

## О КОНТАКТЕ БЕРЕГОВ ТРЕЩИНЫ

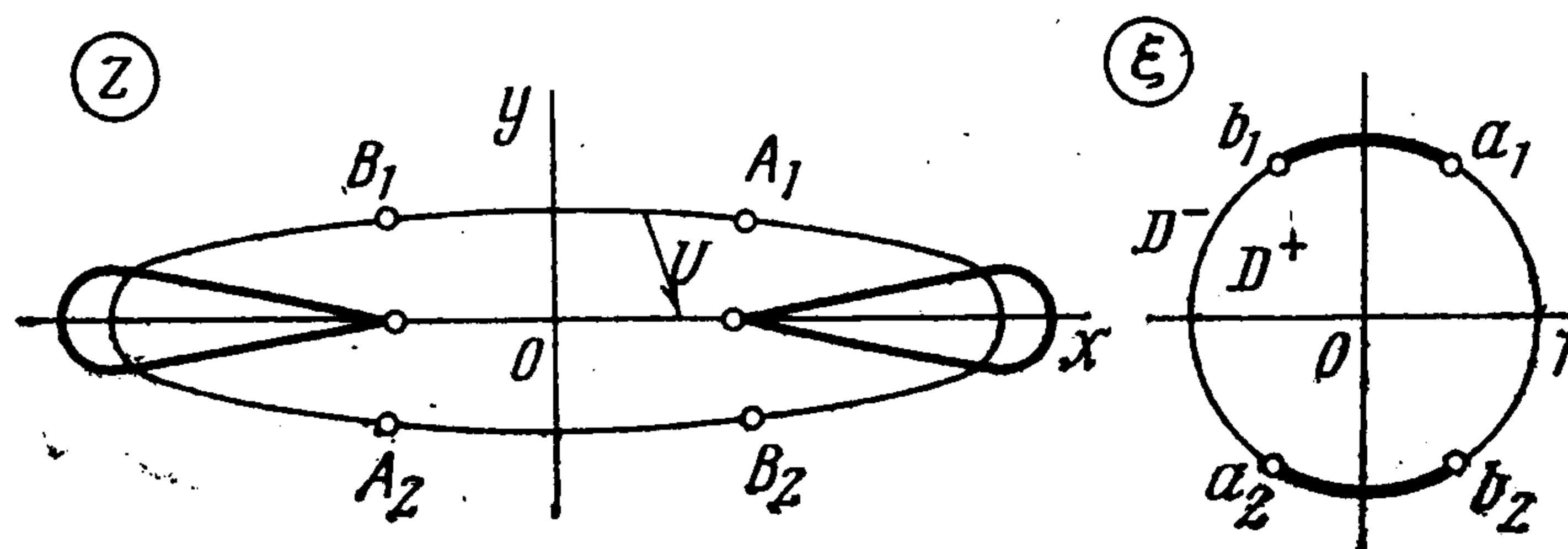
В. Б. Пеньков, Л. А. Толоконников

(Тула)

Рассматривается бесконечная упругая плоскость с симметричной трещиной, контур которой можно отобразить на окружность рациональной функцией. Предполагается, что в результате нагрузки на бесконечности противоположные берега трещины входят в контакт. Принимается, что на контуре трещины в области контакта известна вертикальная составляющая смещения; касательное напряжение отсутствует из-за симметрии; на свободной части границы напряжения отсутствуют. Путем подходящего выбора двух кусочно-мероморфных функций граничные условия приводятся к краевой задаче Римана для вектора функций, голоморфных на плоскости, разрезанной вдоль пары дуг окружности, и имеющих конечный порядок на бесконечности. Дано решение в квадратурах поставленной задачи. Выписаны условия, определяющие неизвестные коэффициенты общего решения. Рассмотрен конкретный пример, когда трещина имеет профиль вытянутого эллипса.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим трещину с двумя осями симметрии под действием нагрузки, симметричной относительно тех же осей.

