Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 4, 1980

УДК 539.3

ПОСТРОЕНИЕ УТОЧНЕННЫХ ПРИКЛАДНЫХ ТЕОРИЙ ДЛЯ ОБОЛОЧКИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Н. А. Базаренко

(Ростов-на-Дону)

В полуортогональной системе криволинейных координат, в которой одно семейство координатных поверхностей параллельно срединной поверхности оболочки, даются основные уравнения теории упругости.

Отыскивая решение задачи теории упругости для оболочки в рядах по степеням нормальной координаты и используя при этом символическую запись А. И. Лурье [1], удается свести трехмерную задачу к двумерной и выразить все характеристики напряженного и деформированного состояний оболочки через шесть функций — координат векторов перемещения и напряжения, заданных на срединной поверхности. Учет в полученных рядах первых двух членов дает прикладную теорию, свободную от гипотез и предназначенную для снятия внешней нагрузки с лицевой поверхности оболочки. Подобный подход к построению прикладных теорий впервые применялся в работах [2–4], выполненных при широком использовании средств тензорного анализа.

1. Полуортогональная система криволинейных координат. Введем обозначения: V — область пространства, заполненная материалом оболочки, $\mathbf{R}$ — радиус-вектор текущей точки (x, y, z) этой области, S — срединная поверхность оболочки, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha, \beta)$ — какая-нибудь ортогональная параметризация этой поверхности, $\mathbf{n}$ — орт нормали к поверхности S.

В принятых обозначениях уравнение

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{n}t \tag{1.1}$$

определяет в области V систему криволинейных координат α, β, t. В силу (1.1) элемент длины дуги ds задается квадратичной дифференциальной формой

$$ds^2 = d\mathbf{R}^2 = (d\mathbf{r} + td\mathbf{n} + \mathbf{n}dt)^2 \tag{1.2}$$

Рассмотрим три квадратичные формы, связанные с поверхностью S: $d\mathbf{r}^2$, $-d\mathbf{r}d\mathbf{n}$, $d\mathbf{n}^2$. Имеем

$$\begin{gathered} d\mathbf{r}^2 = Ed\alpha^2 + Gd\beta^2, \quad d\mathbf{n}^2 = -Hd\mathbf{r}d\mathbf{n} - k_1k_2d\mathbf{r}^2 \\ -d\mathbf{r}d\mathbf{n} = Ld\alpha^2 + 2Md\alpha d\beta + Nd\beta^2 \quad (H = k_1 + k_2) \end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь k_1 и k_2 — главные кривизны поверхности S; E, G, L, M, N — коэффициенты первой и второй квадратичных форм.

Теперь, подставляя (1.3) в правую часть (1.2) и учитывая, что

$$\begin{gathered} m^2 = k_\alpha k_\beta - k_1k_2, \quad H = k_\alpha + k_\beta \\ k_\alpha = L / E, \quad m = M / \sqrt{EG}, \quad k_\beta = N / G \end{gathered} \tag{1.4}$$

получим

$$ds^2 = g_{ik}\,dx^i dx^k \quad (\alpha \equiv x^1, \quad \beta \equiv x^2, \quad t \equiv x^3) \tag{1.5}$$

$$g_{11} = E\,[(1 - k_\alpha t)^2 + m^2t^2], \quad g_{22} = G\,[(1 - k_\beta t)^2 + m^2t^2]$$

$$g_{33} = 1, \quad g_{12} = m\sqrt{EG}\,(Ht^2 - 2t), \quad g_{13} = g_{23} = 0$$

$$g = \det \| g_{ik} \| = EG\,(1 - k_1t)^2(1 - k_2t)^2$$

Здесь величины k_α и m (k_β и $-m$) — соответственно нормальная кривизна и геодезическое кручение поверхности S в направлении координатной линии $\beta = \mathrm{const}$ ($\alpha = \mathrm{const}$)

Если координатная сеть (α, β) на S совпадает с линиями кривизны, то функция $g_{12} = 0$ и, следовательно, система координат α, β, t будет ортогональной. В этой связи отметим класс оболочек, срединная поверхность которых образована движением плоской линии l_1 (образующей) вдоль пространственной линии l_2 (направляющей).

Пусть $x = x\,(u)$, $y = y\,(u)$ и $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0\,(v)$ — естественная параметризация линий l_1 и l_2 соответственно; $\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}_0\,(v)$ и $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_0\,(v)$ — единичные векторы главной нормали и бинормали линии l_2, а $k = k\,(v)$ и $\tau = \tau\,(v)$ — ее кривизна и кручение. Тогда параметризация

$$\mathbf{r}\,(u, v) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{n}_0 m_1 + \mathbf{b}_0 m_2$$

$$m_1 = x\cos\psi + y\sin\psi, \quad m_2 = y\cos\psi - x\sin\psi$$

$$\psi = \int \tau\,(v)\,dv$$

задает на поверхности S координатную сеть (u, v), состоящую из линий кривизны, причем линии $v = \mathrm{const}$ геодезические. В системе координат u, v, t квадратичная форма (1.5) имеет вид

$$ds^2 = (1 - k_1t)^2\,du^2 + G\,(1 - k_2t)^2\,dv^2 + dt^2$$

$$G = (1 - km_1)^2, \quad k_1 = x'' / y', \quad k_2 = (m_2)_u{}'\,k / (1 - km_1)$$

2. Основные уравнения теории упругости в криволинейных координатах. Рассмотрим вторую основную задачу теории упругости, когда на поверхности S^*, ограничивающей оболочку, заданы значения вектора интенсивности внешних сил $\mathbf{q}$. Вектор перемещения $\mathbf{U}$ в области V удовлетворяет уравнению равновесия

$$(\varkappa - 1)\,\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{U} + \mathrm{grad\,div}\,\mathbf{U} = 0 \quad (\varkappa = 1 / (2 - 2\nu)) \tag{2.1}$$

при заданном краевом условии на S^*.

