Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 5, 1980

УДК 62-50

ПРОСТАЯ КВАЗИЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

П. Б. Гусятников, Е. С. Половинкин

(Москва)

Выделен класс дифференциальных игр, в которых основной оператор преследования $T_t{}^*$ [1, 2] вычисляется аналитически. Выписана в явном виде опорная функция множества $T_t{}^*(M)$. Доказано, что для этого класса игр оптимальное время преследования совпадает с максиминным временем преследования [1–5], введенным Келенджеридзе. Для линейной дифференциальной игры получено достаточное условие завершения преследования за время Келенджеридзе. Доказана близость этого условия к необходимому. Работа примыкает к исследованиям [1–10].

1. Пусть движение вектора z в n-мерном евклидовом пространстве $R^n = E$ описывается векторным дифференциальным уравнением

$$dz / dt = \lambda(v)z - F(u, v); \quad u \in P \subset R^p, \quad v \in Q \subset R^q \tag{1.1}$$

(u, v — управляющие параметры, P и Q — компакты в конечномерных пространствах, $F: P \times Q \to E$ и $\lambda: Q \to R^1$ — непрерывные отображения) и выпуклым терминальным замкнутым множеством M. Постановка задачи преследования в игре (1.1), цели, информированность игроков определены в [4]. В [1,2] построена общая теория преследования, сводящая изучение задачи преследования (1.1) к исследованию структуры оператора $T_t{}^*: 2^E \to 2^E$ (в отличие от [2] вместо тильды употребляем звездочку)

$$T_\varepsilon(X) = \bigcap_{v^* \in V} \bigcup_{\tau \in [0, \varepsilon]} \left(f_{v^*}(\tau) X + \int_0^\tau f_{v^*}(s) P(v(s))\, ds \right)$$

$$T_{\omega_t}(X) = T_{\delta_m}(T_{\delta_{m-1}}(\ldots(T_{\delta_1}(X))\ldots)); \quad T_t{}^*(X) = \bigcap_{\omega_t \in \Omega_t} T_{\omega_t}(X)$$

$$f_{v^*}(\tau) = \exp\left(-\int_0^\tau \lambda(v(s))\, ds\right); \quad P(v) = \operatorname{conv} F(P, v)$$

Здесь V — множество всех измеримых управлений $v^* = \{v(s) \in Q, s \in R^1\}$, Ω_t — множество всех разбиений $\omega_t = \{0 < \delta_1 < \delta_1 + \delta_2 < \ldots < \delta_1 + \ldots + \delta_m = t\}$ отрезка $[0, t]$ (ср. [2,5]). В [1,3] введен оператор

$$\Theta_\varepsilon: 2^E \to 2^E; \quad \Theta_\varepsilon(X) = \bigcap_{v \in Q} \Gamma(\varepsilon, X, v) \tag{1.2}$$

$$\Gamma(\varepsilon, X, v) = \bigcup_{\tau \in [0, \varepsilon]} (f(\tau, v) X + \gamma(\tau, v) P(v))$$

$$f(\tau, v) = \exp(-\tau\lambda(v)); \quad \gamma(\tau, v) = \int_0^\tau f(s, v)\, ds$$

$$\Theta_t^*(X) = \bigcap_{\omega_t \in \Omega_t} \Theta_{\delta_m}(\Theta_{\delta_{m-1}}(\ldots(\Theta_{\delta_1}(X))\ldots))$$

В [1] доказана фундаментальная теорема: для любого замкнутого $X \subset E$ и $t \geqslant 0$ $T_t^*(X) = \Theta_t^*(X)$.

В данной статье приводятся условия, достаточные для выполнения равенств

(1.3) $\qquad T_\varepsilon^*(M) = T_\varepsilon(M) = \Theta_\varepsilon(M)$

Впервые равенства (1.3) были доказаны для случая $\lambda(v) \equiv 0$, $F(u, v) = u - v$, P и Q — выпуклые компакты в E, в работе [3].

Лемма 1. Чтобы выполнялось (1.3), необходимо и достаточно, чтобы

(1.4) $\qquad \Theta_{\varepsilon_1}(\Theta_{\varepsilon_2}(M)) = \Theta_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M), \quad \forall \varepsilon_1 \geqslant 0, \quad \varepsilon_2 \geqslant 0$

Действительно, из (1.3) и полугруппового свойства [2] оператора T_t^* следует (1.4). Обратно, если выполнено (1.4), то по индукции $\Theta_{\omega_\varepsilon}(M) = \Theta_\varepsilon(M)$ для любого $\omega_\varepsilon \in \Omega_\varepsilon$. Остается воспользоваться фундаментальной теоремой

$$T_\varepsilon^*(M) \subset T_\varepsilon(M) \subset \Theta_\varepsilon(M) = \bigcap_{\Omega_\varepsilon} \Theta_{\omega_\varepsilon}(M) = T_\varepsilon^*(M)$$

Отметим, что включение левой части (1.4) в правую всегда имеет место [3,6].

2. Пусть $X \subset E$, $\psi \in E$. Положим

$$W(X; \psi) = \sup_{x \in X}(x \cdot \psi); \quad K(X) = \{\psi \in E : W(X; \psi) < +\infty\}$$

($W(X; \psi)$ — опорная функция множества X). Всюду в дальнейшем предполагаем, что M и X — выпуклые замкнутые множества в E.