Совместим координатные оси  $x, y$  плоскости  $z$  (фигура) с осями симметрии трещины и предположим, что берега трещины входят во взаимный кон-



такт на участках  $A_1B_1, A_2B_2$ . Обозначим через  $L_0$  контур трещины,  $L$  — разомкнутые контуры  $A_1B_1, A_2B_2$ . После деформации часть контура  $L_0 \setminus L$  свободна от нагрузки, на  $L$  определена составляющая  $v = -u$  смещения  $U = u + iv$ . Касательные напряжения на  $L$  отсутствуют из-за симметрии. При приближении изнутри контактной зоны с точкам смыкания берегов трещины нормальные напряжения на контуре непрерывным образом изменяются до нуля.

В силу двойной симметрии, для которой  $\omega(-\xi) = -\omega(\xi)$  и  $\omega(\bar{\xi}) = \overline{\omega(\xi)}$ , рациональная функция  $z = \omega(\xi)$ , осуществляющая конформное отображение внешности контура  $L_0$  на внутренность  $D^+$  единичной окружности  $l_0$  плоскости  $\xi = |\xi| \exp(i\theta)$ , имеет нечетные степени и дей-

ствительные коэффициенты

$$z = \omega(\xi) = A \left( \xi^{-1} + \sum_{j=0}^k \xi^{2j+1} a_{2j+1} \right)$$

Обозначим  $n = 2k + 1$ . Указанное отображение переводит точки контура  $L_0$  в точки  $l_0$ , в частности, ставится соответствие между  $A_1$  и  $a_1 = a$ ,  $B_1$  и  $b_1 = -\bar{a}$ ,  $A_2$  и  $a_2 = -a$ ,  $B_2$  и  $b_2 = \bar{a}$ .

Известно [1], что радиальное  $\sigma_\rho$ , окружное  $\sigma_\theta$  и касательное  $\sigma_{\rho\theta}$  напряжения в плоскости  $\xi$ , а также смещения  $u, v$  в плоскости  $z$  выражаются через комплексные потенциалы  $\Phi(\xi), \Psi(\xi)$  зависимостями ( $\kappa, \mu$  — упругие постоянные)

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \sigma_\rho + \sigma_\theta &= 2 [\Phi(\xi) + \overline{\Phi(\xi)}] \\ \sigma_\rho + \sigma_{\rho\theta} &= \Phi(\xi) + \overline{\Phi(\xi)} - \xi [\omega(\xi) \overline{\Phi'(\xi)} + \overline{\omega'(\xi)} \Psi(\xi)] \times \\ &\times [\xi \omega'(\xi)]^{-1} \\ 2\mu(u + iv) &= \kappa \Phi(\xi) - \omega(\xi) \overline{\Phi(\xi)} - \psi(\xi) \\ \Phi(\xi) \omega'(\xi) &= \varphi'(\xi), \quad \Psi(\xi) \omega'(\xi) = \psi'(\xi) \end{aligned}$$

Упомянутые граничные условия при использовании (1.1) представим в виде

$$(1.2) \quad F_1(\sigma) \equiv \sigma c Z - \bar{\sigma} \bar{c} \bar{Z} = 0, \quad \sigma \in l_0$$

$$(1.3) \quad 2 |\omega'|^2 (\Phi + \overline{\Phi}) - \sigma c Z - \bar{\sigma} \bar{c} \bar{Z} = 0, \quad \sigma \in l_0 \setminus l$$

$$\Phi(\kappa c - \bar{c}) + \overline{\Phi}(\kappa \bar{c} - c) + \sigma Z + \bar{\sigma} \bar{Z} = 4\mu v', \quad \sigma \in l$$

где для краткости введены обозначения  $c = \sigma \omega'(\sigma)$ ,  $Z = \overline{\omega(\sigma)} \Phi'(\sigma) + \omega'(\sigma) \Psi(\sigma)$ ,  $v' = dv/d\theta = 1/2(c + \bar{c})$  и опущены аргументы. Условия (1.3) можно заменить эквивалентными, скомбинировав их с (1.2)

$$(1.4) \quad F_2(\sigma) \equiv \bar{c} (\Phi + \overline{\Phi}) - \sigma Z = 0, \quad \sigma \in l_0 \setminus l$$

$$F_3(\sigma) \equiv \Phi(\kappa c - \bar{c}) + \overline{\Phi}(\kappa \bar{c} - c) + \sigma (1 + c/\bar{c}) Z = 4\mu v', \quad \sigma \in l$$