Рассмотрим, далее, ортонормированный локальный базис ($\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$), где $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ — орты касательных к координатным линиям x^2, x^3; а $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_3$ — орт нормали к координатной поверхности $x^1 = \mathrm{const}$. Единичные векторы $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{e}^1 = \mathbf{i}_1\sqrt{g_{22} / g}, \quad \mathbf{e}^2 = -\mathbf{i}_1 g_{12} / \sqrt{gg_{22}} + \mathbf{i}_2 / \sqrt{g_{22}}, \quad \mathbf{e}^3 = \mathbf{i}_3 \tag{2.2}$$

$$D^1\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_3 z_3 - \mathbf{i}_2 z_2, \quad D^2\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 z_1 + \mathbf{i}_3 z_0, \quad D^3\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 z_0$$

$$D^1\mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_1 z_2 + \mathbf{i}_3 z_0, \quad D^2\mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 z_4 - \mathbf{i}_1 z_1, \quad D^3\mathbf{i}_2 = -\mathbf{i}_1 z_0$$

$$D^1\mathbf{i}_3 = -\mathbf{i}_1 z_3 - \mathbf{i}_2 z_0, \quad D^2\mathbf{i}_3 = -\mathbf{i}_1 z_0 - \mathbf{i}_2 z_4, \quad D^3\mathbf{i}_3 = 0$$

$$\nabla \equiv \mathbf{e}^i\partial / \partial x^i \equiv \mathbf{i}_k D^k$$

$$D^1 = \sqrt{g_{22}/g}\,\partial/\partial\alpha - (g_{12}/\sqrt{gg_{22}})\,\partial/\partial\beta,\ D^2 = (\sqrt{g_{22}})^{-1}\ \partial/\partial\beta$$
$$D^3 = \partial/\partial t$$
$$z_0 = mG/g_{22},\quad z_1 = (\sqrt{g})^{-1}[(\sqrt{g_{22}})_\alpha' - (g_{12}/\sqrt{g_{22}})_\beta'],\quad z_4 =$$
$$= -(\ln\sqrt{g_{22}})_t'\ z_2 = (\sqrt{g_{22}})^{-1}(\ln\sqrt{g/g_{22}})_\beta',\ \ z_3 = g_1 + g_2 - z_4$$
$$g_i = k_i/(1 - k_i t)$$

Функции z_i подчиняются уравнениям Петерсона — Кодацци

$$D^2z_3 - D^1z_0 = 2z_0z_1 + z_2(z_4 - z_3),\quad (z_1)_t' = z_1z_4 + D^2z_0 \tag{2.3}$$
$$D^1z_4 - D^2z_0 = 2z_0z_2 + z_1(z_3 - z_4),\quad (z_4)_t' = z_4^2 - z_0^2$$
$$g_1g_2 = -z_1^2 - z_2^2 - D^1z_1 - D^2z_2,\quad (z_0)_t' = 2z_0z_4$$

Пусть $\mathbf{p}_k$ — вектор напряжения на площадке с нормалью $\mathbf{i}_k$. Тогда физические компоненты тензора напряжений σ_{sk}^* можно найти, воспользовавшись представлением вектора напряжения $\mathbf{p}_k$ непосредственно через вектор перемещения $\mathbf{U}$. Имеем

$$\mathbf{p}_k = \mu\left(2D^k\mathbf{U} + \mathbf{i}_k \times \operatorname{rot}\mathbf{U} + \frac{2\nu}{1-2\nu}\mathbf{i}_k \operatorname{div}\mathbf{U}\right) \tag{2.4}$$
$$\left(\mathbf{p}_k = \sum_{s=1}^{3}\sigma_{sk}^*\mathbf{i}_s,\quad \mathbf{U} = \sum_{s=1}^{3} u_s^*\mathbf{i}_s\right)$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона, μ — модуль сдвига. Теперь, учитывая соотношения (2.2), находим

$$D^1\mathbf{U} = \mathbf{i}_1(D^1u_1^* + u_2^*z_2 - u_3^*z_3) + \ldots \tag{2.5}$$
$$D^2\mathbf{U} = \mathbf{i}_1(D^2u_1^* - u_2^*z_1 - u_3^*z_0) + \mathbf{i}_2(D^2u_2^* + u_1^*z_1 -$$
$$-u_3^*z_4) + \ldots$$
$$D^3\mathbf{U} = \mathbf{i}_1[(u_1^*)_t' - u_2^*z_0] + \mathbf{i}_2[(u_2^*)_t' + u_1^*z_0] + \mathbf{i}_3(u_3^*)_t'$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{U} = \nabla\times\mathbf{U} = \sum_{k=1}^{3}\omega_k\mathbf{i}_k,\quad \omega_1 = D^2u_3^* - (u_2^*)_t' + u_2^*z_4$$
$$\omega_2 = (u_1^*)_t' - D^1u_3^* - 2u_2^*z_0 - u_1^*z_3,\quad \omega_3 = \theta(u_2^*, -u_1^*)$$
$$\operatorname{div}\mathbf{U} = \nabla\cdot\mathbf{U} = \theta(u_1^*, u_2^*) + (u_3^*)_t' - u_3^*(z_3 + z_4) \tag{2.6}$$
$$\theta(w_1, w_2) \equiv (D^1 + z_1)w_1 + (D^2 + z_2)w_2$$

Подставляя в (2.4) соответствующие величины из (2.5) и (2.6), при $\mathbf{i}_k = \mathbf{i}_3$ получим

$$\sigma_{31} = (u_1^*)_t' + u_1^*z_3 + D^1u_3^*,\quad \sigma_{32} = (u_2^*)_t' + u_2^*z_4 + \tag{2.7}$$
$$+ 2u_1^*z_0 + D^2u_3^*$$
$$\sigma_{33} = \frac{2-2\nu}{1-2\nu}(u_3^*)_t' + \frac{2\nu}{1-2\nu}[\theta(u_1^*, u_2^*) - u_3^*(z_3 + z_4)]$$

где $\sigma_{sk} = \sigma_{sk}^*/\mu$ — безразмерные напряжения. Уравнения (2.7) разрешим относительно производных $(u_k^*)_t'$. Имеем

$$(u_1^*)_t' = \sigma_{31} - u_1^*z_3 - D^1u_3^*,\quad (u_2^*)_t' = \sigma_{32} - u_2^*z_4 - \tag{2.8}$$
$$-2u_1^*z_0 - D^2u_3^*$$
$$(u_3^*)_t' = (1 - \varkappa)\sigma_{33} + (1 - 2\varkappa)[\theta(u_1^*, u_2^*) - u_3^*(z_3 + z_4)]$$

