Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 4, 1980

УДК 539.3:534.1

ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ ДЛИННОВОЛНОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК

В. Л. Бердичевский, Ле Хань Чау

(Москва, Ханой)

Строятся уравнения, описывающие высокочастотные длинноволновые колебания оболочек. Они представляют обобщение на оболочки уравнений, полученных ранее для пластин [1]. Соответствующее обобщение для прямых стержней дано в работе [2].

1. Длинноволновые колебания. Под длинноволновым понимается напряженное состояние, характерный масштаб изменения которого по продольным координатам l значительно больше толщины оболочки h. Качественно возможные типы длинноволновых колебаний можно охарактеризовать следующим образом. Пусть лицевые поверхности оболочки свободны от нагрузок. Поскольку $l \gg h$, в уравнениях Ламе для перемещений и в краевых условиях можно пренебречь производными от перемещений по продольным координатам ξ^α (малые греческие индексы соответствуют проекциям на оси ξ^α и пробегают значения 1, 2) по сравнению с производными по поперечной координате ξ ($|\xi| \leqslant h/2$). Тогда уравнения Ламе распадутся на систему трех независимых уравнений

$$\mu \frac{\partial^2 w_\alpha}{\partial \xi^2} = \rho \frac{\partial^2 w_\alpha}{\partial t^2}, \quad |\xi| \leqslant \frac{h}{2}; \quad \frac{\partial w_\alpha}{\partial \xi} = 0, \quad \xi = \pm \frac{h}{2} \tag{1.1}$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad |\xi| \leqslant \frac{h}{2}; \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0, \quad \xi = \pm \frac{h}{2}$$

Здесь w_α и w — проекции перемещений на касательные векторы и на нормаль к срединной поверхности.

Перечислим полный набор частных решений уравнений (1.1)

$$w = u \cos \alpha\zeta, \quad w_\sigma = 0, \quad \alpha = \pi n, \quad \zeta = 2\xi / h \qquad (F_\perp(n)) \tag{1.2}$$

$$w = 0, \quad w_\sigma = \psi_\sigma \sin \beta\zeta, \quad \beta = {}^1/_2\pi (2n + 1) \qquad (F_\parallel(n))$$

$$w = \psi \sin \alpha\zeta, \quad w_\sigma = 0, \quad \alpha = {}^1/_2\pi (2n + 1) \qquad (L_\perp(n))$$

$$w = 0, \quad w_\sigma = u_\sigma \cos \beta\zeta, \quad \beta = \pi n \qquad (L_\parallel(n))$$

Величины α и β пробегают счетное число значений, однако во избежание громоздких обозначений, индексы у α и β не ставятся. Подразумевается, что каждому значению α и β соответствуют свои функции u, ψ_σ, ψ и u_σ; эти функции также не нумеруются. В каждом частном решении u, ψ_σ, ψ и u_σ произвольным образом зависят от продольных координат и гармонически зависят от t с частотой ω, которая определяется по соответствующим значениям α или β из формул

$$\omega = 2\alpha c_1 / h \quad \text{или} \quad \omega = 2\beta c_2 / h$$

$$(c_1^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho, \quad c_2^2 = \mu/\rho, \quad \alpha = e\beta, \quad e = c_2 / c_1)$$

В скобках в (1.2) указаны обозначения соответствующих решений.

Каждое из решений (1.2) при не зависящих от ξ^α функциях u, ψ_σ, ψ, u_σ представляет точное решение уравнений Ламе для бесконечной пластинки и соответствует колебаниям поперечных волокон, происходящих синхронно вдоль пластинки.

Для колебаний, амплитуда и частота которых медленно меняются вдоль пластинки, а также для колебаний оболочки уравнения (1.1) — приближенные уравнения нулевого приближения, а решения (1.2) можно рассматривать как главные члены некоторого асимптотического разложения, в котором u, ψ_σ, ψ, u_σ — функции продольных координат ξ^α и времени t, причем

$$\partial u / \partial t \sim \omega u, \quad \partial \psi_\sigma / \partial t \sim \omega \psi_\sigma, \quad \partial \psi / \partial t \sim \omega \psi, \quad \partial u_\sigma / \partial t \sim \omega u_\sigma$$

В этих оценках значения ω берутся для той же ветви, что и соответствующая функция, за исключением $F_\perp$ (0) и $L_\parallel$ (0), для которых принимается, что $u_{,t} = O\,(c_1 u / l)$, $u_{\alpha,\,t} = O\,(c_1 u_\alpha / l)$, l — характерный масштаб деформаций [3].