Введем в рассмотрение кусочно-голоморфный вектор  $\Omega(\xi) = \{\Omega_1, \Omega_2\}$ , связанный с потенциалами  $\Phi(\xi), \Psi(\xi)$  для  $|\xi| < 1$  и их распространениями по симметрии  $\overline{\Phi}(\xi^{-1}), \overline{\Psi}(\xi^{-1})$  через единичную окружность  $l_0$  формулами

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \Omega_1(\xi) &= \begin{cases} \xi^{-1} \overline{\omega'(\xi^{-1})} \overline{\Phi}(\xi^{-1}), & |\xi| > 1 \\ -\xi^{-1} \overline{\omega'(\xi^{-1})} \Phi(\xi) + \xi \overline{\omega(\xi^{-1})} \Phi'(\xi) + \xi \omega'(\xi) \Psi(\xi), & |\xi| < 1 \end{cases} \\ \Omega_2(\xi) &= \begin{cases} -\omega'(\xi) \overline{\Phi}(\xi^{-1}) + \xi^{-2} \omega(\xi) \overline{\Phi'(\xi^{-1})} + \xi^{-2} \overline{\omega'(\xi^{-1})} \overline{\Psi}(\xi^{-1}), & |\xi| > 1 \\ \omega'(\xi) \Phi(\xi), & |\xi| < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Будем рассматривать  $F_1(\sigma), F_2(\sigma), F_3(\sigma)$  как значения на контуре  $l_0$  функций  $F_1(\xi), F_2(\xi), F_3(\xi)$ . Сделаем в последних преобразования с использованием выражений (1.5) и перейдем к пределу при  $\xi \rightarrow \sigma$ . Получим краевые условия, соответствующие (1.2), (1.4)

$$(1.6) \quad c(\Omega_1^+ - \Omega_1^-) + \bar{w}'(\Omega_2^+ - \Omega_2^-) = 0, \quad \sigma \in l_0$$

$$(1.7) \quad \Omega_1^+ - \Omega_1^- = 0, \quad \sigma \in l_0 \setminus l$$

$$(1.8) \quad (c + \bar{c}) \Omega_1^+ + (\kappa \bar{c} - c) \Omega_1^- + (\kappa + 1) \bar{w}' \Omega_2^+ = 4\mu v' \bar{c}, \quad \sigma \in l$$

где индексы плюс и минус означают пределы функций при стремлении к контуру  $l_0$  из  $D^+$  и  $D^-$  соответственно.

Соотношение (1.6) на контуре  $l_0 \setminus l$  имеет вид

$$(1.9) \quad \Omega_2^+ - \Omega_2^- = 0, \sigma \in l_0 \setminus l$$

а на контуре  $l$  его можно преобразовать к виду

$$(1.10) \quad (\bar{c} - \kappa c) \Omega_1^+ + \kappa (c + \bar{c}) \Omega_1^- + (x + 1) \bar{w}' \Omega_2^- = 4\mu v' \bar{c}, \sigma \in l$$

Условия (1.7) — (1.10) ставят краевую задачу Римана для вектора  $\Omega(\xi)$ , мероморфного на разрезанной вдоль дуг  $l$  окружности  $l_0$  плоскости  $\xi$ . После решения системы (1.8), (1.10) относительно  $\Omega^+(\sigma)$  эту задачу можно записать в матричной форме так:

$$(1.11) \quad \Omega^+(\sigma) = G(\sigma) \Omega^-(\sigma) + g(\sigma), \sigma \in l$$

$$G(\sigma) = \frac{1}{\kappa c - \bar{c}} \begin{vmatrix} \kappa(c + \bar{c}) & (\kappa + 1)\bar{w}' \\ -(\kappa + 1)\omega' & -(c + c') \end{vmatrix}$$

$$g(\sigma) = 2\mu \frac{c + \bar{c}}{\kappa c - \bar{c}} \begin{vmatrix} \bar{c} \\ -\omega' \end{vmatrix}$$