Заменяя в (2.6) производную $(u_3^*)_t'$ ее выражением из (2.8), находим

(2.9) $$\operatorname{div} \mathbf{U} = (1 - \varkappa)\,\theta^*, \quad \theta^* = \sigma_{33} + 2\,[\theta\,(u_1^*,\ u_2^*) - u_3^*\,(z_3 + z_4)]$$

Из (2.4) при $\mathbf{i}_k = \mathbf{i}_2,\ \mathbf{i}_1$ с учетом соотношений (2.5) и (2.9) получим

(2.10) $$\sigma_{21} = (D^1 - z_1)\,u_2^* + (D^2 - z_2)\,u_1^* - 2u_3^* z_0$$
$$\sigma_{22} = 2D^2 u_2^* + 2u_1^* z_1 - 2u_3^* z_4 + (2\varkappa - 1)\,\theta^*$$
$$\sigma_{11} = 2D^1 u_1^* + 2u_2^* z_2 - 2u_3^* z_3 + (2\varkappa - 1)\,\theta^*$$

Чтобы вычислить rotrot $\mathbf{U}$, заменим в формулах (2.5) координаты u_k^* соответствующими координатами ω_k. Имеем

(2.11) $$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{U} = \sum_{k=1}^{3} W_k \mathbf{i}_k, \quad W_1 = D^2\omega_3 - (\omega_2)_t' + \omega_2 z_4$$
$$W_2 = (\omega_1)_t' - D^1\omega_3 - 2\omega_2 z_0 - \omega_1 z_3, \quad W_3 = \theta\,(\omega_2,\ -\omega_1)$$

Подставляя (2.11) в (2.1), приходим к следующим уравнениям равновесия в перемещениях:

(2.12) $$(\varkappa - 1)\,W_k + D^k \operatorname{div}\mathbf{U} = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ 3)$$

Наконец, заменяя в (2.12) производные $(u_k^*)_t'$ соответствующими выражениями из (2.8) и учитывая соотношения (2.3), получим

(2.13) $$(\sigma_{31})_t' = (z_4 + 2z_3)\,\sigma_{31} + 2\sigma_{32} z_0 - 2g_1 g_2 u_1^* + D^2\theta\,(u_2^*,\ -u_1^*) + D^1\,(\sigma_{33} - 2\varkappa\theta^*) + 2\,(z_0 D^2 - z_4 D^1)\,u_3^*$$
$$(\sigma_{32})_t' = (z_3 + 2z_4)\,\sigma_{32} - 2g_1 g_2 u_2^* - D^1\theta\,(u_2^*,\ -u_1^*) + D^2\,(\sigma_{33} - 2\varkappa\theta^*) + 2\,(z_0 D^1 - z_3 D^2)\,u_3^*$$
$$(\sigma_{33})_t' = 2\,(z_3 + z_4)(\sigma_{33} - \varkappa\theta^*) - \theta\,(\sigma_{31},\ \sigma_{32}) - 4g_1 g_2 u_3^* + 2\,(z_4 D^1 - z_0 D^2 + z_0 z_2 + z_1 z_3)\,u_1^* + 2\,(z_3 D^2 - z_0 D^1 + z_0 z_1 + z_2 z_4)\,u_2^*$$

В дальнейшем вместо системы (2.12) из трех дифференциальных уравнений второго порядка рассматривается система шести уравнений первого порядка относительно неизвестных u_k^* и σ_{3k}, состоящая из уравнений (2.8) и (2.13).

3. **Построение прикладных теорий.** Перемещения u_k^* и безразмерные напряжения σ_{sk} — аналитические функции координат точек области V и, следовательно, могут быть разложены в степенные ряды по координате

(3.1) $$u_k^* = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!}\left(\frac{\partial^s u_k^*}{\partial t^s}\right)\Bigg|_{t=0}, \quad \sigma_{ik} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!}\left(\frac{\partial^s \sigma_{ik}}{\partial t^s}\right)\Bigg|_{t=0}$$

Тогда, дифференцируя по t левые и правые части уравнений (2.8), (2.10), (2.13) и вычисляя возникающие при этом соотношения при $t = 0$, получим бесконечную систему рекуррентных уравнений относительно неизвестных коэффициентов в рядах (3.1). Используя в процессе решения упомянутой выше системы символическую запись, искомые коэффициенты удается представить как результат применения некоторых операторов

$A^j_{k,s}, \ldots, B^j_{ik,s}$ к перемещениям $u_j = u_j^*(\alpha, \beta, 0)$ и к напряжениям $\sigma_j = \sigma_{j3}(\alpha, \beta, 0)$, заданным на срединной поверхности.

В итоге приходим к разложениям вида

$$u_k^* = u_k + \sum_{s=1}^{\infty} t^s (A^j_{k,s} u_j + B^j_{k,s}\sigma_j), \quad \sigma_{pq} = \sum_{s=0}^{\infty} t^s (A^j_{pq,s} u_j + B^j_{pq,s}\sigma_j) \tag{3.2}$$

$$\sigma_{3k} = \sigma_k + \sum_{s=1}^{\infty} t^s (A^j_{3k,s} u_j + B^j_{3k,s}\sigma_j) \quad (p, q = 1, 2) \tag{3.3}$$