Ветви $F_\perp$ (0) и $L_\parallel$ (0) отвечают нулевому значению собственной частоты колебаний поперечного волокна и соответствуют низкочастотным колебаниям, когда $\omega h / c_1 \ll 1$. Независимость перемещений у этих ветвей в нулевом приближении от поперечной координаты является частью гипотезы Кирхгофа—Лява [4,5]. Все остальные ветви отвечают колебаниям с частотой $\omega \sim c_1 / h$. Для них время распространения возмущения по толщине сравнимо с периодом колебания, и перемещения даже в первом приближении нельзя считать полиномами по поперечной координате. Поскольку $\omega \to \infty$ при $h \to 0$, соответствующие колебания естественно назвать высокочастотными.

Например, при $n = 1$, $c_2 = 2500$ м/с, $h = 1$ мм для наименьшей «высокой» частоты имеем $\omega_1 \approx 4 \cdot 10^5$ Гц, т. е. ω_1 находится в ультразвуковой области. Колебания упругих тел с такой частотой могут быть существенны в задачах об ударе или в задачах о колебаниях, вызванных электромагнитным полем. Отметим, что для неоднородных по толщине оболочек со значительным перепадом упругих модулей ω_1 значительно меньше и может попасть даже в область звуковых частот.

Ветвь $F_\parallel$ (0) отвечает колебаниям, при которых происходит сдвиг поперечного волокна в полуволну синусоиды. Эту форму колебаний пытаются учесть в теориях оболочек типа Тимошенко. Однако использование в теориях оболочек типа Тимошенко линейного распределения перемещений по толщине вместо правильного синусоидального не позволяет достичь удовлетворительного количественного соответствия.

Следующие формы колебаний с ростом n все быстрее осциллируют по поперечной координате. Ветвь с номером n имеет $2n$ или $2n + 1$ узлов.

Любое длинноволновое колебание можно представить в виде суммы колебаний, соответствующих различным ветвям. Для каждой ветви ниже при помощи вариационно-асимптотического метода [3] будут написаны двумерные уравнения.

Оказывается, что ветви обладают замечательным свойством: в первом приближенпии они ортогональны по упругой и кинетической энергиям. Это означает, что в первом приближении колебания одного типа не вызывают колебаний другого типа и появляется возможность исследовать колебания одной ветви независимо от колебаний остальных.

2. Зависимость перемещений от поперечных координат. Отнесем недеформированное состояние оболочки к лагранжевым криволинейным координатам ξ^α, ξ

$$x^i = r^i(\xi^\alpha) + \xi n^i(\xi^\alpha), \quad -h/2 \leqslant \xi \leqslant h/2$$

Здесь x^i — декартовы координаты наблюдателя, $x^i = r^i(\xi^\alpha)$ — положение срединной поверхности Ω, $n^i(\xi^\alpha)$ — нормаль к Ω, h — толщина оболочки, латинские индексы соответствуют проекциям на оси x^i и пробегают значения 1, 2, 3. В лагранжевой системе координат компоненты метрического тензора и тензора деформации даются формулами

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2b_{\alpha\beta}\xi + c_{\alpha\beta}\xi^2, \quad g_{\alpha 3} = 0, \quad g_{33} = 1 \tag{2.1}$$

$$g^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta} + 2b^{\alpha\beta}\xi + 3c^{\alpha\beta}\xi^2 + O(h^3/R^3); \quad g^{\alpha 3} = 0, \quad g^{33} = 1$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = x^i_{(,\alpha} w_{i,\beta)} = r^i_{(\alpha} w_{i,\beta)} - \xi b^\sigma_{(\alpha} r_\sigma{}^i w_{i,\beta)} =$$