Полюсы вектора  $\Omega(\xi)$  определяются из (1.5):  $\Omega_1(\xi)$ ,  $\Omega_2(\xi)$  имеют в нуле и бесконечности соответственно полюсы порядков  $n$ ,  $1$  и  $2$ ,  $n - 1$ . Задача (1.11) для кусочно-мероморфного вектора  $\Omega(\xi)$  эквивалентна задаче для кусочно-голоморфного вектора  $N(\xi)$ , порядки полюсов которого на бесконечности равны  $n + 1$

$$(1.12) \quad N^+(\sigma) = G_0(\sigma) N^-(\sigma) + g_0(\sigma), \sigma \in l$$

$$N(\xi) = \Xi^{-1}(\xi) \Omega(\xi), \quad G_0(\sigma) = \Xi^{-1}(\sigma) C(\sigma) \Xi(\sigma), \quad g_0(\sigma) = \Xi^{-1}(\sigma) g(\sigma)$$

где  $\Xi(\xi)$  — диагональная матрица с главными элементами  $\xi^{-n}$  и  $\xi^{-2}$ .

Матрицы  $G_0(\sigma)$  и  $G(\sigma)$  — неособенные на  $l$ . Действительно, их определитель

$$\Delta(\sigma) = \det G(\sigma) = \det G_0(\sigma) = (\kappa \bar{c} - c) / (\kappa c - \bar{c}),$$

нигде на  $l$  в нуль не обращается: модуль  $\Delta(\sigma)$  на  $l$  равен единице.

**2. Решение задачи Римана на разомкнутых контурах.** Рассмотрим однородную задачу, соответствующую (1.12)

$$(2.1) \quad N^+(\sigma) = G_0(\sigma) N^-(\sigma), \sigma \in l$$

Представим матрицу  $G_0(\sigma)$  с рациональными коэффициентами в виде

$$(2.2) \quad G_0(\sigma) = R(\sigma) H(\sigma) R^{-1}(\sigma)$$

$$H(\sigma) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta(\sigma) \end{vmatrix}, \quad R(\sigma) = \begin{vmatrix} -1 & \sigma^n \bar{c} \\ 1 & \sigma^n c \end{vmatrix}$$

Здесь  $H(\sigma)$  — диагональная матрица, составленная из характеристических функций матрицы  $G_0(\sigma)$ ,  $R(\sigma)$  — неособенная на  $l$  полиномиальная матрица.

Для вектора  $S(\xi)$ , определяемого выражением

$$(2.3) \quad S(\xi) = \det R(\xi) R^{-1}(\xi) N(\xi).$$

имеем краевую задачу

$$(2.4) \quad S^+(\sigma) = H(\sigma) S^-(\sigma), \quad \sigma \in l$$

Уравнение (2.4) представляет собой совокупность двух независимых задач Римана для кусочно-голоморфных функций  $S_1(\xi)$ ,  $S_2(\xi)$  на разомкнутых контурах  $l$

$$(2.5) \quad S_1^+(\sigma) = S_1^-(\sigma), \quad \sigma \in l_1$$

$$(2.6) \quad S_2^+(\sigma) = \Delta(\sigma) S_2^-(\sigma), \quad \sigma \in l$$

Методы решения последних задач известны [2].

Будем искать канонические решения задач (2.5), (2.6) в классе функций, ограниченных на концах контуров  $l$  (вспомним, что напряжение  $\sigma_p$  в этих точках равно нулю). Функция  $S_1(\xi)$  непрерывна на  $l_0$  и имеет в качестве канонического решения единицу. Индекс задачи (2.5) равен нулю. Задача для  $S_2(\xi)$  на контуре  $l_0$  имеет разрывный коэффициент  $K(\sigma)$ , равный  $\Delta(\sigma)$  на  $l$  и 1 на  $l_0 \setminus l$ .