Лемма 2. Для всех $\varepsilon \geqslant 0$, $v \in Q$ множество $\Gamma(\varepsilon, X, v)$ выпукло и замкнуто, причем

$$\Gamma(\varepsilon, X, v) = B(\varepsilon, X, v)$$

$$B(\varepsilon, X, v) = \operatorname{conv}(X \cup (f(\varepsilon, v)X + \gamma(\varepsilon, v)P(v)))$$

Опорная функция $W^\varepsilon(X, v; \psi)$ множества $\Gamma(\varepsilon, X, v)$ равна

(2.1) $$W^\varepsilon(X, v; \psi) = \begin{cases} +\infty, & \psi \in K^*(X) = E \setminus K(X) \\ W(X; \psi) + \gamma(\varepsilon, v)\varphi(X, v; \psi), & \psi \in K(X) \end{cases}$$

Здесь

(2.2) $\qquad \varphi(X, v; \psi) = \max\{0, h(X, v; \psi)\}$

$$h(X, v; \psi) = W(P(v); \psi) - \lambda(v) W(X; \psi)$$

Доказательство. В силу (1.2) достаточно проверить включение $\Gamma(\varepsilon, X, v) \subset B(\varepsilon, X, v)$ и выпуклость $\Gamma(\varepsilon, X, v)$. Оба эти факта следуют из тождества

(2.3) $\qquad f(\tau, v) \equiv 1 - \lambda(v)\gamma(\tau, v)$

Действительно, для любого $z = f(\tau, v)x + \gamma(\tau, v)p$, такого, что $\tau \in [0, \varepsilon]$, $x \in X$

$p \in P(v)$, имеем из (2.3) представление

$$z = (1-\alpha)x + \alpha(f(\varepsilon, v)x + \gamma(\varepsilon, v)p) \in B(\varepsilon, X, v); \quad 0 \leqslant \alpha = \frac{\gamma(\tau, v)}{\gamma(\varepsilon, v)} \leqslant 1$$

Для проверки выпуклости $\Gamma(\varepsilon, X, v)$ возьмем еще

$$z^* = f(\tau^*, v)x^* + \gamma(\tau^*, v)p^*; \ \tau^* \in [0, \varepsilon], \ x^* \in X, \ p^* \in P(v)$$

Поскольку для любого $\mu \in [0, 1]$ найдется (в силу непрерывности $\gamma(s, v)$ по $s \in [0, \varepsilon]$) такое $\tau_* \in [0, \varepsilon]$, что (см. (2.3))

$$\mu\gamma(\tau, v) + (1-\mu)\gamma(\tau^*, v) = \gamma(\tau_*, v)$$
$$\mu f(\tau, v) + (1-\mu) f(\tau^*, v) = f(\tau_*, v)$$

то

$$x_* = \beta x + (1-\beta)x^* \in X; \quad \beta = \mu f(\tau, v) \,/\, f(\tau_*, v) \in [0, 1]$$
$$p_* = \omega p + (1-\omega)p^* \in P(v); \quad \omega = \mu\gamma(\tau, v) \,/\, \gamma(\tau_*, v) \in [0, 1]$$

и, значит

$$\mu z + (1-\mu)z^* = f(\tau_*, v)x_* + \gamma(\tau_*, v)p_* \in \Gamma(\varepsilon, X, v)$$

Выпуклость $\Gamma(\varepsilon, X, v)$ доказана, а с ней и первая часть леммы, из которой (замкнутость $\Gamma(\varepsilon, X, v)$ вытекает из замкнутости $P(v)$) следуют формулы (2.1), (2.2).

Лемма 3. Множество $\Theta_\varepsilon(X)$ выпукло и замкнуто. Включение $z \in \Theta_\varepsilon(X)$ выполнено тогда и только тогда, когда

$$(2.4) \qquad (z \cdot \psi) \leqslant \inf_{v \in Q} W^\varepsilon(X, v; \psi) \equiv \overline{W}^\varepsilon(X; \psi), \qquad \forall \psi \in E$$

$$\overline{W}^\varepsilon(X; \psi) = W(X; \psi) + \Phi(X, \varepsilon; \psi)$$

$$\Phi(X, \varepsilon; \psi) = 0, \quad \psi \in K^*(X); \quad \Phi(X, \varepsilon; \psi) = \max\{0, H(X, \varepsilon; \psi)\}, \ \psi \in K(X)$$

$$(2.5) \qquad H(X, \varepsilon; \psi) = \min_{v \in Q} \gamma(\varepsilon, v) h(X, v; \psi)$$

Лемма 3 — очевидное следствие (1.2) и леммы 2. Из (2.4) следует, что опорная функция $W^\varepsilon(X; \psi) = W(\Theta_\varepsilon(X); \psi)$ множества $\Theta_\varepsilon(X)$ дается [7] формулой

$$(2.6) \qquad W^\varepsilon(X; \psi) = \inf \sum_{i=1}^{m} \overline{W}^\varepsilon(X; \psi_i)$$

где нижняя грань взята по всем конечным наборам векторов

$$(2.7) \qquad \psi_i \in E, \quad i = 1, \ldots, m \quad (\psi_1 + \ldots + \psi_m = \psi)$$

Отметим, что, как следует из (2.1) и (2.6)

$$(2.8) \qquad K(X) = K(\Theta_\varepsilon(X)), \quad \varepsilon \geqslant 0$$

3. Обозначим

$$S^+(X) = \{\psi \in K(X) : \inf_{v \in Q} h(X, v; \psi) > 0\}; \quad S^+ = S^+(M)$$

Лемма 4. Если $\psi \in K(X)$, то $\psi \notin S^+(X)$ тогда и только тогда, когда

$$(3.1) \qquad \Phi(X, \varepsilon; \psi) = 0, \quad \forall\, \varepsilon \geqslant 0$$

Доказательство очевидным образом вытекает из неравенства $\gamma(\varepsilon, v) > 0$ для $\varepsilon > 0$ и $v \in Q$.

Лемма 5. Если $\psi \notin S^+(X)$, то для любых $t \geqslant 0$, $\tau \geqslant 0$ выполнены равенства

$$W^\tau(X; \psi) \equiv W(X; \psi), \quad \Phi(\Theta_\tau(X), t; \psi) \equiv 0 \tag{3.2}$$
$$W(\Theta_{\omega_t}(X); \psi) \equiv W(X; \psi), \quad \Phi(\Theta_{\omega_t}(X), \tau; \psi) \equiv 0$$
$$W(\Theta_t^*(X); \psi) \equiv W(X; \psi), \quad \Phi(\Theta_t^*(X), \tau; \psi) \equiv 0$$

Доказательство. В силу (1.2)

$$X \subset \Theta_t^*(X) \subset \Theta_{\omega_t}(X) \subset \Theta_t(X) \tag{3.3}$$

