский В. Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. М., «Наука», 1978.
10. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
11. Беллман Р. Динамическое программирование. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
12. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М., Гостехиздат, 1953.