Введем функции  $S_3^+(\xi)$ ,  $S_3^-(\xi)$  по формулам

$$(2.7) \quad S_2^\pm(\xi) = \Pi^\pm(\xi) S_3^\pm(\xi)$$

$$\Pi^+(\xi) = [(\xi^2 - a^2)(\xi^2 - \bar{a}^2)]^{-\vartheta}, \quad \Pi^-(\xi) = [(1 - a^2/\xi^2)(1 - \bar{a}^2/\xi^2)]^{-\vartheta}$$

Функция  $\Pi^+(\xi)$  голоморфна на плоскости  $\xi$ , разрезанной вдоль произвольных линий, соединяющих точки  $\pm a$ ,  $\pm \bar{a}$  и  $\infty$ . Функция  $\Pi^-(\xi)$  голоморфна на плоскости  $\xi$ , разрезанной вдоль линий, соединяющих 0 и  $\pm a$ ,  $\pm \bar{a}$ . Показатель  $\vartheta$  характеризует скачки коэффициента рассматриваемой задачи при переходе через концы  $l$ : вследствие двухосной симметрии они одинаковы и равны  $\exp(2\pi i \vartheta)$ .

Задача

$$(2.8) \quad S_3^+(\sigma) = K_0(\sigma) S_3^-(\sigma), \quad \sigma \in l_0$$

имеет непрерывный коэффициент  $K(\sigma) = \Pi^-(\sigma) / \Pi^+(\sigma)$ . Обозначим индекс задачи (2.8) через  $\lambda$ . По определению [2], индекс задачи (2.8) зависит от класса решения  $S_3(\xi)$  и от длины контактной зоны  $l$ . В силу симметрии он четен. Для решений, ограниченных на концах  $l$ , и малой длины  $a_1 b_1$  он равен  $(-2)$  ( $-2m$ , если число пар контактных зон есть  $m$ ). Увеличение длины  $a_1$ ,  $b_1$  может отклонять значение индекса как в ту, так и в другую сторону, однако будем рассматривать малые зоны, так, что  $\lambda \leq 0$ .

Каноническое решение задачи (2.8) имеет вид [2]

$$(2.9) \quad y^+(\xi) = \exp \Gamma^+(\xi), \quad y^-(\xi) = \xi^{-\lambda} \exp \Gamma^-(\xi)$$

$$\Gamma(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_0} \frac{\ln K_0(\sigma) d\sigma}{\sigma - \xi}$$

На основании формул (2.7), (2.9) получаем каноническое решение задачи (2.6)

$$(2.10) \quad x(\xi) = \Pi(\xi) y(\xi)$$

Таким образом, каноническое решение задачи (2.4) имеет вид

$$(2.11) \quad X(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x(\xi) \end{pmatrix}$$

Убедимся, что матрица  $R(\xi)X(\xi)$  — фундаментальное решение задачи (2.1). Действительно,

$$H(\sigma) = X^+(\sigma)[X^-(\sigma)]^{-1}$$

Тогда

$$G_0(RX^-) = RHR^{-1}RX^- = RX^+[X^-]^{-1}X^- = RX^+$$

Кроме того,

$$\det(RX) = \det R(\xi) \det X(\xi) \neq 0$$

так как матрица  $R(\xi)$  неособенная на  $l$  и, следовательно, ее определитель не равен тождественно нулю, что и требовалось.

Определитель матрицы  $R(\xi)$  можно представить в виде

$$\delta(\xi) = \det R(\xi) = \xi^n [\bar{c}(\xi^{-1}) - c(\xi)] = \delta_0 \prod_{j=1}^{2n} (\xi - \xi_j)$$

Процесс построения нормальной системы решений из фундаментальной состоит из конечного числа операций по последовательному исключению нулей  $\delta(\xi)$  из конечной части плоскости [3]. Совокупность этих операций для матрицы  $R(\xi)X(\xi)$  эквивалентна умножению ее справа на матрицу  $Q(\xi)$ , структура которой имеет вид

$$Q(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & q(\xi)/\delta(\xi) \\ 0 & 1/\delta(\xi) \end{pmatrix}$$

где  $q(\xi)$  — полином порядка не выше  $2n - 1$ . Коэффициенты полинома определены упомянутым выше процессом.