Поэтому равенства (3.2) очевидны для всех $\psi \in K^*(X)$. Если теперь $\psi \in K(X)$, то из (3.3) имеем $W(X; \psi) \leqslant W^\tau(X; \psi)$, что вместе с (2.6) дает (ср. (3.1))

$$W(X; \psi) \leqslant \overline{W^\tau}(X; \psi) = W(X; \psi) + \Phi(X, \tau; \psi) = W(X; \psi), \quad \psi \notin S^+(X)$$

Первое равенство в (3.2) доказано. С учетом (2.2), (2.4), (2.5) получаем тогда $\Phi(\Theta_\tau(X), t; \psi) = \Phi(X, t; \psi)$, а последнее выражение равно нулю в силу леммы 4. Первая строка равенств в (3.2) доказана. Из нее в соответствии с (2.8) следует включение

$$S^+(\Theta_\tau(X)) \subset S^+(X) \tag{3.4}$$

для любого выпуклого замкнутого множества $X \subset E$ и $\tau \geqslant 0$. Отсюда по индукции

$$S^+(\Theta_{\omega_t}(X)) \equiv S^+(\Theta_{\delta_m}(\ldots(\Theta_{\delta_1}(X))\ldots)) \subset S^+(X), \quad \forall \omega_t \in \Omega_t, \quad t \geqslant 0 \tag{3.5}$$

в связи с чем выполнена вторая строка равенств в (3.2). Отсюда с учетом (3.3), (2.2), (2.5) и леммы 4 имеем

$$W(X; \psi) \leqslant W(\Theta_t^*(X); \psi) \leqslant W(\Theta_{\omega_t}(X); \psi) = W(X; \psi)$$
$$\Phi(\Theta_t^*(X), \tau; \psi) = \Phi(X, \tau; \psi) = 0$$

4. Пусть

$$\lambda^* = \max_{v \in Q} \lambda(v); \quad f(\varepsilon) = \exp(-\lambda^*\varepsilon); \quad \gamma(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon f(r)\,dr;$$
$$W(\psi) = \min_{v \in Q} W(P(v); \psi)$$

Обозначим через $Q^+ = Q^+(M)$ подмножество Q, такое, что для каждого $\psi \in S^+$ найдется $\bar{v} \in Q^+$, удовлетворяющее равенству

$$\min_{v \in Q} h(M, v; \psi) = h(M, \bar{v}; \psi) \tag{4.1}$$

Предположим, что для задачи преследования (1.1) выполнено следующее условие.

Условие А. $\lambda(\bar{v}) \equiv \lambda^*$ для любого $\bar{v} \in Q^+$.

Пусть $\psi \in S^+ \equiv S^+(M)$. Зафиксируем и обозначим $\bar{v} = \bar{v}(\psi)$ произвольный вектор из Q^+, даваемый формулой (4.1). Пусть $X \subset E$. Положим

$$W_*(\psi) = W(P(\bar{v}(\psi)); \psi); \quad H(X; \psi) = W_*(\psi) - \lambda^* W(X; \psi)$$
$$\Phi(X; \psi) = \max\{0, H(X; \psi)\}; \quad \Phi_\varepsilon(X; \psi) = \Phi(\Theta_\varepsilon(X); \psi)$$

Лемма 6. Если выполнено условие А, то

(4.2) $$\overline{W}^{\varepsilon}(\Theta_\delta(M); \psi) = W(\Theta_\delta(M); \psi) + \gamma(\varepsilon)\Phi(\Theta_\delta(M); \psi)$$
$$\forall \psi \in S^+, \quad \varepsilon \geqslant 0, \quad \delta \geqslant 0$$

Докажем сначала, что если $\psi \in S^+$ и $\delta \geqslant 0$, то

(4.3) $$\min_{v\in Q} h(\Theta_\delta(M), v; \psi) = h(\Theta_\delta(M), \bar{v}(\psi); \psi) = H(\Theta_\delta(M); \psi)$$

Действительно, в силу условия А

$$W_*(\psi) - \lambda^* W^\delta(M; \psi) = h(\Theta_\delta(M), \bar{v}(\psi); \psi) \geqslant \min_{v\in Q}[W(P(v); \psi) -$$
$$- \lambda(v) W^\delta(M; \psi)] \geqslant \min_{v\in Q}[W(P(v); \psi) - \lambda(v) W(M; \psi)] +$$
$$+ \min_{v\in Q}\{\lambda(v)[W(M; \psi) - W(\Theta_\delta(M); \psi]\} = h(M, \bar{v}(\psi); \psi) +$$
$$+ \lambda^*[W(M; \psi) - W(\Theta_\delta(M); \psi)] = H(\Theta_\delta(M); \psi)$$

Равенство (4.3) доказано. Используя это равенство и свойство минимума произведения неотрицательных функций, получим (см. (3.4))

$$\gamma(\varepsilon) H(\Theta_\delta(M); \psi) = \gamma(\varepsilon, \bar{v}(\psi)) h(\Theta_\delta(M), \bar{v}(\psi); \psi) \geqslant$$
$$\geqslant H(\Theta_\delta(M), \varepsilon; \psi) \geqslant \min_{v\in Q}\gamma(\varepsilon, v) \cdot \min_{v\in Q} h(\Theta_\delta(M), v; \psi) =$$
$$= \gamma(\varepsilon) H(\Theta_\delta(M); \psi), \quad \forall \psi \in S^+(\Theta_\delta(M))$$

Следовательно, $H(\Theta_\delta(M), \varepsilon; \psi) = \gamma(\varepsilon) H(\Theta_\delta(M); \psi)$ и, значит,

(4.4) $$\Phi(\Theta_\delta(M), \varepsilon; \psi) = \gamma(\varepsilon)\Phi(\Theta_\delta(M); \psi), \quad \forall \psi \in S^+(\Theta_\delta(M))$$

Если теперь $\psi \in S^+ \setminus S^+(\Theta_\delta(M))$, то по лемме 4 $\Phi(\Theta_\delta(M), \varepsilon; \psi) = 0$ т. е.