$$= w_{(\alpha;\beta)} - wb_{\alpha\beta} - \xi b^\sigma_{(\alpha} w_{\sigma;\beta)} + \xi w c_{\alpha\beta}$$

$$2\varepsilon_{3\alpha} = n^i w_{i,\alpha} + x^i_{,\alpha} w_{i,\xi} = w_{,\alpha} + b_\alpha{}^\sigma w_\sigma + w_{\alpha,\xi} - b_\alpha{}^\sigma \xi w_{\sigma,\xi}$$

$$\varepsilon_{33} = n^i w_{i,\xi} = w_{,\xi}$$

Здесь $w^i_\alpha = w_i r_\alpha{}^i$, $w = w_i n^i$ — проекции вектора перемещений w_i на касательные векторы $r_\alpha{}^i \equiv r^i{}_{,\alpha}$ и нормаль n^i, индекс 3 соответствует проекции на нормаль n^i; $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, $c_{\alpha\beta}$ — соответственно первая, вторая и третья квадратичные формы срединной поверхности Ω; запятая в индексах обозначает частное дифференцирование по ξ^α, точка с запятой — ковариантное дифференцирование относительно метрики $a_{\alpha\beta}$; круглыми скобками в индексах отмечается операция симметрирования.

Пусть край оболочки жестко заделан

$$w_i = 0 \quad \text{на } \Gamma \times [-h/2, h/2] \tag{2.2}$$

где Γ — граница срединной поверхности Ω. Положим сначала внешнюю нагрузку на лицевых поверхностях P^i равной нулю. Тогда перемещения, соответствующие свободным колебаниям оболочки,— экстремали функционала

$$I = \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \int_{-h/2}^{h/2} (U - \mathrm{K})\varkappa \, d\xi \, d\Omega \, dt \tag{2.3}$$

$$2U = \lambda(g^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{33})^2 + 2\mu g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta} + 2\mu\varepsilon_{33}{}^2 + 4\mu g^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha 3}\varepsilon_{\beta 3}$$

$$2K = \rho w_{,t}{}^2 + \rho a^{\alpha\beta} w_{\alpha,t} w_{\beta,t}, \quad \varkappa = 1 - 2H\xi + K\xi^2$$

Здесь H и K — средняя и гауссова кривизны Ω, $d\Omega$ — элемент площади на Ω.

Исследуем функционал (2.3) при помощи вариационно-асимптотического метода [3, 6].

Предположим, что всюду на Ω безразмерные параметры $h_* = h/R$ (R — минимальный радиус кривизны оболочки) и $h_{**} = h/l$ малы. Сделаем замену $\zeta = 2\xi/h$ и отбросим все малые в асимптотическом смысле члены. Придем к функционалу нулевого приближения

$$2I = \frac{h}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{-1}^{1}\left[(\lambda+2\mu)\frac{4}{h^2}w_{,\zeta}^2 + \mu a^{\alpha\beta}\frac{4}{h^2}w_{\alpha,\zeta}w_{\beta,\zeta} - \rho w_{,t}^2 - \right.$$
$$\left. - \rho a^{\alpha\beta}w_{\alpha,t}w_{\beta,t}\right] d\zeta\, d\Omega\, dt$$

Уравнения Эйлера этого функционала дают четыре серии собственных колебаний (1.2).

Для удовлетворения условиям жесткой заделки (2.2) на функции u, ψ_σ, ψ, u_σ наложим ограничения

$$u = \psi_\sigma = \psi = u_\sigma = 0 \quad \text{на } \Gamma \tag{2.4}$$

Найдем теперь следующее приближение для перемещений ветвей серии $F_\perp$. Считая u заданной функцией ξ^α, будем искать w_α. Оставляя в (2.3) главные члены, зависящие от w_α, и главные перекрестные члены, получим функционал

$$I = \frac{h}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega}\bar\Lambda\, d\Omega\, dt \tag{2.5}$$

$$2\bar\Lambda = \langle 2\lambda w^\sigma u_{,\sigma} 2\alpha h^{-1}\sin\alpha\zeta +$$
$$+ \mu a^{\lambda\sigma}(2h^{-1}w_{\lambda,\zeta} + u_{,\lambda}\cos\alpha\zeta)(2h^{-1}w_{\sigma,\zeta} + u_{,\sigma}\cos\alpha\zeta) - \rho\omega^2 w_\sigma w^\sigma\rangle$$