Матрица нормальной системы решений имеет вид

$$T(\xi) = RXQ = \begin{pmatrix} -1 & [-q(\xi) + \xi^n \bar{c}(\xi^{-1})x(\xi)]/\delta(\xi) \\ 1 & [q(\xi) - \xi^n c(\xi)x(\xi)]/\delta(\xi) \end{pmatrix}$$

Порядок [3] первого столбца матрицы  $T(\xi)$  равен 0, порядок второго для  $\lambda \leq 0$  равен  $-\lambda$ . Рассмотрим предел

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \det \left\{ T(\xi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi^\lambda \end{pmatrix} \right\} = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & B \end{pmatrix} = -B$$

где  $B$  — коэффициент при старшем члене  $\xi^{-\lambda}$  разложения  $T_{22}(\xi)$  по степеням  $\xi$  в окрестности бесконечно удаленной точки. Так как  $B \neq 0$ , то нормальная система решений  $T(\xi)$  каноническая [3], причем частные индексы равны 0 и  $\lambda$ .

Общее решение неоднородной задачи Римана (1.12) имеет вид

$$(2.12) \quad N(\xi) = T(\xi) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{[T^+(\sigma)]^{-1} g_0(\sigma)}{\sigma - \xi} d\sigma + P(\xi) \right\}$$

где  $P(\xi) = \{P_1, P_2\}$ ;  $P_1(\xi), P_2(\xi)$  — полиномы порядков  $n + 1$  и  $n + 1 + \lambda$  с неопределенными коэффициентами.

Общее решение задачи (1.11) представляется в виде

$$(2.13) \quad \Omega(\xi) = Y(\xi) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int \frac{[Y^+(\sigma)]^{-1} g(\sigma)}{\sigma - \xi} d\sigma + P(\sigma) \right\}, \quad Y(\xi) = \Xi(\xi) T(\xi)$$

Среди всех наборов неопределенных коэффициентов вектора  $P(\xi)$  существует такой, который удовлетворяет условиям поставленной задачи теории упругости, а именно:

а) должно выполняться условие (следствие (1.5))

$$(2.14) \quad \xi \Omega_1(\xi) \equiv \bar{\Omega}_2(\xi^{-1})$$

б) потенциалы  $\Phi(\xi)$ ,  $\Psi(\xi)$  должны иметь в окрестности  $\xi = 0$  вид [1]

$$(2.15) \quad \Phi(\xi) = \Gamma + \Phi_0(\xi), \quad \Psi(\xi) = \Gamma' + \Psi_0(\xi)$$

где  $\Gamma$ ,  $\Gamma'$  — величины, характеризующие нагрузку на бесконечности;  $\Phi_0(\xi)$ ,  $\Psi_0(\xi)$  — голоморфные в окрестности  $\xi = 0$  функции;

в) так как в исходных граничных условиях задавалось не смещение, а его производная, то смещение определено решением с точностью до произвольной постоянной и требуется выполнить условие смыкания берегов трещины

$$(2.16) \quad U[\omega(a)] - U[\omega(\bar{a})] = \omega(\bar{a}) - \omega(a)$$

При использовании условий (2.14), (2.15) элементы матрицы  $T(\xi)$  следует разложить в ряд Тейлора в окрестности  $\xi = 0$ . Кроме того, разложению в ряд по степеням  $\xi$  подлежат интегралы, подразумевающиеся в (2.13). При использовании условий (2.15) следует учесть, что потенциалы  $\Phi(\xi)$  и  $\Psi(\xi)$  выражаются через  $\Omega(\xi)$  в виде

$$\Phi(\xi) \omega'(\xi) = \Omega_2(\xi), \quad |\xi| < 1$$

$$\xi \omega'(\xi) \Psi(\xi) = \Omega_1(\xi) + \xi^{-1} \bar{\omega}'(\xi^{-1}) \Phi(\xi) - \xi \bar{\omega}(\xi^{-1}) \Phi'(\xi)$$

$$|\xi| < 1$$

Соотношение (2.16) можно переписать в виде

$$(2.17) \quad 2\mu [\omega(\bar{a}) - \omega(a)] = i \int_a^{\bar{a}} [c(\kappa\Phi - \bar{\Phi}) + \bar{\sigma}Z] d\sigma$$

Формула (2.17) получена дифференцированием последнего уравнения из (1.1) и использования обозначений, принятых в (1.3).