$$\min_{v\in Q} h(\Theta_\delta(M), v; \psi) \leqslant 0$$

что в силу (4.3) влечет $H(\Theta_\delta(M); \psi) \leqslant 0$, так что $\Phi_\delta(M; \psi) = 0$. Итак, доказано, что равенство (4.4) верно для всех $\psi \in S^+$. Из этого равенства и (2.4) вытекает (4.2). Положим $\Phi(M; \psi) = 0$, $\psi \notin S^+(M)$

5. *Лемма* 7. Пусть $\varepsilon \geqslant 0$, $\psi \in K(M)$. Тогда для любого $\Delta > 0$ найдется такой набор (2.7), что

(5.1) $$0 \leqslant -W^\varepsilon(M; \psi) + \sum_{i=1}^{m}[W(M; \psi_i) + \gamma(\varepsilon)\Phi(M; \psi_i)] \leqslant \Delta$$

(5.2) $$\Phi_\varepsilon(M; \psi) \geqslant f(\varepsilon)\sum_{i=1}^{m}\Phi(M; \psi_i) - \Delta|\lambda^*|$$

Доказательство. Если $W^\varepsilon(M; \psi) = W(M; \psi) + \gamma(\varepsilon)\Phi(M; \psi)$, то неравенство (5.1) выполнено для набора (2.7), в котором $m = 1$, $\psi_1 = \psi$. Проверим (5.2). Оценим $H \equiv H(\Theta_\varepsilon(M); \psi)$. Имеем

(5.3) $$H = W_*(\psi) - \lambda^* W^\varepsilon(M; \psi) = W_*(\psi) - \lambda^* W(M; \psi) - \lambda^*\gamma(\varepsilon)\Phi(M; \psi) =$$
$$= H(M; \psi) - \lambda^*\gamma(\varepsilon)\Phi(M; \psi) = \begin{cases} f(\varepsilon)\Phi(M; \psi), & H(M; \psi) > 0 \\ H(M; \psi), & H(M; \psi) \leqslant 0 \end{cases}$$

Значит, $\Phi_\varepsilon(M; \psi) = f(\varepsilon)\Phi(M; \psi)$ и (5.2) доказано.

Рассмотрим случай

(5.4) $$W^\varepsilon(M; \psi) < W(M; \psi) + \gamma(\varepsilon)\Phi(M; \psi)$$

В силу (3.2), (4.4) имеем отсюда $\Phi(M; \psi) > 0$, так что

(5.5) $$\Phi(M; \psi) = H(M; \psi)$$

Из (5.4), определения нижней грани (2.6) и формулы (4.2) вытекает существование такого набора (2.7), что выполнено (5.1) и неравенство

$$\sum_{i=1}^{m}[W(M;\psi_i)+\gamma(\varepsilon)\Phi(M;\psi_i)]\leqslant W(M;\psi)+\gamma(\varepsilon)\Phi(M;\psi) \tag{5.6}$$

Поскольку в силу выпуклости опорной функции $W(M;\psi)\leqslant\sum_{i=1}^{m}W(M;\psi_i)$, то из (5.6) имеем

$$\sum_{i=1}^{m}\Phi(M;\psi_i)\leqslant\Phi(M;\psi) \tag{5.7}$$

Снова оценим H.

Случай 1. $\lambda^*\geqslant 0$. Из (5.3)—(5.5) вытекает, что

$$\Phi_\varepsilon(M;\psi)\geqslant H=W_*(\psi)-\lambda^*W^\varepsilon(M;\psi)\geqslant W_*(\psi)-\lambda^*W(M;\psi)-$$
$$-\lambda^*\gamma(\varepsilon)\Phi(M;\psi)=f(\varepsilon)\Phi(M;\psi)$$

что вместе с (5.7) дает (5.2).

Случай 2. $\lambda^*=-|\lambda^*|<0$. Для оценки H используем (5.1), выпуклость $W(M;\psi)$ и (5.7)

$$H\geqslant W_*(\psi)+|\lambda^*|\left\{\sum_{i=1}^{m}[W(M;\psi_i)+\gamma(\varepsilon)\Phi(M;\psi_i)]-\Delta\right\}\geqslant W_*(\psi)+$$
$$+|\lambda^*|W(M;\psi)+|\lambda^*|\gamma(\varepsilon)\sum_{i=1}^{m}\Phi(M;\psi_i)-\Delta|\lambda^*|=\Phi(M;\psi)-$$
$$-\lambda^*\gamma(\varepsilon)\sum_{i=1}^{m}\Phi(M;\psi_i)-\Delta|\lambda^*|\geqslant f(\varepsilon)\sum_{i=1}^{m}\Phi(M;\psi_i)-\Delta|\lambda^*|$$

Отсюда и следует (5.2).

6. *Теорема* 1. Если для задачи (1.1) выполнено условие А, то для любого $\varepsilon\geqslant 0$ выполнено (1.3).

Доказательство. В силу лемм 1, 3 достаточно (см. п. 1) проверить неравенство

$$\overline{W}^{\varepsilon_1}(\Theta_{\varepsilon_2}(M);\psi)\geqslant W^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M;\psi);\quad \psi\in E,\quad \varepsilon_1\geqslant 0,\quad \varepsilon_2\geqslant 0 \tag{6.1}$$

Если $\psi\in K^*(M)$ или $\psi\in K(M)\setminus S^+$, то (6.1) вытекает соответственно из (2.8) или (3.2). Пусть теперь $\psi\in S^+$, $\Delta>0$.

В соответствии с леммой 7 существует такой набор (2.7), что при $\varepsilon=\varepsilon_2$ выполнены неравенства (5.1), (5.2), комбинируя которые, получим

$$\overline{W}^{\varepsilon_1}(\Theta_{\varepsilon_2}(M);\psi)=W^{\varepsilon_2}(M;\psi)+\gamma(\varepsilon_1)\Phi_{\varepsilon_2}(M;\psi)\geqslant\sum_{i=1}^{m}[W(M;\psi_i)+ \tag{6.2}$$
$$+\gamma(\varepsilon_2)\Phi(M;\psi_i)]-\Delta+\gamma(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\sum_{i=1}^{m}\Phi(M;\psi_i)-\gamma(\varepsilon_1)\Delta|\lambda^*|=$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\{W(M;\psi_i)+\gamma(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\Phi(M;\psi_i)\}-\Delta(1+\gamma(\varepsilon_1)|\lambda^*|)\geqslant$$
$$\geqslant W^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M;\psi)-\Delta(2+f(\varepsilon_1))$$

Здесь использованы соотношения (4.2), (2.6) и тождество $f(\tau,v)\gamma(s,v)+\gamma(\tau,v)\equiv\gamma(\tau+s,v)$. Поскольку в (6.2) величина $\Delta>0$ произвольна, то неравенство (6.1) доказано, а с ним и теорема.

