

ВОЛНЫ СДВИГА В УПРОЧНЯЮЩИХСЯ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛАХ

Б. А. Друянов

(Москва)

Рассматривается динамическое течение упрочняющейся жесткопластической среды при законе текучести, ассоциированном к условию текучести Мизеса или Треска. За параметр упрочнения принят параметр Одквиста (в теории Мизеса параметр Одквиста связан с удельной пластической работой w зависимостью $dw = k d\chi$, где k — предел текучести на сдвиг). Показано, что в произвольной сплошной среде поверхность слабого разрыва скорости (S) в каждой точке должна касаться главного направления тензора скоростей деформации, если главные направления этого тензора непрерывны. Закон течения накладывает на S новые ограничения. Так, в теории Мизеса слабые разрывы скорости могут быть только на поверхности максимального сдвига.

В качестве примера рассматривается задача о распространении пластической деформации в полуплоскости при задании скорости на краю, решение которой показывает, что слабые разрывы могут быть вызваны краевыми условиями. Оказывается также, что непрерывное или содержащее только слабые разрывы скорости решение возможно не всегда. В связи с этим решается задача о структуре сильного разрыва скорости (ударной волны) с учетом вязкости. Получены условия существования ударной волны и уравнение, определяющее скорость ее распространения. Полученные результаты применяются к вопросу о распространении деформации в жесткопластических телах.

Среди большого количества работ по волновой теории пластических сред отметим [1-3] как наиболее близкие по теме к данной статье.

1. Кинематические условия на поверхностях слабого разрыва скорости (S). Покажем, что в сплошной среде независимо от ее свойств поверхность S должна касаться одного из главных направлений тензора ϵ_{ij} , если поле скоростей (v_i) и главные направления ϵ_{ij} непрерывны на S .

Обозначим области, прилегающие к S , через D_1 и D_2 . Пусть поле скоростей v_i и тензор ϵ_{ij} известны в некоторой окрестности S в рассматриваемый момент. Рассмотрим произвольную точку M на S , в которой однозначно определены главные направления тензора ϵ_{ij} . Введем в D_1 и D_2 в окрестности точки M систему координат η_i , координатные линии которой совпадают с траекториями главных скоростей деформации.

Компоненты тензора скоростей деформации запишем в виде (H_i — параметры Ламе)

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial v_1}{\partial s_1} + v_2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial s_2} + v_3 \frac{\partial \lambda_1}{\partial s_3}, \dots \\ 2\epsilon_{12} = \gamma_{12} &= \frac{\partial v_1}{\partial s_2} + \frac{\partial v_2}{\partial s_1} - v_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial s_2} - v_2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial s_1} \\ (\lambda_i &= \ln H_i, \partial / \partial s_i = H_i^{-1} \partial / \partial \eta_i) \end{aligned}$$

В системе координат η_i по обе стороны от S выполняются соотношения $\gamma_{ij} = 0$. Систему координат η_i всегда можно выбрать так, чтобы $v_i = 0$ в точке M . Тогда в точке M должны выполняться соотношения

$$(1.2) \quad \left[\frac{\partial v_2}{\partial s_1} \right] + \left[\frac{\partial v_1}{\partial s_2} \right] = 0, \quad \left[\frac{\partial v_3}{\partial s_2} \right] + \left[\frac{\partial v_2}{\partial s_3} \right] = 0 \\ \left[\frac{\partial v_1}{\partial s_3} \right] + \left[\frac{\partial v_3}{\partial s_1} \right] = 0$$

Здесь $[\partial v_i / \partial s_j]$ — скачок $\partial v_i / \partial s_j$ на S . Полагая $\partial v_i / \partial s_j = \mu_i n_j$, где $\mu_i = \partial v_i / \partial n$ — скачок производной по нормали к поверхности разрыва, а n_j — направляющие косинусы нормали, получаем систему уравнений относительно μ_i

