УДК 533.6.011

ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГАЗОДИНАМИКИ

В. Б. Борзов, Ц. И. Гуцунаев

(Москва)

Найдено частное решение уравнений релятивистской газодинамики для одномерных адиабатических движений с плоской симметрией, которое используется для построения точного разрывного решения, описывающего неустановившееся движение газа при наличии ударных волн.

Решение, найденное Л. И. Седовым [1] для уравнений газодинамики в случае одномерных неавтомодельных движений

$$u = \mp \mu\, [A + B\mu^{\nu(\gamma-1)}]^{1/2}, \quad \rho = \frac{\mu^{\nu-1}}{r}\varphi'(\mu r), \; p = \mu^{\gamma\nu}\left[C + \frac{\nu(\gamma-1)}{2}B\varphi(\mu r)\right]$$

сопрягалось с ударной волной, распространяющейся по покоящемуся газу [2,3]. Здесь плотность ρ и давление p выражаются через произвольную функцию $\varphi(\mu r)$; A, B и C — произвольные постоянные, γ — отношение теплоемкостей. Скорость u в каждый момент времени t — линейная функция расстояния r от плоскости, оси или центра симметрии ($\nu = 1$, 2 и 3 соответственно).

До этого точные разрывные решения были получены в единичных случаях.

Релятивистское рассмотрение процессов распространения простых волн в плоском пространстве — времени, а также обсуждение сильных разрывов типа ударных волн проводилось в работах [4,5].

Уравнения релятивистской газодинамики в рассматриваемом случае имеют вид [6]

$$\frac{1}{\theta^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{c^2}{p+\varepsilon}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{u}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \ln V}{\partial t} + u\frac{\partial \ln V}{\partial x} - \frac{1}{\theta^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial (pV^\gamma)}{\partial t} + u\frac{\partial (pV^\gamma)}{\partial x} = 0; \quad \varepsilon = \frac{c^2}{V} + \frac{p}{\gamma-1}, \quad \theta = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

Здесь ε — «собственная» плотность энергии (включая внутреннюю) газа, V — «собственный» удельный объем.

Можно проверить, что система (1) имеет следующее частное решение ($F(\xi)$ — произвольная функция аргумента ξ, C_1 — произвольная постоянная):

$$u = \frac{c^2 t}{C_1 + x}, \quad p = F(\xi), \quad V = c^2\left[\frac{\gamma}{1-\gamma}F(\xi) - \xi F'(\xi)\right]^{-1} \tag{2}$$

$$\xi = C_1^{-1}[(C_1+x)^2 - c^2t^2]^{1/2}$$

Используем теперь полученное решение для построения точного разрывного решения. Будем сопрягать решение (2), описывающее движение газа за ударной волной, с ударной волной.

Условия на ударной волне в системе координат, где покоится поверхность разрыва, могут быть записаны в виде [6]

$$\frac{v_{1,2}^2}{c^2} = \frac{p_2 - p_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}\,\frac{p_{1,2} + \varepsilon_{2,1}}{p_{2,1} + \varepsilon_{1,2}}, \quad \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 = \frac{\varepsilon_1 + p_2}{\varepsilon_2 + p_1}\,\frac{\varepsilon_1 + p_1}{\varepsilon_2 + p_2} \tag{3}$$

где v_1 и v_2 — скорости движения газа соответственно до ударной волны и за ней.

В лабораторной системе, где фронт ударной волны движется со скоростью $\omega = dx_2 / dt$, формулы преобразования скоростей имеют вид

$$v_{1,2} = (u_{1,2} - \omega)(1 - \omega u_{1,2} / c^2)^{-1} \tag{4}$$

Будем считать, что ударная волна распространяется по покоящемуся газу без противодавления ($u_1 = 0$, $p_1 = 0$) с начальным удельным объемом $V_1 = V_1(x)$. В таком случае из уравнений (3) после преобразований приходим к следующему дифференциальному уравнению для определения закона движения ударной волны:

$$v_1[c^2(\gamma - 1) + v_2(v_2 - \gamma v_1)]^2 = v_2(c^2 - v_1^2)[c^2(\gamma^2 - 1) + v_2(v_2 - \gamma^2 v_1)] \tag{5}$$

Здесь $v_1 = -dx_2 / dt$, скорость v_2 связана с $u_2 = c^2 t / (C_1 + x_2)$ по формуле (4).

Простейшим решением (5) служит $x_2 = ct + x_0$, где x_0 — начальная координата ударной волны.

Тогда из (2) и (3) окончательно находим (C_2 — постоянная интегрирования)

$$\varepsilon_1 = C_2\left[\frac{\gamma^2}{2(\gamma-1)} - 2\right]\left[\frac{1}{C_1^2}(C_1 + x_0)(C_1 - x_0 + 2x)\right]^{-\lambda}$$

$$\varepsilon_2 = C_2\left[\frac{\gamma^2}{2(\gamma-1)} - 1\right]\left[\frac{1}{C_1^2}(C_1 + x_0)(C_1 + x_0 + 2ct)\right]^{-\lambda}$$

$$p_2 = C_2\left[\frac{1}{C_1^2}(C_1 + x_0)(C_1 + x_0 + 2ct)\right]^{-\lambda}$$

$$V_1 = \frac{c^2}{\varepsilon_1}, \quad V_2 = \left(\frac{\varepsilon_2}{c^2} - \frac{p}{\gamma - 1}\right)^{-1}, \quad u_2 = \frac{c^2 t}{ct + C_1 + x_0}, \; \lambda = \gamma^2 / [4(\gamma - 1)]$$

Поступила 18 XII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1957.
2. *Коробейников В. П., Рязанов Е. В.* Построение точных разрывных решений уравнений одномерной газодинамики и их приложения. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
3. *Шикин И. С.* О точных решениях уравнений одномерной газодинамики с ударными и детонационными волнами. Докл. АН СССР, 1958, т. 122, № 1.
4. *Шикин И. С.* Римановские волны в релятивистской гидродинамике. Докл. АН СССР, 1960, т. 159, № 6.
5. *Шикин И. С.* К теории волн в релятивистской магнитной гидродинамике Чу — Голдберга — Лоу. Физика плазмы, 1976, т. 2, вып. 1.
6. *Баум Ф. А., Каплан С. А., Станюкович К. П.* Введение в космическую газодинамику. М., Физматгиз, 1958.

УДК 539.3

ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ ДИСЛОКАЦИОННЫХ КОНФИГУРАЦИЙ В ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЕ

Г. В. Бушуева, А. А. Предводителев, Р. Д. Фролова, С. М. Хзарджян

(Москва)

Предлагается методика нахождения полей напряжений, создаваемых плоскими дислокационными конфигурациями в пластине. Определены поля напряжений различных дислокационных образований с произвольными векторами Бюргерса, лежащих в произвольной плоскости, параллельной поверхности пластины. Решение задачи получено на основе обобщения метода, предложенного в [1,2], и представлено в аналитической форме, либо форме, удобной для численных расчетов.

Необходимость анализа полей упругих напряжений различных дислокационных образований в пластинах возникает в связи с широким практическим использованием тонких пленок. Этот вопрос рассматривался ранее лишь для частных случаев бесконечных прямолинейных винтовой [3], краевой [4] дислокаций и круговых дислокационных петель, лежащих в середине пластины [1, 2].

1. Постановка задачи. Пусть в плоскости, параллельной поверхности пластины толщины d, расположена дислокационная петля произвольной формы ς произвольным