7. Обозначим через $Q^{++} = Q^{++}(M)$ подмножество Q, такое, что для каждого $\psi \in S^+$ найдется $\bar{v} \in Q^{++}$, для которого $W(P(\bar{v}); \psi) = W(\psi)$.

Условие Б. $\bar{0} \in M$ ($\bar{0}$ — нуль-вектор в E); $\lambda(\bar{v}) \equiv \lambda^*$ для любого $\bar{v} \in Q^{++}$.

Лемма 8. Если для игры (1.1) выполнено условие Б, то выполнено и условие А. При этом $W_*(\psi) = W(\psi)$.

8. Пусть задача преследования описывается уравнением [4]

$$dz / dt = Cz - F(u, v) \tag{8.1}$$

где C — постоянная квадратная матрица порядка n, $F(u, v)$, P, Q и M удовлетворяют требованиям п. 1 для задачи (1.1).

Теорема 2. Для задачи (8.1) выполнены равенства (1.3), если матрица $C = \lambda^* I$, λ^* — вещественная постоянная, I — единичная матрица порядка n, функция $F(u, v)$ непрерывна на $P \times Q$, P и Q — компакты в конечно-мерных пространствах, M — замкнутое выпуклое множество.

Доказательство. Если выполнены условия теоремы 2, то задача (8.1) превращается в задачу (1.1), в которой $\lambda(v) \equiv \lambda^*$, $v \in Q$, в связи с чем выполнено условие А. Остается применить теорему 1.

9. *Теорема* 3. Если в задаче (8.1) каждый отличный от нулевого вектор $\psi \in K(M)$ является собственным вектором матрицы C^* (оператор, сопряженный оператору C), то выполнены равенства (1.3).

Доказательство. Поскольку $K(M)$ — выпуклый конус [7], то существует единое вещественное λ^*, такое, что $C^*\psi = \lambda^*\psi$ для всех $\psi \in K_0$, где K_0 — подпространство, являющееся линейной оболочкой $K(M)$. Если размерность $n_* = \dim K_0 = n$, то матрица C^*, а с ней и C имеют вид $\lambda^* I$, где I — единичная матрица порядка n. Остается воспользоваться теоремой 2.

Пусть теперь $n_* < n$. Обозначим через N_0 ортогональное дополнение к K_0 в E, через π — оператор ортогонального проектирования на K_0. Тогда справедлива лемма

Лемма 9. Множество M представимо в виде

$$M = N_0 + M_*; \quad M_* = \pi M \tag{9.1}$$

Доказательство. Проверим сначала, что для любого $m_0 \in M$ множество $m_0 + N_0$ содержится в M. От противного. Если найдется $n_0 \in N_0$, такое, что $m_0 + n_0 \notin M$, то по теореме об отделимости [7] существует $\psi \in K(M)$, такое, что $(\psi \cdot (m_0 + n_0)) > (\psi \cdot m)$ для всякого $m \in M$. Взяв $m = m_0$ и вспомнив, что $(\psi \cdot n_0) = 0$, приходим к противоречию. Для доказательства (9.1) остается воспользоваться цепочкой включений

$$N_0 + M_* = N_0 + M \subset M \subset N_0 + M_*$$

Завершим доказательство теоремы. Положим $z_* = \pi z$; $z^* = z - \pi z$; $F_*(u, v) = \pi F(u, v)$; $C_* = \pi C$. В силу (9.1) $z \in M$ тогда и только тогда, когда $z_* \in M_*$. Далее, поскольку подпространство K_0 инвариантно относительно оператора C^*, то N_0 инвариантно относительно C, так что $C_* z^* \equiv 0$. Кроме того, для любого $\psi \in K_0$ имеем

$$(\psi \cdot [C_* z_* - \lambda^* z_*]) = (\psi \cdot C z_*) - \lambda^* (\psi \cdot z_*) = (C^*\psi \cdot z_*) - \lambda^* (\psi \cdot z_*) = 0$$

Следовательно, $C_* z_* = \lambda^* z_*$. Поэтому, применяя к (8.1) оператор π, получим

$$dz_* / dt = \pi(dz/dt) = C_*(z_* + z^*) - F_*(u, v) = \lambda^* z_* - F_*(u, v) \tag{9.2}$$

Таким образом, в условиях теоремы 3 игра (8.1) эквивалентна игре (9.2) с терминальным множеством M_*. Поскольку же игра (9.2) удовлетворяет условиям теоремы 2, то теорема 3 доказана.

Докажем теперь в некотором смысле обратную к теореме 3 теорему.

Теорема 4. Пусть матрица C и выпуклое замкнутое терминальное тело M [8] таковы, что найдется вектор $\varphi_0 \in K(M)$, $|\varphi_0| = 1$, не являющийся собственным вектором оператора C^*. Тогда для любого достаточно малого $\theta_0 > 0$ существуют шары $P = a + (\rho + \sigma)S$, $Q = \rho S$ ($\rho > 0$, $\sigma > 0$; S — единичный замкнутый шар в E с центром в нуле; a — постоянный вектор) и функция $F(u, v) = u - v$, такие, что в задаче (8.1) при некотором $\varepsilon \in (0, \theta_0)$ множества $T_\varepsilon(M)$ и $T_\varepsilon^*(M)$ не совпадают (здесь, как и в теореме 3, используется общее определение [2] операторов T_ε и T_ε^*).

Доказательство теоремы проведем в несколько этапов.