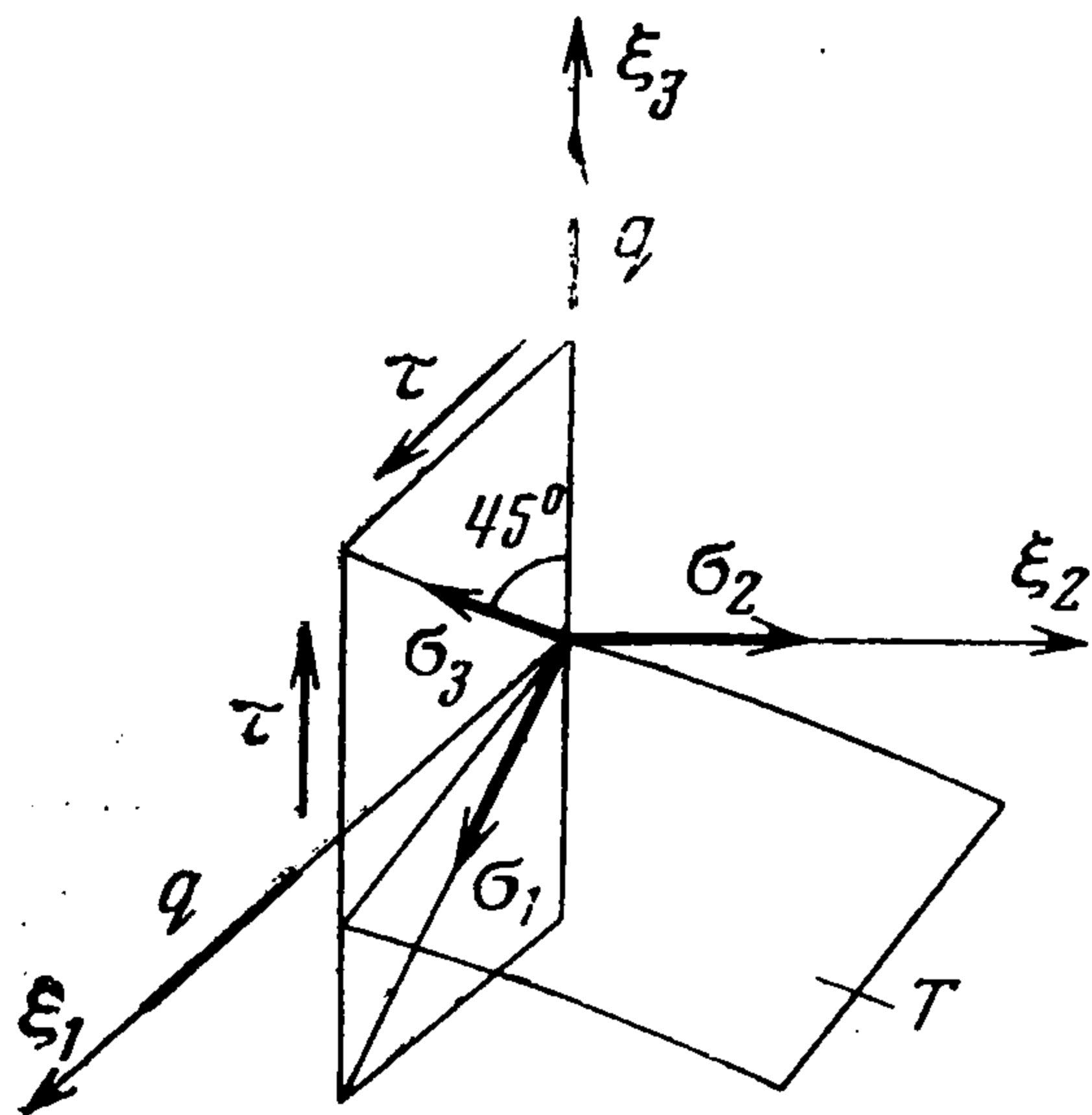
$$(1.3) \quad \mu_1 n_2 + \mu_2 n_1 = 0 \\ \mu_2 n_3 + \mu_3 n_2 = 0, \quad \mu_1 n_3 + \mu_3 n_1 = 0$$

Ненулевые решения будут при условии $n_1 n_2 n_3 = 0$. Следовательно, одно из главных направлений ε_{ij} касается S .

2. Разрывы в теории Мизеса. В дальнейшем рассматриваются только такие поверхности слабого разрыва скорости S или, что то же самое,

поверхности разрыва тензора скоростей деформации, на которых главные направления тензора напряжений непрерывны и, следовательно, непрерывны главные направления тензора ε_{ij} . Такое ограничение оправдано представлением о поверхностях разрыва напряжений как о вырожденных жестких зонах, принятом в квазистатике теории пластичности, вследствие чего на них не может терпеть разрыв тензор ε_{ij} .

Закон течения может накладывать дополнительные ограничения на поверхность S .



Фиг. 1

Пусть σ_i — главные напряжения, причем $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Введем криволинейные координаты ξ_i . Направление ξ_2 в каждой точке совместим с направлением σ_2 , а направления ξ_1, ξ_3 — с направлениями площадок экстремального касательного напряжения (фиг. 1). Если $\sigma_1 = \sigma_2$, то за ξ_2 можно принять любое направление, ортогональное к σ_3 . Аналогично поступаем в случае $\sigma_2 = \sigma_3$. Система координат ξ_i может быть введена в окрестности любой неособой точки тензора напряжений.¹

Пусть S_{ij} — тензор-девиатор напряжений. Имеем $s_{11} = s_{33} = -1/2 s_{22} = (q - \sigma_2) / 3$, $s_{12} = s_{23} = 0$, $s_{13} = \tau$.