Выписывая в явном виде первые члены в рядах (3.2) и (3.3), получим

$$\begin{aligned}
& u_1^* = u_1 + t(\sigma_1 - \partial_1 u_3 - k_\alpha u_1) + \ldots \\
& u_2^* = u_2 + t(\sigma_2 - \partial_2 u_3 - 2mu_1 - k_\beta u_2) + \ldots \\
& u_3^* = u_3 + t\{-f_4\sigma_3 - c_4[(\partial_1 + a)u_1 + (\partial_2 + b)u_2 - Hu_3]\} + \ldots
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_{11} = (4\varkappa\partial_1 + 2c_4 a)u_1 + (2c_4\partial_2 + 4\varkappa b)u_2 + (2k_\beta - 4\varkappa H)u_3 + \\
& + c_4\sigma_3 + t\{2[m(c_4 b - c_0\partial_2) + 2\varkappa a(k_\alpha - k_\beta) - 2\varkappa AH_\alpha' + \\
& + Bm_\beta']u_1 + (c_8\partial_1 + c_4 a)\sigma_1 + 2[c_4(k_\alpha - k_\beta)\partial_2 + \\
& + c_4 m(a - \partial_1) + B(k_\beta - 2\varkappa H)_\beta']u_2 + 2[k_\alpha(k_\beta - 2\varkappa H) - 3m^2 - \\
& - \partial_1^2 - b\partial_2 - c_4\Delta]u_3 + (c_4\partial_2 + c_8 b)\sigma_2 + c_2 k_\alpha\sigma_3\} + \ldots
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_{22} = (2c_4\partial_1 + 4\varkappa a)u_1 + (4\varkappa\partial_2 + 2c_4 b)u_2 + (2k_\alpha - 4\varkappa H)u_3 + \\
& + c_4\sigma_3 + t\{2[c_8 m(b - \partial_2) + c_4(k_\beta - k_\alpha)\partial_1 + A(k_\alpha - \\
& - 2\varkappa H)_\alpha']u_1 + (c_4\partial_1 + c_8 a)\sigma_1 + 2[c_4(k_\beta - k_\alpha)b + c_4 m(a - \\
& - \partial_1) + B(k_\alpha - 2\varkappa H)_\beta']u_2 + (c_8\partial_2 + c_4 b)\sigma_2 + 2[m^2 + \\
& + k_\beta(k_\alpha - 2\varkappa H) - c_4\Delta - a\partial_1 - \partial_2^2]u_3 + c_2 k_\beta\sigma_3\} + \ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_{12} = (\partial_2 - b)u_1 + (\partial_1 - a)u_2 - 2mu_3 + t\{[(k_\beta - k_\alpha)\partial_2 + \\
& + 2m(c_2\partial_1 + c_8 a) - Am_\alpha' - B(k_\alpha)_\beta']u_1 + [(k_\alpha - k_\beta)\partial_1 + \\
& + m(4\varkappa\partial_2 + 2c_4 b) - Bm_\beta' - A(k_\beta)_\alpha']u_2 + 2[a\partial_2 - \partial_2\partial_1 - \\
& - m(2\varkappa H + k_\beta - k_\alpha)]u_3 + (\partial_2 - b)\sigma_1 + (\partial_1 - a)\sigma_2 + \\
& + c_2 m\sigma_3\} + \ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_{31} = \sigma_1 + t\{(H + k_\alpha)\sigma_1 + 2m\sigma_2 - c_4\partial_1\sigma_3 - [\partial_2(\partial_2 + b) + \\
& + 4\varkappa\partial_1(\partial_1 + a) + 2k_1k_2]u_1 + [\partial_2(\partial_1 + a) - 4\varkappa\partial_1(\partial_2 + b)]u_2 + \\
& + [(4\varkappa H - 2k_\beta)\partial_1 + 2m\partial_2 + 4\varkappa AH_\alpha']u_3\} + t^2\{[f_8 a\partial_2 - \\
& - c_8 b\partial_1 - \varkappa\partial_2\partial_1 + \Omega_0]\sigma_2 - [f_7(\partial_1^2 + a\partial_1) + {}^1/_2(\partial_2^2 + b\partial_2) + \\
& + \Omega_0]\sigma_1 - [(c_{31}k_\alpha + f_5 k_\beta)d_1 + c_{40}m\partial_2 + \Omega_0]\sigma_3 - [2\varkappa(H + \\
& + 2k_\alpha)\partial_1^2 + (k_\beta + {}^1/_2 H)\partial_2^2 + 8\varkappa m\partial_2\partial_1 + \Omega_1]u_1 + [c_2 m\partial_1^2 - \\
& - (c_{71}k_\alpha + {}^1/_2 k_\beta)\partial_2\partial_1 - c_{92}m\partial_2^2 + \Omega_1]u_2 + [2\varkappa\partial_1\Delta + \Omega_1]u_3\} + \\
& + t^3\{[d_5\partial_1\Delta + \Omega_1]\sigma_3 - [m\partial_1^2 + (2\varkappa k_\alpha + \partial_8 k_\beta)\partial_2\partial_1 + \\
& + m(1 + d_{64})\partial_2^2 + \Omega_1]\sigma_2 - [(c_9 k_\alpha + d_8 k_\beta)\partial_1^2 + m(2 + \\
& + d_{64})\partial_2\partial_1 + (k_\beta + {}^1/_2 k_\alpha)\partial_2^2 + \Omega_1]\sigma_1 + [{}^4/_3\varkappa\partial_1\Delta(\partial_1 + a) + \\
& + {}^1/_6\partial_2\Delta(\partial_2 + b) + \Omega_2]u_1 + [{}^4/_3\varkappa\partial_1\Delta(\partial_2 + b) - {}^1/_6\partial_2\Delta(\partial_1 + \\
& + a) + \Omega_2]u_2 + [(d_{76}k_\alpha + {}^1/_3 k_\beta)\partial_1^3 + 2m(d_{67}\partial_2\partial_1^2 + d_{63}\partial_2^3) + \\
& + (d_{72}k_\alpha + k_\beta)\partial_2^2\partial_1 + \Omega_2]u_3\} + \ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_{32} = \sigma_2 + t\{(H + k_\beta)\sigma_2 - c_4\partial_2\sigma_3 + [\partial_1(\partial_2 + b) - \\
& - 4\varkappa\partial_2(\partial_1 + a)]u_1 - [\partial_1(\partial_1 + a) + 4\varkappa\partial_2(\partial_2 + b) + 2k_1k_2]u_2 + \\
& + [(4\varkappa H - 2k_\alpha)\partial_2 + 2m\partial_1 + 4\varkappa BH_\beta']u_3\} + t^2\{[b\partial_1 - \\
& - f_8 a\partial_2 - \varkappa\partial_2\partial_1 + \Omega_0]\sigma_1 - [{}^1/_2(\partial_1^2 + a\partial_1) + f_7(\partial_2^2 + b\partial_2) +
\end{aligned}$$