Обозначим через $v(\psi)$ и $\omega(\psi)$ (эти обозначения используем и в дальнейшем) векторы, входящие в равенства

$$v(\psi) \in Q, \quad (\psi \cdot v(\psi)) = W(Q; \psi); \quad \omega(\psi) \in \Omega, \quad (\psi \cdot \omega(\psi)) = W(\Omega; \psi)$$

Лемма 10. Пусть Q и Ω — выпуклые компактные тела, не содержащие отрезков на границе, причем через каждую точку границы Ω проходит только одна опорная гиперплоскость. Тогда для любого $\varepsilon_0 > 0$ существует $\delta_0 > 0$, такое, что для всех $\varphi, \psi \in S$, $|\psi| = 1$ и всех $v \in Q$, удовлетворяющих неравенству $|v(\psi) - v| \geqslant \varepsilon_0$, выполнено включение $v + \omega(\psi) + \delta_0\varphi \in P = Q + \Omega$.

Доказательство. В силу условий леммы векторы $v(\psi)$ и $\omega(\psi)$ единственны. Далее рассуждаем от противного. Пусть существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого натурального n найдутся ψ_n, $|\psi_n| = 1$, $\varphi_n \in S$; $v_n \in Q$, $|v(\psi_n) - v_n| \geqslant \varepsilon_0$, такие, что $v_n + \omega(\psi_n) + \frac{1}{n}\varphi_n \notin P$, т. е. при некотором $\psi^n \in E$, $|\psi^n| = 1$ выполняется неравенство

$$\left(\psi^n \cdot \left[v(\psi^n) + \omega(\psi^n) - v_n - \omega(\psi_n) - \frac{1}{n}\varphi_n\right]\right) < 0 \tag{9.3}$$

Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что

$$\psi_n \to \psi_0, \quad \psi^n \to \psi^0, \quad \varphi_n \to \varphi_0, \quad |\psi_0| = |\psi^0| = 1 \geqslant |\varphi_0|; \quad v_n \to v_0 \in Q,) \quad n \to \infty$$

Поскольку (в силу отсутствия отрезков на границе) функции $v(\psi)$ и $\omega(\psi)$ непрерывны [7], то

$$v(\psi_n) \to v(\psi_0), \quad v(\psi^n) \to v(\psi^0), \quad \omega(\psi_n) \to \omega(\psi_0), \quad \omega(\psi^n) \to \omega(\psi^0), \quad n \to \infty$$

Переходя к пределу, получаем из (9.3)

$$(\psi^0 \cdot [v(\psi^0) - v_0]) + (\psi^0 \cdot [\omega(\psi^0) - \omega(\psi_0)]) \leqslant 0 \tag{9.4}$$

$$|v(\psi_0) - v_0| \geqslant \varepsilon_0 \tag{9.5}$$

Замечая, что каждое из двух слагаемых левой части (9.4) неотрицательно, приходим к выводу, что $v_0 = v(\psi^0)$; $\omega(\psi^0) = \omega(\psi_0)$. Поскольку через точку $\omega(\psi_0)$ проходит только одна опорная к Ω гиперплоскость, то $\psi_0 = \psi^0$, так что $v_0 = v(\psi_0)$, а это противоречит (9.5).

10. Всюду в этом пункте предполагаем, что в игре (8.1) M — замкнутое выпуклое тело, $F(u, v) = u - v$, $P = Q + \Omega$, где Q и Ω удовлетворяют условиям леммы 10.

Для любого $z_0 \in E$ через $t(z_0)$ обозначим наименьший момент времени $t \geqslant 0$, для которого выполнено включение $z_0 \in T_t^*(M)$. Известно [9], что время $t(z_0)$ в этом случае может быть определено и как наименьший момент времени $t \geqslant 0$, для которого выполнено включение

$$\Phi(t) z_0 \in M + \int_0^t \Phi(r)\Omega dr; \quad \Phi(t) \equiv \exp(tC) \tag{10.1}$$

Используя обозначения леммы 10, положим

$$v(r, \psi) = v(w(r, \psi)), \quad \omega(r, \psi) = \omega(w(r, \psi))$$

$$w(r, \psi) = \Phi^*(r)\psi / |\Phi^*(r)\psi|, \quad \Phi^*(r) \equiv \exp(rC^*)$$

Тогда существуют векторы $m_0 \in M$ и $\psi_0 \in E$, $|\psi_0| = 1$, такие, что

$$\Phi(t(z_0)) z_0 = m_0 + \int_0^{t(z_0)} \Phi(r)\omega(r, \psi_0) dr \tag{10.2}$$

$$\Phi(t) z_0 \notin M + \int_0^t \Phi(r)\Omega dr, \quad t \in [0, t(z_0)) \tag{10.3}$$

Лемма 11. Для выполнения равенства $T_\varepsilon(M) = T_\varepsilon^*(M)$, $\varepsilon \in [0, t(z_0)]$ необходимо, чтобы для любого $t \in [0, t(z_0))$ было выполнено условие (int — символ внутренности множества)

$$\Phi(t) z_0 + \int_0^t \Phi(t-r) v(t(z_0) - r, \psi_0) dr \notin \operatorname{int}\left[M + \int_0^t \Phi(r) P dr\right] \tag{10.4}$$

Доказательство (от противного). Пусть существует $\tau \in [0, t(z_0))$, такое, что

$$\Phi(\tau) z_0 + \int_0^\tau \Phi(\tau - r) v(t(z_0) - r, \psi_0) dr \in \operatorname{int}\left[M + \int_0^\tau \Phi(r) P dr\right] \tag{10.5}$$

Это означает, что найдется такое $q_0 > 0$, что для каждого измеримого управления $v(t) \in Q$, $t \in [0, \tau]$, удовлетворяющего неравенству

$$\int_0^\tau |v(t(z_0) - r, \psi_0) - v(r)| dr \leqslant q_0 \tag{10.6}$$

найдется измеримое управление $u(t) \in P$, $t \in [0, \tau]$, такое, что

$$z(\tau) = \Phi(\tau) z_0 - \int_0^\tau \Phi(\tau - r)[u(r) - v(r)] dr \in M \tag{10.7}$$

Положим

$$\varepsilon_0 = \frac{q_0}{2\tau}, \quad k_0 = \frac{q_0}{4Q^*}, \quad Q^* = \max_{v\in Q,\, \omega\in\Omega} \{|v| + |\omega|\}$$