Закон течения дает (k — предел текучести на сдвиг)

$$(2.1) \quad \varepsilon_{ij} = (\chi' / 2k) s_{ij}$$

Следовательно, $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{33} = -1/2 \varepsilon_{22}$, $\gamma_{12} = \gamma_{23} = 0$. Отсюда и из (1.1) получаем соотношения на поверхности слабого разрыва скорости S . (Теперь под $\partial / \partial s_i$ будем понимать оператор дифференцирования в направ-

лении ξ_i .) Рассуждая так же, как в п. 1, приходим к выводу, что поверхность S в каждой своей точке должна касаться одной из площадок экстремального сдвига. Такие поверхности будем называть поверхностями сдвига.

Предположим, что условие пластичности выполняется по обе стороны поверхности разрыва. Из предыдущего ясно, что разрывы ε_{ij} возможны только на поверхностях сдвига. Совместим поверхность $\xi_3 = \text{const}$ с поверхностью разрыва, не предполагая временно, что $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Условие пластичности имеет вид $(q - \sigma_2)^2 + 3\tau^2 = 3k^2$. Так как $[\tau] = [q] = 0$, то также $[\sigma_2] = 0$. Поскольку $[\varepsilon_{11}] = [\varepsilon_{22}] = 0$, то из (2.1) $\sigma_2 = q = 1/2 (\sigma_1 + \sigma_3)$. Следовательно, $[\varepsilon_{33}] = 0$.

Таким образом, если $\xi_3 = \text{const}$ — поверхность разрыва ε_{ij} , то $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Следовательно, поверхность разрыва ε_{ij} может быть только поверхностью максимального сдвига.

Пусть теперь $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Тогда $\tau = k$, $\gamma_{13} = \gamma$ (γ — максимальная скорость сдвига). Из (2.1) получаем $[\gamma] = [\chi]$.

Условие упрочнения в координатах ξ_i принимает форму

$$(2.2) \quad \chi = |\gamma|$$

Отсюда также следует условие $[\gamma] = [\chi']$, которое перепишем в виде (G — скорость поверхности разрыва по нормали)

$$(2.3) \quad (v_3 - G) [\partial\chi / \partial s_3] - [\gamma] = 0$$

3. Динамические условия совместности. Вычислим скачки ускорения на поверхности слабого разрыва скорости S , совместив ее с поверхностью $\xi_3 = \text{const}$. Систему координат ξ_i будем рассматривать как собственную для некоторой точки M поверхности S . Ускорение точки M будет $\mathbf{a} = d\mathbf{v} / dt = \partial\mathbf{v} / dt$. Отсюда $[a_i] = -G [\partial v_i / \partial s_3]$ (a_i — проекции ускорения на направления ξ_i). Из (1.1) следует, что для произвольной точки поверхности S

$$(3.1) \quad [a_1] = (v_3 - G) [\gamma_{13}] \\ [a_2] = (v_3 - G) [\gamma_{23}], \quad [a_3] = (v_3 - G) [\varepsilon_{33}]$$

В теории Мизеса, как было показано ранее, $[\gamma_{13}] = [\gamma]$, $[\gamma_{23}] = 0$, $[\varepsilon_{33}] = 0$, так что

$$(3.2) \quad [a_{11}] = (v_3 - G) [\gamma], \quad [a_2] = 0, \quad [a_3] = 0$$

Пусть σ_{ij} — физические компоненты тензора напряжений в координатах ξ_i . Имеем $\sigma_{11} = \sigma_{22} = q$, $\sigma_{12} = \sigma_{23} = 0$, $\sigma_{13} = \tau$. Уравнения движения запишутся в виде

$$(3.3) \quad \frac{\partial q}{\partial s_1} + q \frac{\partial \lambda_2}{\partial s_1} + \frac{\partial \tau}{\partial s_3} + \tau \frac{\partial}{\partial s_3} (2\lambda_1 + \lambda_2) - \sigma_2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial s_1} = \rho a_1 \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} + (\sigma_2 - q) \frac{\partial}{\partial s_2} (\lambda_1 + \lambda_3) = \rho a_2 \\ \frac{\partial \tau}{\partial s_1} + \tau \frac{\partial}{\partial s_1} (2\lambda_3 + \lambda_2) + \frac{\partial q}{\partial s_3} + q \frac{\partial \lambda_2}{\partial s_3} - \sigma \frac{\partial \lambda_2}{\partial s_3} = \rho a_3$$

Пусть e_i — орты системы координат ξ_i . По дериационным формулам

$$\frac{\partial e_1}{\partial s_1} = -\frac{\partial \lambda_1}{\partial s_2} e_2 - \frac{\partial \lambda_1}{\partial s_3} e_3, \quad \frac{\partial e_2}{\partial s_2} = -\frac{\partial \lambda_2}{\partial s_3} e_3 - \frac{\partial \lambda_2}{\partial s_1} e_1$$

Так как $\partial e_1 / \partial s_1 = \partial e_2 / \partial s_2 = 0$ на S , то $\partial \lambda_1 / \partial s_3 = \partial \lambda_2 / \partial s_3 = 0$.