$$+ \Omega_0] \sigma_2 - [f_4 m\partial_1 + (f_5 k_\alpha + c_{31}k_\beta)\partial_2 + \Omega_0]\sigma_3 + [m(2\varkappa\partial_2^2 -$$
$$-c_2\partial_1^2) - ({}^1/_2 k_\alpha + c_{71}k_\beta)\partial_2\partial_1 + \Omega_1] u_1 - [(k_\alpha + {}^1/_2 H)\partial_1^2 +$$
$$+ 2m\partial_2\partial_1 + 2\varkappa(H + 2k_\beta)\partial_2^2 + \Omega_1] u_2 + [2\varkappa\partial_2\Delta + \Omega_1] u_3\} +$$
$$+ t^3\{[d_5\partial_2\Delta + \Omega_1]\sigma_3 - [(k_\alpha + {}^1/_2 k_\beta)\partial_1^2 + m(2+d_4)\partial_2\partial_1 +$$
$$+ (d_8k_\alpha + c_9k_\beta)\partial_2^2 + \Omega_1)]\sigma_2 - [d_{04}m\partial_1^2 + (2\varkappa k_\beta + d_8k_\alpha)\partial_2\partial_1 +$$
$$+\Omega_1]\sigma_1 + [{}^4/_3\varkappa\partial_2\Delta(\partial_1 + a) - {}^1/_6\partial_1\Delta(\partial_2+b) + \Omega_2] u_1 +$$
$$+ [{}^1/_6\partial_1\Delta(\partial_1 + a) + {}^4/_3\varkappa\partial_2\Delta(\partial_2+b) + \Omega_2]u_2 + [m(d_0\partial_1^3 +$$
$$+ d_8\partial_2^2\partial_1) + (k_\alpha + d_{72}k_\beta)\partial_2\partial_1^2 + ({}^1/_3 k_\alpha + d_{76}k_\beta)\partial_2^3 + \Omega_2]u_3\} +$$
$$+ \ldots$$

$$\sigma_{33} = \sigma_3 + t\{[2k_\beta - 4\varkappa H)\partial_1 + 2m(b-\partial_2) + a(2k_\alpha -$$
$$-4\varkappa H)]u_1 + [(2k_\alpha - 4\varkappa H)\partial_2 + 2m(a-\partial_1) + b(2k_\beta -$$
$$-4\varkappa H)]u_2 + (4\varkappa H^2 - 4k_1k_2)u_3 - (\partial_1 + a)\sigma_1 - (\partial_2 +$$
$$+b)\sigma_2 - c_2H\sigma_3\} + t^2\{[f_5\Delta + \Omega_0]\sigma_3 - [2m\partial_1 + (2k_\beta +$$
$$+ f_7H)\partial_2 + \Omega_0]\sigma_2 - [(2k_\alpha + f_7H)\partial_1 + 2m\partial_2 + \Omega_0]\sigma_1 +$$
$$+ [2\varkappa\Delta(\partial_1 + a) + \Omega_1]u_1 + [2\varkappa\Delta(\partial_2+b) + \Omega_1]u_2 -$$
$$- [4\varkappa(AH_\alpha'\partial_1 + BH_\beta'\partial_2) + \Omega_0]u_3\} + t^3\{[d_{07}\Delta(\partial_1+a) +$$
$$+\Omega_1]\sigma_1 + [d_{07}\Delta(\partial_2+b) + \Omega_1]\sigma_2 + [c_4(k_\alpha + {}^1/_2H)\partial_1^2 +$$
$$+ c_{32}m\partial_2\partial_1 + c_4(k_\beta + {}^1/_2H)\partial_2^2 + \Omega_1]\sigma_3 - [{}^2/_3\varkappa\Delta\Delta + \Omega_2]u_3 +$$
$$+[-md_0\partial_1^3 + 2(c_{25}k_\alpha + d_8k_\beta)\partial_2\partial_1^2 + m(6\varkappa + d_{34})\partial_2^2\partial_1 +$$
$$+(d_{54}H + d_{98}k_\beta)\partial_2^3 + \Omega_2]u_2 + [(d_{54}H + d_{98}k_\alpha)\partial_1^3 +$$
$$+m(6\varkappa + d_{34})\partial_2\partial_1^2 + 2(d_8k_\alpha + C_{25}k_\beta)\partial_2^2\partial_1 - md_0\partial_2^3 +$$
$$+\Omega_2]u_1\} + \ldots$$

$$(\Delta = \partial_1^2 + a\partial_1 + \partial_2^2 + b\partial_2, \quad (D^1)|_{t=0} = A\partial / \partial\alpha \equiv \partial_1$$
$$(D^2)|_{t=0} = B\partial / \partial\beta \equiv \partial_2)$$

Здесь Ω_k — операторы более низкого порядка, чем выписанные (k — порядок оператора Ω_k), a и $-b$ — геодезические кривизны координатных линий на срединной поверхности, а также используется система обозначений

$$1 / \sqrt{E} = A, \quad 1 / \sqrt{G} = B, \quad (z_1)|_{t=0} = -A(\ln B)_\alpha' = a$$
$$(z_2)|_{t=0} = -B(\ln A)_\beta' = b$$
$$C_{rs} = (1 + r)\varkappa - 3 + s / 2, \quad d_{rs} = c_{rs} / 3, \quad c_{1s} \equiv c_s, \quad d_{1s} \equiv$$
$$\equiv d_s, \quad c_{0s} \equiv f_s$$

Наряду с (2.3) отметим и другие соотношения, облегчающие получение разложений (3.4), (3.5). Имеем

$$(D^1)_t' = z_3D^1 + 2z_0D^2, \quad (D^2)_t' = z_4D^2, \quad (z_2)_t' = z_2z_4 - D^2z_3$$
$$(z_0)|_{t=0} = m, \quad (z_3)|_{t=0} = k_\alpha, \quad (z_4)|_{t=0} = k_\beta, \quad (D^1 + z_1)D^2 \equiv$$
$$\equiv (D^2 + z_2)D^1$$