Через $\langle\cdot\rangle$ обозначен интеграл по ζ в пределах $[-1,1]$. При выводе (2.5) произведено интегрирование по частям и использованы краевые условия (2.4). Найдем экстремаль этого функционала. После варьирования (2.5) по w_α получим уравнения

$$w_{\sigma,\zeta\zeta} + \beta^2 w_\sigma = [(\lambda+\mu)/(2\mu)]\, h\alpha u_{,\sigma}\sin\alpha\zeta, \quad |\zeta| \leqslant 1$$
$$w_{\sigma,\zeta} + {}^1/_2\, h u_{,\sigma}\cos\alpha\zeta = 0, \quad \zeta = \pm 1$$

Они приводят к следующему значению тангенциальных перемещений:

$$w_\sigma = u_{,\sigma}\frac{h}{2\alpha}\left(\sin\alpha\zeta - \frac{2(-1)^n e\sin\beta\zeta}{\cos\beta}\right) \tag{2.6}$$

Как следовало ожидать, тангенциальные перемещения оказались гораздо меньше нормального перемещения (в нулевом приближении $w_\sigma = 0$) и имеют порядок $h_{**}u$.

Будем искать поправку к w

$$w = u\cos\alpha\zeta + w'$$

При этом w_σ считаются фиксированными и определенными по формуле (2.6).

Не уменьшая общности, на w' можно наложить следующее ограничение:

$$\langle w'\cos\alpha\zeta\rangle = 0$$

Оно соответствует предположению о том, что $u = \langle w\cos\alpha\zeta\rangle$.

После отбрасывания малых членов, содержащих w' и малых перекрестных членов по сравнению с оставленными, функционал (2.3) примет вид (2.5) с лагранжианом, который задается формулой

$$\overline{\Lambda}' = \Big\langle \frac{4}{h^2}(\lambda + 2\mu)\, w'^2_{,\zeta} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{h} 4H\zeta\alpha u \sin\alpha\zeta w'_{,\zeta} -$$

$$- 2\lambda \frac{4H}{h} w'_{,\zeta} u \cos\alpha\zeta + 2\lambda \frac{4H}{h} w'\alpha \sin\alpha\zeta - \rho (w'_{,t})^2 -$$

$$- 2\rho H h \zeta u_{,t} \cos\alpha\zeta\, w'_{,t} \Big\rangle$$

Его экстремаль имеет вид

$$w' = \frac{Hh}{2} u \left(\zeta \cos\alpha\zeta + \frac{1 - 4e^2}{\alpha} \sin\alpha\zeta\right)$$

Окончательно имеем следующее распределение перемещений по толщине в серии $F_\perp$ (с точностью до членов второго порядка малости по h_* и h_{**}):

(2.7) $$F_\perp:\quad w = u \cos\alpha\zeta + \frac{Hh}{2} u \left(\zeta \cos\alpha\zeta + \frac{1 - 4e^2}{\alpha} \sin\alpha\zeta\right)$$

$$w_\sigma = u_{,\sigma} \frac{h}{2\alpha}\left(\sin\alpha\zeta - \frac{2(-1)^n e \sin\beta\zeta}{\cos\beta}\right), \quad \alpha \neq 0$$

Аналогично получаются формулы для перемещений в трех остальных сериях

(2.8) $$F_\parallel:\quad w_\sigma = \psi_\sigma \sin\beta\zeta + \frac{h}{2}\left(H\psi_\sigma\zeta \sin\beta\zeta + \frac{\bar{b}_\sigma^{\,\lambda}}{\beta}\psi_\lambda \cos\beta\zeta\right)$$

$$w = \psi^\sigma_{;\sigma} \frac{h}{2\beta}\left(\cos\beta\zeta - \frac{2(-1)^n e \cos\alpha\zeta}{\sin\alpha}\right)$$