Вычислительную работу можно значительно сократить, если воспользоваться результатами работы [4]: для задач, обладающих двухосной симметрией, разложения комплексных потенциалов  $\Phi(\xi)$ ,  $\Psi(\xi)$  по степеням  $\xi$  имеют только четные степени и действительные коэффициенты. Свойствами такой симметрии обладают и функции:  $x(\xi)$ ; элементы  $T_{12}(\xi)$ ,  $T_{22}(\xi)$  второго столбца матрицы  $T(\xi)$ ; интегралы  $I^1(\xi)$ ,  $I^2(\xi)$ , подразумевающиеся в формуле (2.13). Проверка этого утверждения состоит в проверке выполнения для каждой из этих функций равенств  $F(-\xi) = F(\xi)$ ,  $F(\bar{\xi}) = \overline{F(\xi)}$ . Поэтому справедливы разложения с действительными коэффи-

циентами

$$(2.18) \quad x(\xi) = x_0 + x_2 \xi^2 + x_4 \xi^4 + \dots$$

$$I^1(\xi) = I_0^1 + I_2^1 \xi^2 + \dots, \quad I^2(\xi) = I_0^2 + I_2^2 \xi^2 + \dots$$

$$Y(\xi) = \begin{vmatrix} -\xi^{-1} & \xi^{-1}(t_0^1 + t_2^1 \xi^2 + \dots) \\ \xi^{-2} & \xi^{-2}(t_0^2 + t_2^2 \xi^2 + \dots) \end{vmatrix}$$

Теперь из (2.13) можно сделать вывод о том, что нечетные коэффициенты полиномов  $P_1(\xi)$ ,  $P(\xi)$  равны нулю, а четные — действительного типа.

Следует заметить, что нагрузка на бесконечности должна быть согласована с шириной контактной зоны: при заданной нагрузке нормальное напряжение в точке  $a$  контура  $l_0$  должно быть нулевым (предел берется изнутри  $l$ ).

*Замечания.* 1°. Выкладки остаются в силе, если число пар контактных зон есть  $m$ . При этом меняется лишь функция  $\Pi(\xi)$ , которая в этом случае имеет вид

$$\Pi^\pm(\xi) = \prod_{j=1}^m \Pi_j^\pm(\xi)$$

а под  $\Pi_j^\pm(\xi)$  понимаются выражения, стоящие в правых частях формул, рассматриваемых в (2.7). Следует учитывать, что под  $a$  теперь понимается  $a_j$  — начало зоны  $j$ , и под  $\vartheta$  понимается  $\vartheta_j$  — постоянная, характеризующая скачок коэффициента  $K_0(\sigma)$  в точке  $a_j$ .

2°. При построении канонического решения задачи (2.1) на индекс частной задачи (2.6) накладывалось условие  $\lambda \leq 0$ , принятое из физических соображений. Вообще говоря, допустимо любое значение  $\lambda$ , в частности  $\lambda > 0$ . В последнем случае  $T(\xi)$  уже не будет каноническим решением и требуются определенные процедуры [3] для построения последнего. Совокупность процедур по построению канонического решения можно заменить матричным множителем, действующим на нормальное решение  $T(\xi)$  справа.

Дальнейшие рассуждения остаются в силе.