Далее, введем в рассмотрение удельные усилия T_p, S_{qp}, N_p и моменты G_p, H_{qp}, возникающие на координатных сечениях оболочки $x^p = \mathrm{const}$ ($p \neq q = 1,2$). Имеем

$$T_p\mathbf{i}_{p0} + S_{qp}\mathbf{i}_{q0} - N_p\mathbf{i}_3 = \Big(\int_{-h}^{h} \sigma_{(p)}\sqrt{g_{qq}}\,dt\Big)(\sqrt{g_{qq}})^{-1}|_{t=0}, \quad \mathbf{i}_{p0} = (\mathbf{i}_p)|_{t=0} \tag{3.6}$$

$$(-1)^q (H_{qp}\mathbf{i}_{p0} + G_p\mathbf{i}_{q0}) = \left(\int_{-h}^{h} (\sigma_{(p)} \times \mathbf{i}_3)\, t\sqrt{g_{qq}}\, dt\right)\left(\sqrt{g_{qq}}\right)^{-1}\Big|_{t=0}$$

$$\sigma_{(1)} = \mathbf{p}_1$$

$$\sigma_{(2)} = \left(\sqrt{g}\,\mathbf{p}_2 - g_{12}\mathbf{p}_1\right)/\sqrt{g_{11}g_{22}}$$

$$\mathbf{i}_p = (1 - k_\beta t)\,\mathbf{i}_{p0} + (-1)^q mt\mathbf{i}_{q0}]\sqrt{G/g_{22}} \qquad (p \neq q = 1, 2)$$

Здесь $\sigma_{(p)}$ — вектор напряжения на поверхности $x^p = \text{const}$.

Из (3.6) с учетом соотношений (1.5) и (2.4) получим равенства

(3.7)
$$N_p = -\mu\int_{-h}^{h} \{\sigma_{p3} + t(\delta_p m\sigma_{q3} - k_{qq}\sigma_{p3}) +$$
$$+ t^2[{}^1/{}_2\delta_p m(k_{pp} - k_{qq})\sigma_{q3} + m^2\sigma_{p3}({}^1/{}_2 - \delta_p)] + \ldots\}\, dt$$

$$T_p = \mu\int_{-h}^{h} L_p\, dt, \quad S_{qp} = \mu\int_{-h}^{h} M_{qp}\, dt, \quad H_{qp} = \mu\int_{-h}^{h} M_{qp} t\, dt$$

$$G_p = -\mu\int_{-h}^{h} L_p t\, dt$$

$$M_{qp} = \sigma_{qp} + t\,[\delta_p m\sigma_{qq} + (-1)^q m\sigma_{pp} - k_{qq}\sigma_{qp}] + \ldots$$
$$(k_{11} = k_\alpha, \ k_{22} = k_\beta)$$
$$L_p = \sigma_{pp} + t\,[(2\delta_p - 1)\,m\sigma_{qp} - k_{qq}\,\sigma_{pp}] + \ldots$$
$$(1 + (-1)^p = \delta_p)$$

Теперь, заменяя в (3.7) напряжения σ_{pk} соответствующими выражениями из (3.4), (3.5), после интегрирования получим следующие разложения по степеням h^2:

(3.8)
$$N_p = 2\mu h\,[-\sigma_p - {}^1/{}_3h^2(C^j_{p,2}u_j + D^j_{p,2}\sigma_j) + \ldots]$$
$$S_{qp} = 2\mu h\,(\omega + h^2S_{qp,2} + \ldots)$$
$$T_p = 4\mu h\,(c_6\varepsilon_p + C_4\varepsilon_q + f_5\sigma_3 + h^2T_{p,2} + \ldots)$$
$$H_{qp} = {}^4/{}_3\mu h^3\,[\tau + {}^1/{}_2k_{pp}\,\omega + 2m\,(c_6\varepsilon_q + c_5\varepsilon_p) + {}^1/{}_2\,(\partial_2 - b)\times$$
$$\times\,\sigma_1 + {}^1/{}_2\,(\partial_1 - a)\,\sigma_2 + mc_3\sigma_3 + h^2H_{qp,2} + \ldots]$$
$$G_p = -{}^4/{}_3\mu h^3\,[c_6\varkappa_p + c_4\varkappa_q + (k_{pp} - k_{qq})(c_6\varepsilon_p + c_4\varepsilon_q) +$$
$$+ m\omega + (f_7\partial_p + f_5k_p^*)\,\sigma_p + (f_5\partial_q + f_7k_q^*)\,\sigma_q + (f_4k_{pp} -$$
$$- f_5k_{qq})\,\sigma_3 + h^2G_{p,2} + \ldots] \qquad (k_1^* = a, \ k_2^* = b)$$

(3.9)
$$\varepsilon_p = \partial_p u_p + k_q^* u_q - k_{pp}u_3, \quad \omega = (\partial_2 - b)\,u_1 + (\partial_1 - a)\,u_2 -$$
$$-2mu_3$$
$$\tau = k_\beta\,(a - \partial_1)\,u_2 + k_\alpha\,(b - \partial_2)\,u_1 - m\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - u_1\partial_1 m -$$
$$-u_2\partial_2 m + (b\partial_1 - \partial_1\partial_2)\,u_3$$
$$\varkappa_p = {}^1/{}_2m\,[(k_q^* + \partial q)\,u_p - (k_p^* + \partial_p)\,u_q] - k_q^*\,(\partial_q u_3 +$$
$$+ k_{qq}u_q + mu_p) - \partial_p\,(\partial_p u_3 + k_{pp}u_p + mu_q)$$
$$C^j_{p,2} = A^j_{3p,2} - k_{qq}A^j_{3p,1} + \delta_p mA^j_{3q,1}$$

Здесь величины ε_1, ω, ε_2 и $\varkappa_1$, τ, $\varkappa_2$ — компоненты соответственно тангенциальной и изгибной деформации срединной поверхности.

Разложения (3.2), (3.3) и (3.8) целесообразно использовать для построения серии прикладных теорий различной точности и назначения. Обозначим через Γ_1 и Γ_2 части поверхности S^*, задаваемые соответственно уравнениями $t = \pm h$ и $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, где h — полутолщина оболочки. Теории, которые оставляют границу Γ_1 свободной от напряжений и позволяют удовлетворить условиям на границе Γ_2, здесь не рассматриваются (см., например, работу [5]). Ниже излагается методика построения теорий, с помощью которых можно, не заботясь о краевых условиях на границе Γ_2, удовлетворить условиям на границе Γ_1.