Пусть число $\delta_0 > 0$ соответствует ε_0 в силу леммы 10. Поскольку M — тело, то существуют вектор φ_* и число $\mu_0 > 0$, такие, что [8],

$$(10.8) \qquad |\varphi_*| \neq 0; \quad |\Phi^{-1}(r)\varphi_*| \leqslant 1, \ 0 \leqslant r \leqslant t(z_0)$$
$$m_* + \mu_0 S \subset M, \ m_* = m_0 - k_0\delta_0\varphi_*$$

Положим $B_1 = |m_*| + 1 + Q^* / B_2$; $B_2 = \|C\| + 1$; $\|C\|$ — норма матрицы C. Выберем число $s_0 \in (\tau, t(z_0))$ так, чтобы

$$(10.9) \qquad B_1 [\exp(B_2 [t(z_0) - s_0]) - 1] < \mu_0$$

Рассмотрим теперь произвольное измеримое управление $v_* = \{v(t) \in Q,\ t \in [0, s_0]\}$, не удовлетворяющее (10.6). Это означает, что существует измеримое множество $V(v_*) \subset [0, \tau]$, такое, что $\operatorname{mes} V(v_*) = k_0$, $|v(t(z_0) - r, \psi_0) - v(r)| \geqslant \varepsilon_0$, $r \in V(v_*)$. Доопределив $v(r) \equiv v(t(z_0) - r, \psi_0)$, $r \in (s_0, t(z_0)]$, полагаем

$$u(r) = \begin{cases} v(r) + \omega(t(z_0) - r, \psi_0) + \delta_0\Phi^{-1}(t(z_0) - r)\varphi_*, & r \in V(v_*) \\ v(r) + \omega(t(z_0) - r, \psi_0), & r \in [0, t(z_0)] \setminus V(v_*) \end{cases}$$

(возможность такого выбора $u(r) \in P$ следует из леммы 10 и (10.8)).

Тогда для такой пары управлений $u(r)$ и $v(r)$ (ср. (10.2))

$$(10.10) \qquad z(t(z_0)) = \Phi(t(z_0)) z_0 - \int_0^{t(z_0)} \Phi(t(z_0) - r)[u(r) - v(r)]\, dr = m_*$$

Обозначив $l(r) = z(r) - m_*$, имеем

$$|l(r)| = \left| l(t(z_0)) - \int_r^{t(z_0)} [Cz(\theta) - \omega(t(z_0) - \theta, \psi_0)]\, d\theta \right| \leqslant$$

$$\leqslant B_2 \int_r^{t(z_0)} (|l(\theta)| + B_1)\, d\theta, \quad r \in [s_0, t(z_0)]$$

Так что по лемме Гронуолла и формуле (10.9)

$$|l(s_0)| \leqslant B_1 [\exp(B_2 [t(z_0) - s_0]) - 1] < \mu_0$$

В силу (10.8) это означает, что $z(s_0) \in M$. Отсюда и из (10.7) следует, что $z_0 \in T_{\varepsilon_0}(M)$ (определение T_ε см. [2]); однако в силу (10.3) $z_0 \notin T_{\varepsilon_0}^*(M)$. Противоречие. Лемма доказана.

11. Завершим доказательство теоремы 4. Рассмотрим аналитические функции

$$\Lambda(r) = \frac{1 - e^{-r}}{r} = 1 - \frac{r}{2!} + \frac{r^2}{3!} - \ldots;$$

$$Y(r) = \frac{r}{1 - e^{-r}} = 1 + \frac{r}{2} + \frac{r^2}{12} + \ldots$$

радиусы сходимости которых соответственно $+\infty$ и 2π. Если A — произвольная матрица порядка n, $\|A\| < 2\pi$, то матричные функции $\Lambda(A)$ и $Y(A)$ существуют и удовлетворяют соотношениям

$$\Lambda(A) \cdot Y(A) = I; \quad t\Lambda(tA) = \int_0^t \exp(-rA)\, dr, \quad t \geqslant 0$$

в связи с чем при $0 < t\|A\| < 2\pi$ существует обратный оператор

$$(11.1)\qquad \left[\int_0^t \exp(-rA)\,dr\right]^{-1} = \frac{1}{t} Y(tA) \equiv R(t, A)$$

Пусть m_0 — такая фиксированная точка множества M, что $(m_0 \cdot \varphi_0) = W(M; \varphi_0)$. Поскольку M — тело, то существуют вектор φ_*, $|\varphi_*| = 1$ и число $\mu_0 > 0$, такие, что

$$(11.2)\qquad m_0 - \lambda\varphi_* \in \operatorname{int} M, \quad \lambda \in (0, \mu_0)$$

Вектор φ_0 не является собственным вектором оператора $D = C^*$. Поэтому положительно число $\alpha = |D\varphi_0|^2 - (\varphi_0 \cdot D\varphi_0)^2 > 0$.

Пусть теперь $\theta_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ — произвольные числа, удовлетворяющие соотношениям

$$(11.3)\qquad \theta_4 \in \left(0, \min\left\{1, \frac{\pi}{\|C\|}\right\}\right), \quad \theta_2 > 0, \quad \theta_3 > 0, \quad \theta_2 + \theta_3 = \theta_4; \quad \theta_1 \in [0, \theta_4].$$

Положим $G(x, y) = x\Lambda(xC) \cdot R(y, C)$ и рассмотрим выражения

$$g(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \left(\varphi_0 \cdot G(\theta_1, \theta_2)\left[\chi(0, \theta_3) - \int_0^{\theta_3} \Phi(r)\, w(\theta_2 + r, \varphi_0)\, dr\right]\right)$$

$$\chi(x, y) = \int_x^y \Phi(r)\, w(r, \varphi_0)\, dr, \quad \xi(\theta_1, \theta_2) = (\varphi_0 \cdot G(\theta_1, \theta_2)\, \varphi_*)$$

$$\varkappa(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\varphi_0 \cdot [\chi(\theta_4 - \theta_1, \theta_4) + G(\theta_1, \theta_2)\chi(\theta_3, \theta_4)])$$