Из (3.3) следуют динамические условия совместности на поверхности максимального сдвига

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \left[\frac{\partial \tau}{\partial s_3} \right] - [\sigma_2] \frac{\partial \lambda_2}{\partial s_1} &= \rho (v_3 - G) [\gamma] \\ \left[\frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} \right] + \left[(\sigma_2 - q) \frac{\partial}{\partial s_2} (\lambda_1 + \lambda_3) \right] &= 0 \\ \left[\frac{\partial q}{\partial s_3} \right] + 2\tau \left[\frac{\partial \lambda_3}{\partial s_1} \right] - [\sigma_2] \frac{\partial \lambda_2}{\partial s_3} & \end{aligned}$$

Как показано выше (п.2), в теории Мизеса $[\sigma_2] = 0$. Кроме того, $\partial \tau / \partial s_3 = \kappa (\chi) \partial \chi / \partial s_3$, где $\kappa = dk / d\chi$ — пластический модуль. Уравнения (3.4) приобретают вид

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \kappa \left[\frac{\partial \chi}{\partial s_3} \right] - \rho (v_3 - G) [\gamma] &= 0 \\ \left[\frac{\partial \lambda_3}{\partial s_2} \right] = 0, \quad \left[\frac{\partial q}{\partial s_3} \right] + 2\tau \left[\frac{\partial \lambda_3}{\partial s_1} \right] &= 0 \end{aligned}$$

Из (2.3) и первого уравнения (3.5) вытекает, что скорость распространения волны сдвига равна (V_n — нормальная скорость частиц на поверхности сдвига)

$$(3.6) \quad G - V_n = \sqrt{\kappa / \rho}$$

4. Условие Треска. Рассмотрим сначала случай $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Условие текучести в координатах ξ_i записывается в виде $\tau = k$. По ассоциированному закону течения $\varepsilon_{ij} = 0$, кроме $\varepsilon_{13} = 1/2 \gamma$. Таким образом, имеется пять кинематических уравнений, которые дают пять соотношений на поверхности слабого разрыва скорости. Их исследование приводит к выводу, что разрыв ε_{ij} возможен только на поверхностях максимального сдвига $\xi_3 = \text{const}$ или $\xi_1 = \text{const}$.

Рассмотрим разрывы на поверхности $\xi_3 = \text{const}$. Из первого уравнения (3.3) и (2.3) следует, что если $[\sigma_2] = 0$, то $[\gamma] \neq 0$ при условии (3.6). Если же вследствие краевых условий $[\sigma_2] \neq 0$, то $[\gamma] \neq 0$ при $\rho (v_3 - G)^2 \neq \kappa$.

Пусть теперь $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ (случай $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ рассматривается аналогично). В этом случае закон течения не накладывает никаких новых условий на поверхность слабого разрыва S по сравнению с п. 1. В силу условия $\sigma_1 = \sigma_2$ в любой точке произвольной поверхности имеется главное направление тензора σ_{ij} , касательное к этой поверхности. Так как тензоры σ_{ij} и ε_{ij} соосны, то выбор S ничем не ограничен.

Введем криволинейные координаты α, β, ν , причем ось ν направим по нормали к S , а ось β — по главному направлению, касательному к S . Условия пластичности запишутся в виде

$$(4.1) \quad f_1 = (\sigma_\nu - \sigma_\alpha)^2 + 4\tau_{\alpha\nu}^2 - 4k^2 = 0, \quad f_2 = \sigma_\nu + \sigma_\alpha - 2\sigma_\beta - 2k = 0$$