Пусть вектор $\mathbf{q}$, заданный на поверхности Γ_1, имеет вид

$$\mathbf{q}^+ = \sum_{k=1}^{3} q_k^+ \mathbf{i}_k \quad \text{при } t = +h, \quad \mathbf{q}^- = \sum_{k=1}^{3} q_k^- \mathbf{i}_k \quad \text{при } t = -h$$

В силу (3.3) краевые условия на Γ_1 запишем так:

$$q_k^+ / \mu = \sigma_k + \sum_{s=1}^{\infty} h^s (A_{3k,\, s}^j u_j + B_{3k,\, s}^j \sigma_j)$$

$$-q_k^- / \mu = \sigma_k + \sum_{s=1}^{\infty} (-h)^s (A_{3k,\, s}^j u_j + B_{3k,\, s}^j \sigma_j)$$

Отсюда получим эквивалентную систему

$$Q_k = (q_k^+ - q_k^-) / 2\mu = \sigma_k + h^2 (A_{3k,\, 2}^j u_j + B_{3k,\, 2}^j \sigma_j) + \ldots \tag{3.10}$$

$$P_k = (q_k^+ + q_k^-) / 2\mu = h (A_{3k,\, 1}^j u_j + B_{3k,\, 1}^j \sigma_j) + $$
$$+ h^3 (A_{3k,\, 3}^j u_j + B_{3k,\, 3}^j \sigma_j) + \ldots$$

При малых значениях h неизвестные u_j и σ_j будем разыскивать в виде асимптотических разложений

$$u_j = \sum_{s=0} h^{s-1} u_j^{(s)}, \quad \sigma_j = \sum_{s=0} h^s \sigma_j^{(s)} \tag{3.11}$$

Подставляя разложения (3.11) в уравнения (3.10) и приравнивая выражения при h^s $(s = 0, 1, 2, \ldots)$, получим систему рекуррентных уравнений относительно функций $u_j^{(s)}$ и $\sigma_j^{(s)}$. Соотношения, возникающие при $s = 0$ и 1, описывают прикладную теорию, имеющую погрешность порядка h^2 по сравнению с единицей. Имеем

$$A_{3k,\, 1}^j u_j^{(0)} = P_k, \quad A_{3k,\, 1}^j u_j^{(1)} = -B_{3k,\, 1}^j Q_j \tag{3.12}$$

$$\sigma_k^{(0)} = Q_k, \quad \sigma_k^{(1)} = -A_{3k,\, 2}^j u_j^{(0)} \quad (k = 1, 2, 3)$$

Уравнения (3.12) можно записать и в другой форме, если учесть соотношения

$$A_{3p,1}^j u_j = 2k_p^* (\varepsilon_q - \varepsilon_p) - 2\partial_p (c_6 \varepsilon_p + c_4 \varepsilon_q) - (\partial_q + 2k_q^*)\, \omega$$

$$A_{33,1}^j u_j = 2 (k_\alpha \varepsilon_2 + k_\beta \varepsilon_1) - 2c_6 H (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - 2m\omega \quad (p \neq q = 1, 2)$$

Теперь, подставив (3.11) в разложения (3.8) и учтя (3.12), получим

$$T_p = 4\mu\, [c_6 \varepsilon_p^{(0)} + c_4 \varepsilon_q^{(0)} + h\, (c_6 \varepsilon_p^{(1)} + c_4 \varepsilon_q^{(1)} + f_5 Q_3) + \ldots] \tag{3.13}$$

$$S_{qp} = 2\mu\, (\omega^{(0)} + h\omega^{(1)} + \ldots)$$

$$N_p = 2\mu h\, [-Q_p - h\, ({}^2/_3 \sigma_p^{(1)} - {}^1/_3 k_{qq} P_p + {}^1/_3 \delta_p m P_q) + \ldots]$$

$$H_{qp} = {}^4/_3\mu h^2 \{\tau^{(1)} + {}^1/_2 k_{pp}\omega^{(0)} + 2m\,(c_6\varepsilon_q{}^{(0)} + c_5\varepsilon_p{}^{(0)}) +$$
$$+ h\,[\tau^{(1)} + {}^1/_2 k_{pp}\omega^{(1)} + 2m\,(c_6\varepsilon_q{}^{(1)} + c_5\varepsilon_p{}^{(1)}) + {}^1/_2\,(\partial_2 - b)\,Q_1 +$$
$$+ {}^1/_2\,(\partial_1 - a)\,Q_2 + mc_3Q_3] + \ldots\}$$
$$G_p = -{}^4/_3\mu h^2 \{c_6\varkappa_p{}^{(0)} + c_4\varkappa_q{}^{(0)} + (k_{pp} - k_{qq})(c_6\varepsilon_p{}^{(0)} + c_4\varepsilon_q{}^{(0)}) +$$
$$+ m\omega^{(0)} + h\,[c_6\varkappa_p{}^{(1)} + c_4\varkappa_q{}^{(1)} + m\omega^{(1)} + (k_{pp} - k_{qq})\,(c_6\varepsilon_p{}^{(1)} +$$
$$+ c_4\varepsilon^1{}_q) + (f_7\partial_p + f_5k_p{}^*)\,Q_p + (f_5\partial_q + f_7k_q{}^*)\,Q_q + (f_1k_{pp} -$$
$$-f_5k_{qq})\,Q_3] + \ldots\}$$

где величины $\varepsilon_p{}^{(s)}, \ldots, \varkappa_p{}^{(s)}$ определяются по формулам (3.9) через функции $u_j{}^{(s)}$. Кроме того, имеют место разложения

(3.14)
$$u_p{}^0 = h^{-1}u_p{}^{(0)} + u_p{}^{(1)} - \zeta\,(\partial_p u_3{}^{(1)} + k_{pp}u_p{}^{(0)} + mu_q{}^{(0)}) + \ldots$$
$$u_3{}^0 = h^{-1}u_3{}^{(0)} + u_3{}^{(1)} - \zeta c_4\,(\varepsilon_1{}^{(0)} + \varepsilon_2{}^{(0)}) + \ldots$$
$$(\zeta = t\,/\,h, \quad \mathbf{U} = u_1{}^0\mathbf{i}_{10} + u_2{}^0\mathbf{i}_{20} + u_3{}^0\mathbf{i}_3)$$

Соотношения (3.9), (3.12) и асимптотические разложения (3.13), (3.14), имеющие погрешность порядка h^2 по сравнению с единицей, образуют полную уточненную систему «двумерных» уравнений теории оболочек.

Построенная прикладная теория позволяет получить некоторое суждение о точности применяющихся теорий тонких оболочек.