$$L_\perp:\quad w = \psi \sin\alpha\zeta + \frac{Hh}{2}\psi\left(\zeta \sin\alpha\zeta - \frac{1 - 4e^2}{\alpha}\cos\alpha\zeta\right)$$

$$w_\sigma = \psi_{,\sigma} \frac{h}{2\alpha}\left(-\cos\alpha\zeta + \frac{2(-1)^n e \cos\beta\zeta}{\sin\beta}\right)$$

$$L_\parallel:\quad w_\sigma = u_\sigma \cos\beta\zeta + \frac{h}{2}\left(Hu_\sigma\zeta \cos\beta\zeta - \frac{\bar{b}_\sigma^{\,\lambda}}{\beta} u_\lambda \sin\beta\zeta\right)$$

$$w = u^\sigma_{;\sigma} \frac{h}{2\beta}\left(-\sin\beta\zeta + \frac{2(-1)^n e \sin\alpha\zeta}{\cos\alpha}\right), \quad \beta \neq 0$$

$$(\bar{b}_\alpha{}^\beta = b_\alpha{}^\beta + H\delta_\alpha{}^\beta)$$

Основная особенность оболочек по сравнению с пластинами заключается в том, что поправочные члены в перемещениях имеют порядок h_* по сравнению с главным членом, а в пластинах — порядок h^2_{**}.

Продолжая итерационный процесс, можно найти следующие поправки к w и w_α. Здесь они не выписываются, поскольку вклады в осредненные лагранжианы первого приближения не дают.

3. Осредненные лагранжианы. Примем, что в формулах для перемещений величины u, ψ_σ, ψ, u_σ — произвольные функции ξ^α и t. Подставляя эти формулы в функционал (2.3) и удерживая слагаемые порядка h_*^{-2}, h_{**}^{-2} и 1 по сравнению с единицей, получим функционалы типа (2.5) со следующими осредненными лагранжианами:

(3.1) $$F_\perp:\ 2\overline{\Lambda} = (\lambda + 2\mu)\left(\left(\frac{2\alpha}{h}\right)^2 u^2 + k_1 a^{\lambda\sigma} u_{,\lambda} u_{,\sigma} + k_3 u^2\right) -$$

$$- \rho u^2_{,t} - \rho a^{\lambda\sigma} u_{,\lambda t} u_{,\sigma t}\left(\frac{h}{2\alpha}\right)^2 k_2 - \rho u^2_{,t}\left(\frac{h}{2\alpha}\right)^2 k_4, \quad \alpha \neq 0$$

$$k_1 = 2\left(1 - \frac{2e^2 \operatorname{tg}\beta}{\beta}\frac{5-3e^2}{1-e^2} + \frac{2e^2}{\cos^2\beta}\right)$$

$$k_2 = 1 - \frac{3-e^2}{1-e^2}\frac{4e^2\operatorname{tg}\beta}{\beta} + \frac{4e^2}{\cos^2\beta}$$

$$k_3 = -(3H^2 - K)\left(\frac{3}{2} + \frac{\alpha^2}{3} - 8e^2\right) - 4H^2(1 - 3e^2 + 4e^4)$$

$$k_4 = -(3H^2 - K)\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{3}\right) + 2H^2(1 - 6e^2 + 8e^4)$$

$$F_{\parallel}:\ 2\overline{\Lambda} = \mu\left(\left(\frac{2\beta}{h}\right)^2 a^{\sigma\lambda} + k_3^{\sigma\lambda}\right)\psi_\sigma\psi_\lambda + 2\mu\psi_{(\alpha;\,\beta)}\psi^{(\beta;\,\alpha)} +$$

$$+ (\lambda + 2\mu)k_1(\psi^\sigma_{;\sigma})^2 - \rho\left(a^{\sigma\lambda} + \left(\frac{h}{2\beta}\right)^2 k_4^{\sigma\lambda}\right)\psi_{\sigma,\,t}\psi_{\lambda,\,t} -$$

$$-\rho\left(\frac{h}{2\beta}\right)^2 k_2(\psi^\sigma_{;\,\sigma t})^2$$

$$k_1 = \frac{4e^4}{\sin^2\alpha}\left(1 + \frac{1-3e^2}{1-e^2}\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$$