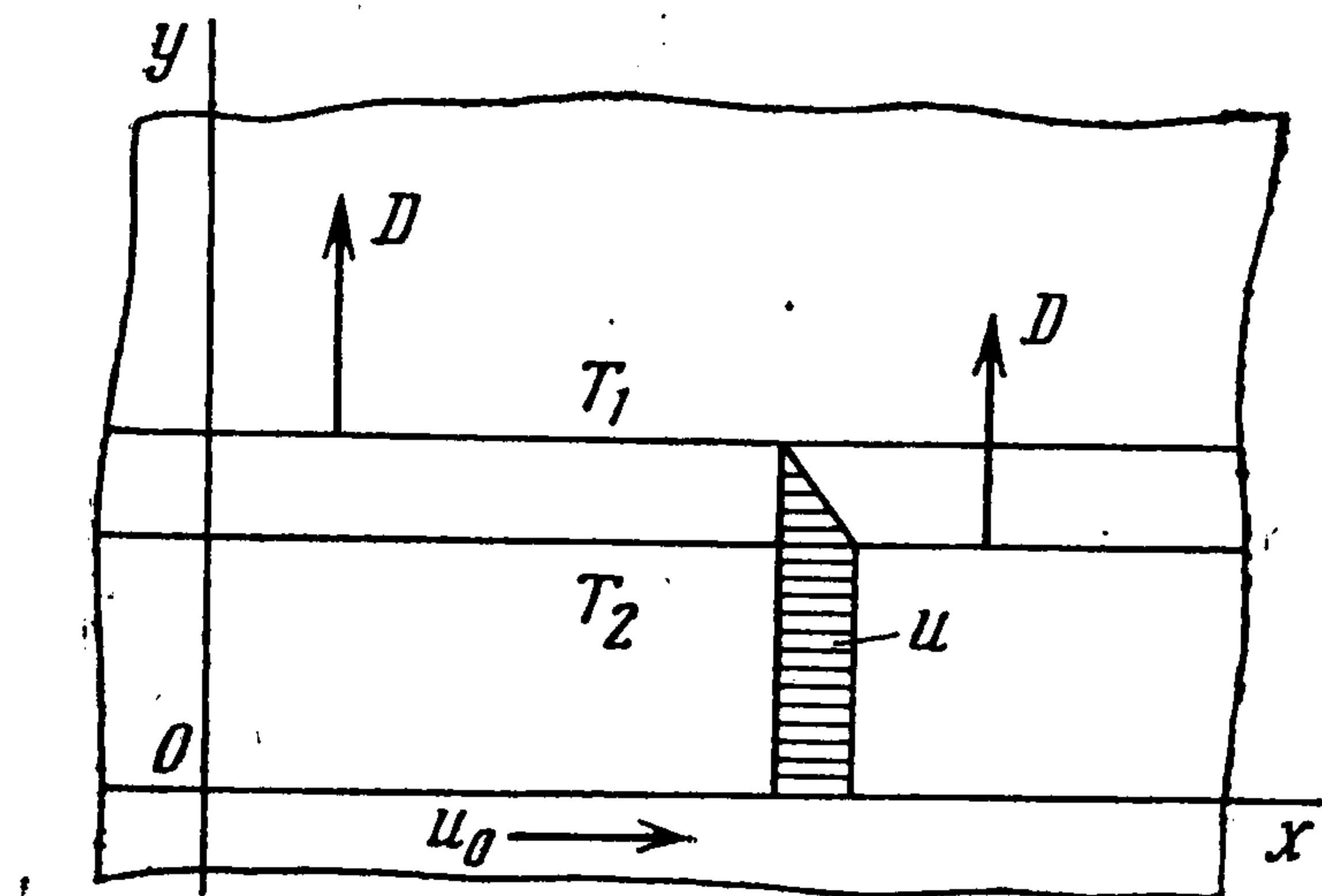
Отсюда видно, что $[\sigma_\alpha] = [\sigma_\beta] = 0$.