В частности, исследуем, как согласуются уравнения (3.12)—(3.14) с уравнениями итерационной теории оболочек А. Л. Гольденвейзера, которые в принятых здесь обозначениях можно записать так:

(3.15)
$$(2\mu)^{+1}\,(k_{qq}N_p + mN_q) - hA^j_{3p,1}u_j = -P_p + h\,(HQ_p - c_4\partial_pQ_3) + \ldots$$
$$(2\mu)^{-1}\,[(\partial_1 + a)\,N_1 + (\partial_2 + b)\,N_2] + hA^j_{33,1}\,u_j = P_3 + hc_2HQ_3 + \ldots$$
$$(2\mu)^{-1}N_p + h^3F_p{}^ju_j = -hQ_p + h^2\,(HP_p - d_4\partial_pP_3) + \ldots \qquad (p \neq q = 1, 2)$$

где $F_p{}^j$ — известные операторы. К соотношениям (3.15) можно придти, если в уравнениях равновесия усилия T_p, S_{qp} и моменты G_p, H_{qp}, определяемые в монографии [6] для случая триортогональной системы координат равенствами

(3.16)
$$T_p = 4\mu h\,(c_6\varepsilon_p + c_4\varepsilon_q + f_5Q_3), \quad S_{qp} = 2\mu h\omega, \quad H_{qp} = {}^4/_3\mu h^3\,(\tau + {}^1/_2 k_p\omega)$$
$$G_p = -{}^4/_3\mu h^3\,[c_6\varkappa_p + c_4\varkappa_q + c_6\,(k_p - k_q)\,\varepsilon_p + c_4\,(c_6H - k_q)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) +$$
$$+ h^{-1}f_5P_3]$$
$$(p \neq q = 1,\,2,\; k_{pp} = k_p,\; m = 0)$$

выразить через перемещения срединной поверхности u_j, а члены с перерезывающими условиями N_p сохранить.

Разыскивая неизвестные u_j и N_p в виде разложений

(3.17)
$$u_j = \sum_{s=0} h^{s-1}v_j^{(s)}, \qquad N_p = \sum_{s=0} h^{s+1}N_p^{(s)}$$

и затем подставляя (3.17) в (3.15), получим систему уравнений, из которой при малых h вытекают соотношения

(3.18)
$$A^j_{3k,1}v_j^{(0)} = P_k, \; A^j_{3k,1}v_j^{(1)} = -B^j_{3k,1}Q_j \quad (k = 1, 2, 3)$$
$$N_p = 2\mu h\,[-Q_p - h\,(F_p{}^jv_j^{(0)} - HP_p + d_4\partial_pP_3) + \ldots]$$

Если функции $u_j{}^{(s)}$ и $v_j{}^{(s)}$ подчинить одинаковым краевым условиям, то, сравнивая (3.12), (3.13) с (3.18), можно установить, что $u_j{}^{(s)} = v_j{}^{(s)}$ $(s = 0,\ 1)$, в то время как у перерезывающих усилий N_p совпадают лишь главные члены соответствующих асимптотических разложений.

Далее, подставляя (3.17) в (3.16) и учитывая, что

$$u_j{}^{(s)} = v_j{}^{(s)}\ (s = 0{,}1),\; f_5P_3 = c_4\,(k_p\varepsilon_q{}^{(0)} + k_q\varepsilon_p{}^{(0)}) - c_4c_6H\,(\varepsilon_p{}^{(0)} + \varepsilon_q{}^{(0)}),$$

получим

$$
\begin{aligned}
&H_{qp} = {}^4/_3\mu h^2 [\tau^{(0)} + {}^1/_2\, k_p\omega^{(0)} + h\,(\tau^{(1)} + {}^1/_2\, k_p\omega^{(1)}) + \ldots] \\
&T_p = 4\mu\,[c_6\varepsilon_p{}^{(0)} + c_4\varepsilon_q{}^{(0)} + h\,(c_6\varepsilon_p{}^{(1)} + c_4\varepsilon_q{}^{(1)} + f_5 Q_3) + \ldots], \quad S_{qp} = \\
&= 2\mu\,(\omega^{(0)} + h\omega^{(1)} + \ldots) \\
&G_p = -{}^4/_3\mu h^2 \{c_6\varkappa_p{}^{(0)} + c_4\varkappa_q{}^{(0)} + (k_p - k_p)\,(c_6\varepsilon_p{}^{(0)} + c_4\varepsilon_q{}^{(0)}) + \\
&+ h[c_6\varkappa_p{}^{(1)} + c_4\varkappa_q{}^{(1)} + c_6\,(k_p - k_q)\,\varepsilon_p{}^{(1)} + c_4\,(c_6 H - k_q)\,(\varepsilon_p{}^{(1)} + \varepsilon_q{}^{(1)})] + \ldots\} \\
&(p \neq q = 1,\, 2)
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Сравнивая (3.19) с (3.13), для случая, когда $m = 0$, а $k_{pp} = k_p$, находим, что усилия T_p и S_{qp}, определяемые по различным теориям, имеют одинаковую погрешность порядка h^2 по сравнению с единицей. Что касается моментов G_p и H_{qp}, то здесь наблюдается совпадение лишь главных членов соответствующих разложений. Наконец, если сравнить перемещения $u_j{}^0$, описываемые итерационной теорией, с разложениями (3.14), то можно установить, что они имеют одну и ту же погрешность.

Таким образом, построенная здесь теория по сравнению с итерационной теорией А. Л. Гольденвейзера позволяет на порядок повысить точность определения величин N_p, G_p и H_{qp}.

Поступила 19 II 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955.
2. *Кильчевский Н. А.* Обобщение современной теории оболочек. ПММ, 1939, т. 2, вып. 4.
3. *Кільчевський М. О.* Основні рівняння теорії оболонок і деякі методи їх інтегрування. Збірник праць інституту математики АН УССР, 1941, № 6.
4. *Кильчевский Н. А.* Основы аналитической механики оболочек, ч. 1. Киев, Изд-во АН УССР, 1963.
5. *Базаренко Н. А., Ворович И. И.* Анализ трехмерного напряженного и деформированного состояния круговых цилиндрических оболочек. Построение уточненных прикладных теорий. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
6. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М., «Наука», 1976.