$$k_2 = 1 + \frac{4e^2}{\sin^2\alpha}\left(1 - \frac{1+e^2}{1-e^2}\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$$

$$k_3^{\alpha\beta} = 6Hb^{\alpha\beta} - ((3H^2 - K)a^{\alpha\beta} - 2b^{\alpha\beta}H)\left(\frac{\beta^2}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

$$k_4^{\alpha\beta} = 2((3Hb^{\alpha\beta}) - Ka^{\alpha\beta}) - ((3H^2 - K)a^{\alpha\beta} - 2Hb^{\alpha\beta})\left(\frac{\beta^2}{3} + \frac{1}{2}\right)$$

$$L_\perp:\ 2\overline{\Lambda} = (\lambda + 2\mu)\left(\left(\frac{2\alpha}{h}\right)^2\psi^2 + k_1 a^{\lambda\sigma}\psi_{,\lambda}\psi_{,\sigma} + k_3\psi^2\right) - \rho\psi^2_{,t} -$$

$$-\rho a^{\lambda\sigma}\psi_{,\lambda t}\psi_{,\sigma t}\left(\frac{h}{2\alpha}\right)^2 k_2 - \rho\psi^2_{,t}\left(\frac{h}{2\alpha}\right)^2 k_4$$

$$k_1 = 2\left(1 + \frac{2e^2\operatorname{ctg}\beta}{\beta}\frac{5-3e^2}{1-e^2} + \frac{2e^2}{\sin^2\beta}\right)$$

$$k_2 = 1 + \frac{3-e^2}{1-e^2}\frac{4e^2\operatorname{ctg}\beta}{\beta} + \frac{4e^2}{\sin^2\beta}$$

$$L_{\parallel}:\ 2\overline{\Lambda} = \mu\left(\left(\frac{2\beta}{h}\right)^2 a^{\sigma\lambda} + k_3^{\sigma\lambda}\right)u_\sigma u_\lambda + 2\mu u_{(\alpha;\,\beta)}u^{(\beta;\,\alpha)} +$$

$$+ (\lambda + 2\mu)\, k_1(u^\sigma_{;\sigma})^2$$

$$-\rho\left(a^{\sigma\lambda} + \left(\frac{h}{2\beta}\right)^2 k_4^{\sigma\lambda}\right)u_{\sigma,\,t}u_{\lambda,\,t} - \rho\left(\frac{h}{2\beta}\right)^2 k_2(u^\sigma_{;\,\sigma t})^2$$

$$k_1 = \frac{4e^4}{\cos^2\alpha}\left(1 - \frac{1-3e^2}{1-e^2}\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$$

$$k_2 = 1 + \frac{4e^2}{\cos^2\alpha}\left(1 + \frac{1+e^2}{1-e^2}\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$$

Здесь не выписаны выражения коэффициентов k_3, k_4 в серии $L_\perp$ и тензоров $k_3{}^{\alpha\beta}$, $k_4{}^{\alpha\beta}$ в серии $L_\parallel$, поскольку они совпадают по форме с соответствующими выражениями в серии $F_\perp$ и $F_\parallel$. Считается, что α, β в сериях $F_\perp$ и $L_\parallel$ отличны от нуля. Ветви $F_\perp$ (0) и $L_\parallel$ (0) (α, $\beta \to 0$) отвечают классической теории и соответствующие лагранжианы не выписаны.

Коэффициенты с индексами 1 и 2 совпадают с также обозначенными коэффициентами для пластин [1] и при обращении в нуль коэффициентов с индексами 3 и 4 формулы переходят в сответствующие формулы для пластин.

Необходимость удерживать в осредненных лагранжианах не только «главные» члены (содержащие множитель h^{-2} и дифференцирование по t), но и члены следующего порядка малости связаны с тем, что сумма главных членов на «собственных» частотах ω оказывается малой.