По ассоциированному закону течения

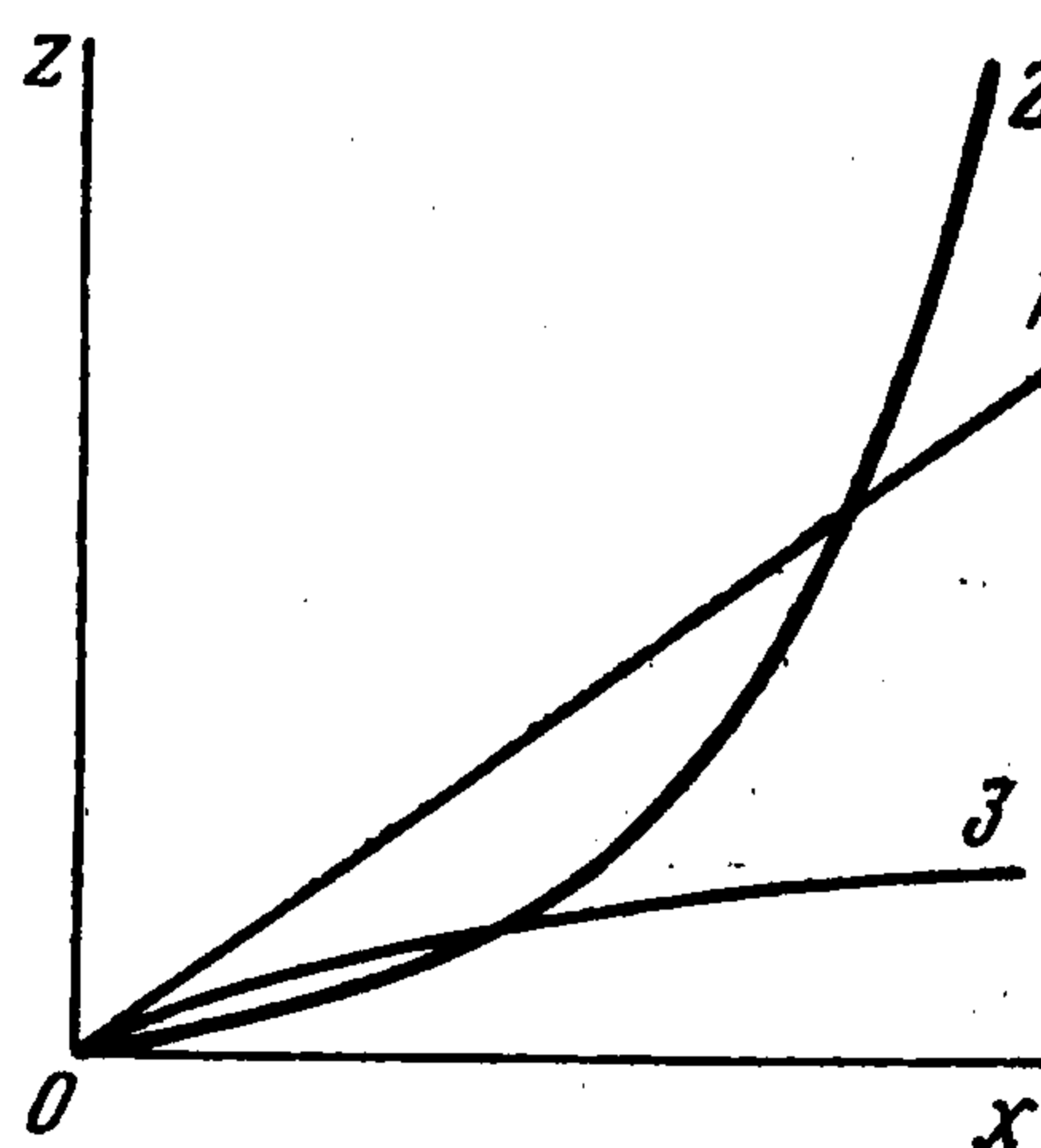
$$(4.2) \quad \begin{aligned} \varepsilon_\nu &= 2\mu_1 (\sigma_\nu - \sigma_\alpha) + \mu_2, & \varepsilon_\alpha &= 2\mu_1 (\sigma_\alpha - \sigma_\nu) + \mu_2 \\ \varepsilon_\beta &= -2\mu_2, & \varepsilon_{\alpha\nu} &= 4\mu_1 \tau_{\alpha\nu} \end{aligned}$$

Так как $[\varepsilon_\beta] = 0$, то $[\mu_2] = 0$. Поскольку $[\varepsilon_\alpha] = 0$, то $[\mu_1] (\sigma_\alpha - \sigma_\nu) = 0$. Поэтому разрывы ε_{ij} возможны лишь при $\sigma_\alpha = \sigma_\nu$. Из (4.1) вытекает, что $\tau_{\alpha\nu} = k$, т. е. S — поверхность максимального сдвига.

Так как $\sigma_1 = \sigma_2$, то $[\sigma_2] = 0$ и, как видно из (3.4) и (2.3), разрыв γ возможен лишь при условии (3.6).



Фиг. 2



Фиг. 3

Отметим, что в рассматриваемом случае, как и в предыдущих, скорость деформации, нормальная к S , непрерывна на S . Из (3.1) следует, что составляющая ускорения, нормальная к S , непрерывна на S .

Очевидно, что полученные результаты обобщаются на выпуклые и кусочно-линейные условия пластичности общего вида.

5. Распространение деформации в жесткопластических телах. На жесткопластических границах (T) возможно появление разного рода разрывов. Отметим прежде всего, что, применяя к T рассуждения п. 1, приходим к выводу, что поверхность T должна касаться хотя бы одного главного направления тензора ε_{ij} в каждой точке [4]. Можно также показать, что на T переносятся все кинематические ограничения, вытекающие из закона течения и полученные в п. 2, 4 [4]. Однако вопрос о скорости распространения жесткопластических границ в случае, когда на них имеет место скачок γ , зависит от того, находится ли материал в окрестности T , лежащей в жесткой зоне, на пределе текучести или нет.

При квазистатических течениях принято считать, что в жесткой области, прилегающей к T , материал находится на пределе текучести [5].

Если такое представление принять, то все выводы относительно скорости распространения поверхности слабого разрыва скорости, полученные выше, переносятся на жесткопластические границы. Однако очевидно, что в динамических течениях неверно считать, что во всех случаях материал в окрестности жесткопластической границы, лежащий в жесткой области, находится на пределе текучести.

В заключение рассмотрим распространение плоских волн сдвига в первоначально однородной полуплоскости $y \geq 0$ (фиг. 2). Пусть край полуплоскости жестко скреплен с недеформируемой рейкой, скорость которой задана. Обозначим через $u(t, y)$ единственную, отличную от нуля проекцию скорости на ось Ox . Тогда имеем краевое условие $u(t, 0) = 0$ при $t \leq 0$, $u(t, 0) = u_0(t)$, $u_0(0) = 0$ при $t \geq 0$. Кроме того, положим, что $u(0, y) = \chi(0, y) = 0$.