**3. Пример. Трещина эллиптического профиля.** Пусть трещина имеет ширину  $2a$  и размах  $2D$ . Контур трещины отображается в единичную окружность  $l_0$  функцией

$$z = \omega(\xi) = A(\xi^{-1} + m\xi), \quad A = \frac{1}{2}(D - d), \quad m = (D + d)/(D - d) > 1$$

Уравнение (1.11) имеет коэффициент  $G(\sigma)$  и свободный член  $g(\sigma)$  в виде

$$G(\sigma) = \frac{1}{(\kappa + m)(\sigma \varepsilon^2 - \sigma^{-1})} \begin{vmatrix} \kappa(m-1)(\sigma + \sigma^{-1}) & (\kappa + 1)(m - \sigma^2) \\ (\kappa + 1)(\sigma^{-2} - m) & (1 - m)(\sigma + \sigma^{-1}) \end{vmatrix}$$

$$g(\sigma) = 2\mu A \frac{m-1}{\kappa + m} \frac{\sigma^2 + 1}{\sigma^2(\sigma^2 \varepsilon^2 - 1)} \begin{vmatrix} \sigma(\sigma^2 - m) \\ m\sigma^2 - 1 \end{vmatrix}, \quad \varepsilon^2 = \frac{1 + \kappa m}{\kappa + m}$$

$$\det G(\sigma) = -\varepsilon^2(\sigma^2 - \varepsilon^2) / (\sigma^2 - 1 / \varepsilon^2)$$

Матрица  $R(\xi)$  и нормализующий множитель  $Q(\xi)$  имеют вид

$$R(\xi) = \begin{vmatrix} -1 & A(m - \xi^2) \\ 1 & A(1 - m\xi^2) \end{vmatrix}, \quad Q(\xi) = \begin{vmatrix} 1 & Ae/\delta(\xi) \\ 0 & 1/\delta(\xi) \end{vmatrix}$$

$$\delta(\xi) = A(m + 1)(\xi^2 - 1), \quad e = (m - 1)x(1)$$

где  $x(1)$  вычисляется по формуле (2.10). Так как  $n = 1$ , то матрицы  $\Xi(\xi)$ ,  $P(\xi)$  имеют вид

$$\Xi(\xi) = \begin{vmatrix} \xi^{-1} & 0 \\ 0 & \xi^{-2} \end{vmatrix}, \quad P(\xi) = \begin{vmatrix} P_0^1 + P_1^1 \xi + P_2^1 \xi^2 \\ P_0^2 \end{vmatrix}$$

В силу сказанного выше  $P_1^1 = 0$ ;  $P_0^1, P_2^1, P_0^2$  — действительные.

Определим неизвестные коэффициенты, пользуясь разложениями (2.18). Условие (2.14) ничего нового не добавляет: оно лишь подтверждает действительный характер коэффициентов. Представление потенциалов  $\Phi(\xi), \Psi(\xi)$  в форме (2.15) дает два коэффициента:

$$\begin{aligned} P_0^1 &= -I_0^1 + A \{ \Gamma' [(m-1)x(1) + x(0)] + \Gamma (m^2 - 1)x(1) \} \times \\ &\times [x(0)(m+1)]^{-1}, \\ P_0^2 &= -I_0^2 + A \{ \Gamma' + (m+1)\Gamma \} [x(0)]^{-1} \end{aligned}$$

В результате выполнения интегрирования соотношение (2.17) примет вид

$$2\mu [\omega(\bar{a}) - \omega(a)] = P_2^1 w_1 + w_2$$

где  $\omega_1, \omega_2$  — некоторые постоянные. Последнее выражение однозначно определяет  $P_2^1$ . Чтобы согласовать нагрузку на бесконечности с шириной контактной зоны, будем считать  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  функциями параметра  $\gamma$ . Тогда вектор  $\Omega(\xi)$ , следовательно,  $\Phi(\xi)$  и  $\Psi(\xi)$  также будут функциями этого параметра. Выражение нормального напряжения  $\sigma_p(\xi, \gamma)$  через последние дается формулами (1.1), (1.5). Решая уравнение

$$\sigma_p(a, \gamma) = 0$$

получим значение параметра  $\gamma$ , согласующего рассматриваемые величины.

Поступила 27 XI 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., «Наука», 1977.
3. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
4. Толоконников Л. А., Султанов И. С. О свойствах комплексных потенциалов в плоских задачах теории упругости, имеющих оси симметрии. В кн.: Сборник работ по теории упругости. Тула, 1968, стр. 115—119.