4. Ортогональность по энергии. Оказывается, что, как и для пластин [1], различные ветви колебаний оболочек ортогональны по упругой и кинетической энергиям с погрешностью, не меньшей $h_*{}^2 + h_{**}^2 + h_* h_{**}$ по сравнению с единицей, т. е.

$$(4.1)\qquad \int_\Omega \langle \sigma_1{}^{ij} \varepsilon_{2ij} \varkappa \rangle \, d\Omega = 0, \quad \int_\Omega \langle \rho w_{1,t}^i w_{2i,\,t} \rangle \, d\Omega = 0$$

Исключением являются классические колебания — ветви $F_\perp(0)$ и $L_\parallel(0)$, которые не ортогональны между собой, но ортогональны со всеми другими ветвями.

Свойство (4.1) выполняется при условии жесткой заделки (2.5). Для доказательства (4.1) необходимо учитывать слагаемые в выражении для перемещений порядка $h_*{}^2$ и h_{**}^2.

Доказательство проводится непосредственной подстановкой в функционал выражений для перемещений; сначала устанавливается следующее утверждение: любые две ветви, независимо от краевых условий, удовлетворяют следующему условию ортогональности (с точностью до членов порядка $h_*{}^2 + h_{**}^2 + h_* h_{**}$ по сравнению с единицей)

$$(4.2)\qquad \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega \langle \varkappa (\sigma_{(1}^{ij} \varepsilon_{2)ij} - \rho w_{(1,\,t}^i w_{2)\,i,\,t} \rangle \, d\Omega \, dt = 0$$

Как и в (4.1), в (4.2) исключение представляют ветви $F_\perp(0)$ и $L_\parallel(0)$. Затем проверяется ортогональность по кинетической энергии (с использованием условий жесткой заделки). В силу громоздкости соответствующие выкладки не приводятся.

5. Уравнения вынужденных колебаний оболочки. Допустим теперь, что на лицевых поверхностях оболочки приложены внешние поверхностные силы $P_\pm{}^i$ (на $\xi = \pm h/2$). Решение задачи является экстремалью функционала (U, К определены формулами (2.3))

$$(5.1)\qquad I = \frac{h}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega \int_{-1}^{1} \Lambda \, d\zeta \, d\Omega \, dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega \{\varkappa P^i w_i\} \, d\Omega \, dt$$

$$\Lambda = \varkappa (U - \text{К}), \quad \{A\} \equiv A_{\xi = h/2} + A\,|_{\xi = -h/2}$$

Будем искать решение задачи в виде

$$(5.2)\qquad w \equiv w^i n_i = \sum_{n=1}^{\infty} w_{F_\perp(n)} + w_{F_\perp(n)} + w_{L_\perp(n)} + w_{L_\parallel(n)}) + w_0$$

$$w^\alpha \equiv w^i r_i{}^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} (w_{F_\perp(n)}^\alpha + w_{F_\parallel(n)}^\alpha + w_{L_\perp(n)}^\alpha + w_{L_\parallel(n)}^\alpha) + w_0{}^\alpha$$

Здесь перемещения собственных ветвей разложены до членов второго порядка по h ($h_*{}^2$, $h_{**}{}^2$ и $h_* h_{**}$), а функции u, ψ_α, ψ, u_α в этих разложениях — произвольные функции от ξ^α и t. Классические перемещения w_0 и $w_0{}^\alpha$ специально выделяем из серии $F_\perp$ и $L_\parallel$. Подразумевается, что характерный масштаб изменения внешней силы P_i гораздо больше толщины оболочки и $P_i = O(\mu h_{**}\varepsilon)$ (ε — амплитуда деформации оболочки).

Поставим формулы (5.2) в функционал (5.1) и удержим члены порядка h_*^{-2}, $h_*^{-1} h_{**}^{-1}$, h_{**}^{-2} и 1. Используя ортогональность различных ветвей, получим, что лагранжиан складывается из классического лагранжиана низкочастотных колебаний и следующих лагранжианов высокочастотных колебаний:

(5.3)
$$F_\perp\colon \Lambda^{(P)} = \frac{h}{2}\overline{\Lambda} - \{P\}(-1)^n u + \frac{hH}{2}[P](-1)^n u' + [P^\sigma]\frac{he(-1)^n \operatorname{tg}\beta}{\alpha}u_{,\sigma}$$
$$F_\parallel\colon \Lambda^{(P)} = \frac{h}{2}\overline{\Lambda} - [P^\alpha](-1)^n\psi_\alpha + \frac{hH}{2}\{P^\alpha\}(-1)^n\psi_\alpha + \{P\}\frac{he(-1)^n\operatorname{ctg}\alpha}{\beta}\psi^\sigma{}_{;\sigma}$$
$$L_\perp\colon \Lambda^{(P)} = \frac{h}{2}\overline{\Lambda} - [P](-1)^n\psi + \frac{hH}{2}\{P\}(-1)^n\psi - \{P^\sigma\}\frac{he(-1)^n\operatorname{ctg}\beta}{\alpha}\psi_{,\sigma}$$
$$L_\parallel\colon \Lambda^{(P)} = \frac{h}{2}\overline{\Lambda} - \{P^\alpha\}(-1)^n u_\alpha + \frac{hH}{2}[P^\alpha](-1)^n u_\alpha - [P]\frac{he(-1)^n\operatorname{tg}\alpha}{\beta}u^\sigma_{;\sigma}$$
$$P = P^i n_i,\quad P_\alpha = P_i r_\alpha{}^i,\quad [A] = A|_{\xi=h/2} - A|_{\xi=-h/2}$$

Здесь $\overline{\Lambda}$ определены формулами (3.1).

Варьируя действие, получим уравнения вынужденных высокочастотных колебаний

$$F_\perp\colon \frac{h}{2}(\lambda+2\mu)\left[\left(\left(\frac{2\alpha}{h}\right)^2 + k_3\right)u - k_1\Delta u\right] + \rho\frac{h}{2}\left[1 + \left(\frac{h}{2\alpha}\right)^2 k_4\right]u_{,tt} - \rho\frac{h}{2}\left(\frac{h}{2\alpha}\right)^2 k_2\Delta u_{,tt} =$$
$$= \{P\}(-1)^n - \frac{hH}{2}[P](-1)^n + [P^\alpha_{;\alpha}]\frac{he(-1)^n\operatorname{tg}\beta}{\alpha}$$
$$F_\parallel\colon \frac{\mu h}{2}\left[\left(\frac{2\beta}{h}\right)^2\delta_\alpha{}^\sigma + k^\sigma_{3\alpha}\right]\psi_\sigma + \frac{\rho h}{2}\left[\delta_\alpha{}^\sigma + \left(\frac{h}{2\beta}\right)^2 k^\sigma_{4\alpha}\right]\psi_{\sigma,tt} - \frac{h}{2}[(\lambda+2\mu)k_1 + \mu]\psi^\sigma_{;\sigma\alpha} - \frac{\mu h}{2}\Delta\psi_\alpha - \frac{\rho h}{2}\left(\frac{h}{2\beta}\right)^2 k_2\psi^\sigma_{;\sigma\alpha tt} =$$
$$= [P_\alpha](-1)^n - \frac{hH}{2}\{P_\alpha\}(-1)^n + \{P_{,\alpha}\}\frac{he(-1)^n\operatorname{tg}\alpha}{\beta}$$

Уравнения для ветвей $L_\perp$ и $L_\parallel$ совпадают с уравнениями для ветвей $F_\perp$ и $F_\parallel$ при замене соответственно $u \to \psi$, $\operatorname{tg}\beta \to (-\operatorname{ctg}\beta)$ и $\psi_\sigma \to u_\sigma$, $\operatorname{ctg}\alpha \to (-\operatorname{tg}\alpha)$.

Поступила 3 V 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бердичевский В. Л.* Высокочастотные длинноволновые колебания пластин. Докл. АН СССР, 1977, т. 236, № 6.
2. *Квашнина С. С.* Высокочастотные длинноволновые колебания упругих стержней. ПММ, 1979, т. 43, вып. 2.
3. *Бердичевский В. Л.* Вариационно-асимптотический метод построения теории оболочек. ПММ, 1979, т. 43, вып. 4.
4. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М., «Наука», 1976.
5. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1964.
6. *Бердичевский В. Л.* Вариационно-асимптотический метод. В сб.: Некоторые вопросы механики сплошной среды. М., Изд-во МГУ, 1978.