Уравнения движения и условие упрочнения записываются в форме

$$(5.1) \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \rho \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial t} = \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$$

Так как $\tau_{xy} = -k(\chi)$, то должно быть $\partial u / \partial y < 0$.

Уравнения (5.1) принимают вид

$$(5.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\kappa}{\rho} \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial t} = 0$$

Это гиперболическая система. Уравнения характеристик

$$dy = \pm \sqrt{\kappa / \rho} dt, \quad u \pm U(\chi) = \text{const}$$

$$U(\chi) = \int_0^\chi \sqrt{\kappa / \rho} d\chi$$

(знак плюс — для первого семейства, минус — для второго).

На плоскости ty жесткая область отделяется от деформируемой прямолинейной характеристикой первого семейства. Так как в жесткой области $u = \chi = U = 0$, то в области течения имеет место интеграл $u = U(\chi)$.

Характеристики первого семейства — прямые и вдоль них $u = \text{const}$ и $\chi = \text{const}$.

Из $u(t, y) = U(\chi)$ и (5.2) находим

$$\partial u / \partial y = -\sqrt{\rho / \kappa} \cdot \partial u / \partial t \text{ и } \partial u / \partial y|_{y=0} = \sqrt{\rho / \kappa} u_0'(t)$$

Отсюда видно, что деформация распространяется от границы, только пока рейка движется ускоренно. При $u_0' \leq 0$ от границы в глубь полуплоскости начинает распространяться жесткая зона, а деформируемая область в виде волнового пакета продолжает распространяться в глубь полуплоскости (фиг. 2).

Так как деформируемая область отделена от жестких областей характеристиками первого семейства, то жесткопластические границы распространяются со скоростью $\sqrt{\kappa / \rho}$. Появление на них разрыва $\gamma = \partial u / \partial y$ зависит от краевого условия $u_0(t)$. Если $u_0'(0) \neq 0$, то на переднем фронте волны T_1 возникает скачок γ . Аналогично, скачок γ может возникнуть и на заднем фронте волны T_2 .

Заметим, что если кривая упрочнения выпукла книзу, $\kappa'(\chi) = k''(\chi) > 0$, то в верхней полуплоскости ty существует огибающая характеристик первого семейства и, следовательно, построенное непрерывное решение не имеет места. В этом случае появляется ударная волна — линия сильного разрыва скорости.

6. Структура сильного скачка скорости. В [4, 6] было показано, что при $\kappa = \text{const}$ сильный разрыв скорости можно получить как предел слоя конечной толщины h , когда в нем $\gamma \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 0$. Этот метод непригоден при $\kappa \neq \text{const}$. В связи с этим рассмотрим установившееся течение вязкой жесткопластической среды в бесконечной плоскости при чистом сдвиге.

Пусть проекции скорости на оси x, y будут $u = u(y)$, $v = \text{const}$. Тогда $\sigma_x = \sigma_y = \text{const}$, $\tau_{xy} = \tau(y)$. Уравнение движения, условие упрочнения и закон течения запишутся в виде

$$(6.1) \quad \frac{d\tau}{dy} = \rho v \frac{du}{dy}, \quad v \frac{d\chi}{dy} = \frac{du}{dy}, \quad \tau = k(\chi) + s(u')$$

($s(u')$ — вязкое напряжение — заданная функция u' , $u' = du / dy$, $s(0) = 0$, $s'(u') > 0$). Имеем следующие краевые условия: $u = u' = \kappa = 0$ при $y \rightarrow -\infty$ и $u = u_1$, $u' = 0$, $\chi = \chi_1$ при $y \rightarrow \infty$.