Разложение этих выражений по формуле Тейлора по степеням $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ приводит к следующим оценкам (через N обозначаем постоянную, зависящую лишь от матрицы C и не зависящую от θ_i $(i = 1, \ldots, 4)$):

$$(11.4)\qquad \begin{aligned} &g(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \geqslant \theta_1\theta_3\left(\frac{\alpha}{2}\theta_1 - N\theta_4^2\right); \quad \xi(\theta_1, \theta_2) \leqslant N\theta_1\theta_2^{-1} \\ &\varkappa(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \geqslant \theta_1\left(\frac{\alpha}{12}(\theta_2 - \theta_1)(\theta_2 - 2\theta_1) - N\theta_4^2|\theta_2 - \theta_1|\right) \end{aligned}$$

Пусть теперь $p > 0$, $q > 0$, $\nu > 0$ — произвольные вещественные числа, удовлетворяющие вместе с θ_i $(i = 1, \ldots, 4)$ неравенствам

$$(11.5)\qquad \nu \leqslant p\theta_2\theta_4^2, \quad \theta_4 < \frac{\alpha}{200N}, \quad \frac{1}{2}\theta_4 < \theta_2 < \frac{2p}{q} < \frac{\alpha}{100N}$$

Для выражения $\eta(p, q, \nu, \theta_2, \theta_3; r) = \frac{1}{r}\{p\theta_3^{-1} g(r, \theta_2, \theta_3) + q\varkappa(r, \theta_2, \theta_3) - \nu\xi(r, \theta_2)\}$ имеем из (11.4), (11.5) оценку

$$(11.6)\qquad \eta(p, q, \nu, \theta_2, \theta_3; r) > 0, \quad r \in (0, \theta_4]$$

Рассмотрим теперь игру (8.1), в которой

$$(11.7)\qquad \begin{aligned} &F(u, v) = u - v, \quad P = Q + \Omega, \quad Q = \rho S, \quad \Omega = a + \sigma S \\ &a = Cm^* + a_*, \quad m^* = m_0 + \sigma\chi(0, \theta_0), \quad a_* = R(\theta_0 - \tau, C) \times \\ &\times \left\{-\nu\varphi_* + \rho\left[\chi(0, \tau) - \int_0^\tau \Phi(r)\, w(\theta_0 - \tau + r, \varphi_0)\, dr\right] - \sigma\chi(\tau, \theta_0)\right\} \end{aligned}$$

постоянные $\rho > 0$, $\sigma > 0$, $\theta_0 > 2\tau > 0$, $\nu > 0$ удовлетворяют неравенствам

(11.8) $$\theta_0 < \min\{1, \pi\|C\|^{-1}, \alpha(200N)^{-1}\}, \quad \frac{100N}{\alpha} < \frac{\sigma}{2\rho\tau} < \theta_0^{-1}$$
$$\nu < \frac{\sigma\theta_0^4}{2}$$

Возьмем точку $z_0 = m^* + \theta_0\Lambda(\theta_0 C)a_*$ и проверим, что для этой точки выполнено равенство $t(z_0) = \theta_0$, и что в момент τ при $\psi_0 = \varphi_0$ выполнено включение (10.5), что в силу леммы 11 завершит доказательство теоремы 4. Легко проверяется, что (ср. (10.2))

$$\Phi(\theta_0)z_0 = m_0 + \int_0^{\theta_0}\Phi(r)\omega(r, \varphi_0)\,dr; \quad \omega(r, \varphi_0) \equiv a + \sigma w(r, \varphi_0)$$

Докажем (10.3) для всех $t \in [0, \theta_0)$. Для этого достаточно проверить неравенство

$$\Delta(t) \equiv \left(\varphi_0 \cdot \left\{\Phi(t)z_0 - m_0 - \int_0^t \Phi(r)\omega(r, \varphi_0)\,dr\right\}\right) > 0, \quad \forall t \in [0, \theta_0)$$

Упрощая выражение для $\Delta(t)$, получим, используя (11.7), (11.8) (11.5), (11.3), (11.6)

$$\Delta(t) = \left(\varphi_0 \cdot \int_0^{\theta_0 - t}\Phi(-r)a_*dr + \sigma\chi(t, \theta_0)\right) = (\theta_0 - t) \times$$
$$\times\, \eta(\rho\tau, \sigma, \nu, \theta_0 - \tau, \tau; \theta_0 - t) > 0$$

Равенство $t(z_0) = \theta_0$ доказано.

Для проверки (10.5) с $\psi_0 \equiv \varphi_0$ воспользуемся (11.7), (11.1), (11.2)

$$\Phi(\tau)z_0 + \int_0^\tau \Phi(\tau - r)v(t(z_0) - r, \varphi_0)\,dr = \Phi(\tau)z_0 +$$
$$+ \rho\int_0^\tau \Phi(\tau - r)w(\theta_0 - r, \varphi_0)\,dr = m_0 - \nu\varphi_* +$$
$$+ \int_0^\tau \Phi(r)[a + (\rho + \sigma)w(r, \varphi_0)]\,dr \in \operatorname{int}\left[M + \int_0^\tau \Phi(r)P\,dr\right]$$

Теорема доказана.

Поступила 10 XII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
2. *Пшеничный Б. Н.* Структура дифференциальных игр. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 2.
3. *Пшеничный Б. Н.* Игра с простым движением и выпуклым терминальным множеством. Тр. семинара «Теория оптимальных решений», вып. 3. Киев, 1969.
4. *Гусятников П. Б.* Об одном классе нелинейных дифференциальных игр. Тр. семинара «Теория оптимальных решений», вып. 1. Киев, 1969.
5. *Гусятников П. Б.* К структуре дифференциальных игр. В сб.: Математические методы исследования и оптимизации систем, вып. 3. Киев, 1970.
6. *Polovinkin E. S.* Riemannian integral of set-valued functions. In: Lecture Notes in Computer Science, vol. 27. Berlin—Heidelberg — New York, Springer, 1975.
7. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., «Мир», 1964.
8. *Понтрягин Л. С.* Основы комбинаторной топологии. М., «Наука», 1976.
9. *Гусятников П. Б., Никольский М. С.* Об оптимальности времени преследования. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 3.