Из первых двух уравнений и краевых условий при $y \rightarrow -\infty$ находим

$$(6.2) \quad \tau = \rho v u + k_0, \quad u = v \chi$$

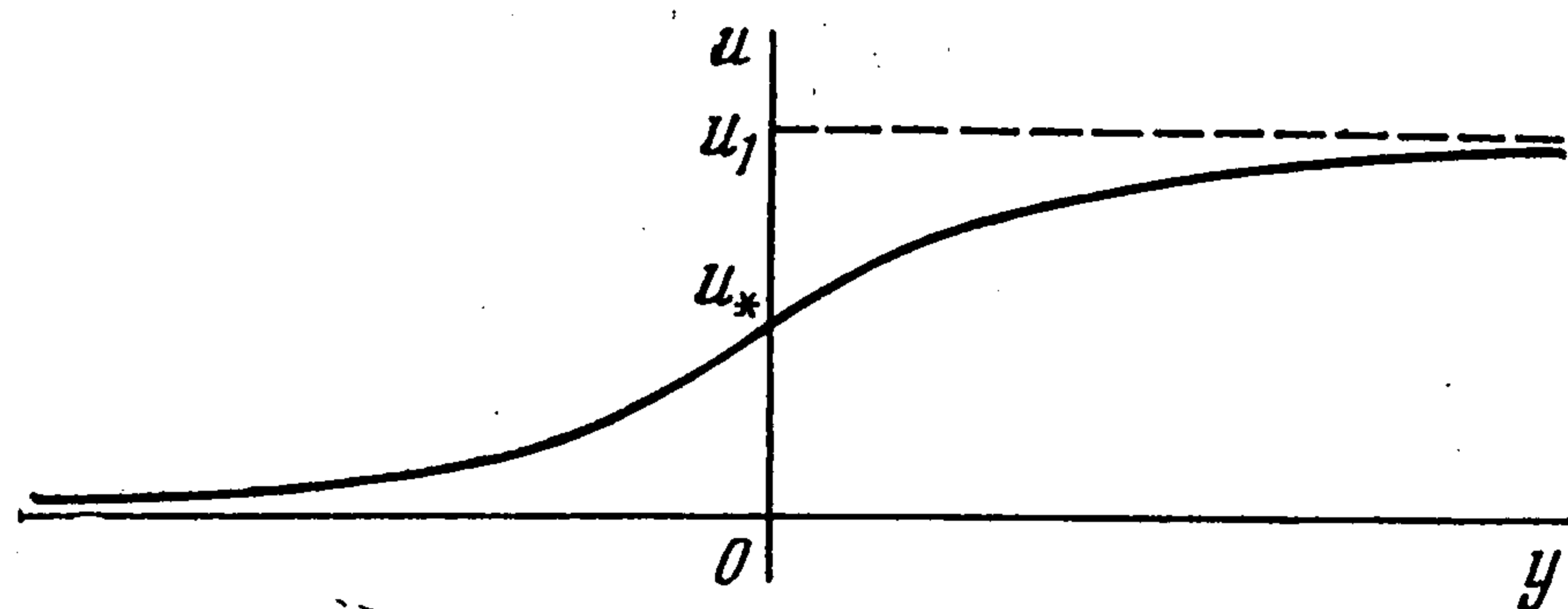
Подставляя (6.2) в последнее уравнение (6.1), получаем

$$(6.3) \quad s(u') = \rho v u - k(u/v) + k_0 = z(u)$$

Так как $s(u') > 0$, то $z > 0$. Учитывая, что $z(0) = 0$, потребуем, чтобы $dz/du > 0$ при $u = 0$. Получаем $\rho v^2 - k'(0) > 0$, или $v > \sqrt{k'(0)/\rho}$.

Краевое условие при $y \rightarrow \infty$ требует, чтобы $z(u_1) = 0$. Это требование приводит к уравнению, определяющему v — скорость распространения волны

$$k(u_1/v) - k_0 = \rho v u_1$$



Фиг. 4

На фиг. 3 показано взаимное расположение линии $z = \rho v u$ и $z = k(u/v) - k_0$ (1 — линия $z = \rho v^2 \chi$, 2 — линия $k(\chi) - k_0$ при $k'' > 0$, 3 — линия $k(\chi) - k_0$ при $k'' < 0$). Если кривая $k(\chi)$ выпукла книзу, то $z(u)$ обращается в нуль только при $u = 0$. Если же $k(\chi)$ выпукла кверху, то $z(u)$ имеет еще один нуль в точке $u = u_1$.

Таким образом, задача имеет решение только при $k''(\chi) > 0$, когда $k(\chi)$ выпукла книзу.

Заметим также, что в последнем случае dz/du обращается в нуль в точке $u = u_*$, определяемой из уравнения $k(u/v) = \rho v^2$, причем $v_* \in (0, u_0)$.

Пусть $f(z)$ — функция, обратная $s(u')$. Тогда из (6.3) находим зависимость y от u

$$(6.4) \quad y = \int_{u_*}^u \frac{du}{f(\rho v u - k(u/v) + k_0)}$$

Отсюда видно, что $y \rightarrow -\infty$ при $u \rightarrow 0$ и $y \rightarrow +\infty$ при $u \rightarrow u_1$. Зависимость $u(y)$ показана на фиг. 4.

Интересно отметить, что результаты п. 6 не зависят от того, находится ли материал вне ударной волны на пределе текучести или нет.

Поступила 19 IV, 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Томас Т. Пластическое течение и разрушение твердых тел. М., «Мир», 1964.
2. Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. М., «Наука», 1971.
3. Новацкий В. К. Волновые задачи теории пластичности. М., «Мир», 1978.
4. Друянов Б. А. Распространение деформации в упрочняющихся жесткопластических телах. Докл. АН СССР, 1978, т. 241, № 5.
5. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М., Гостехиздат, 1956.
6. Друянов Б. А. Стоячие волны сдвига в упрочняющихся жесткопластических телах. Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 6.