

МИНИМУМ ВЕСА ТОНКИХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

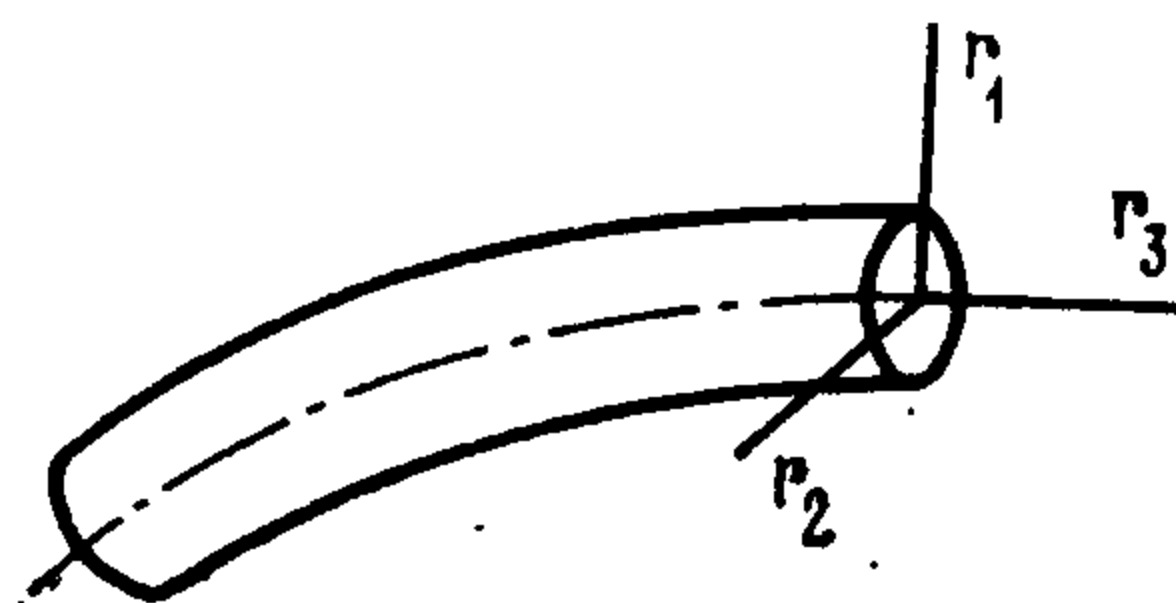
Л. В. Петухов

(Ленинград)

Рассматривается задача минимизации веса тонких криволинейных стержней, напряженное состояние которых описывается теорией Сен-Венана. Дается анализ упругого состояния стержня, а также влияния формы сечения на напряженное состояние. Считается, что каждая точка стержня должна удовлетворять некоторому условию прочности. Приводятся решения конкретных задач для стержней разной конфигурации.

Задачи о минимуме веса балок и кривых брусьев, описываемых уравнениями элементарной теории изгиба, рассматривались в работах [1-3].

1. Постановка задачи. Рассмотрим криволинейный пространственно расположенный стержень длины l . Свяжем с осью стержня криволинейную систему координат x_1, x_2, x_3 (фиг. 1). Пусть орт r_3 направлен по касатель-



Фиг. 1

ной к оси стержня, а орты r_1, r_2 , лежащие в ортогональной к r_3 плоскости сечения стержня, направлены по главным осям инерции сечения. Будем считать координатные оси x_1, x_2 прямыми, так что коэффициенты Ляме $X_1 = X_2 = 1$. Длину дуги вдоль координатной оси x_3 обозначим через r_3 ($dr_3 = X_3 dx_3$).

Рассмотрим сечение стержня. Будем считать, что форма сечения зависит от координаты x_3 таким образом, что все линейные размеры сечения пропорциональны коэффициенту подобия $\theta(x_3)$ с центром подобия в центре инерции стержня. Коэффициент подобия в этом случае должен удовлетворять неравенству

$$(1.1) \quad \theta \geq 0$$

Сечение, получающееся при $\theta = 1$, будем называть исходным сечением. Очевидно, что не для любой формы исходного сечения существуют подобные при любом $\theta \geq 0$. Однако для любых выпуклых сечений и большинства сечений, применяющихся в технике, подобные сечения существуют при любых θ .

Обозначим векторы перемещений, углов поворота, моментов, усилий, а также внешних распределенных нагрузок и моментов соответственно через u , φ , M , P , p , m . Тогда уравнения равновесия криволинейного стержня имеют вид (штрих означает производную по r_3) [4]

$$(1.2) \quad P' = -p, \quad M' = -m - r_3 \times P, \quad u' = -r_3 \times \varphi + A \cdot P, \quad \varphi' = C \cdot M$$

Здесь A , C — тензоры второго ранга, зависящие от формы сечения и упругих постоянных материала стержня. В системе координат, связанных с главными осями инерции сечения, эти тензоры принимают диагональную форму

$$(1.3) \quad A_{kk} = \frac{1}{G s i_k}, \quad C_{kk} = \frac{1}{E j_k} \quad (k=1, 2), \quad A_{33} = \frac{1}{E s}, \quad C_{33} = \frac{1}{G c}$$

где E — модуль Юнга, G — модуль сдвига, s — площадь, c — жесткость на кручение, j_1 , j_2 — главные моменты инерции, i_1 , i_2 — коэффициенты сдвига сечения стержня. Соотношения (1.3) показывают, что (нулевым индексом помечены значения, относящиеся к исходному сечению)

$$(1.4) \quad A_{kk}^0 = \theta^2 A_{kk}, \quad C_{kk}^0 = \theta^4 C_{kk} \quad (k=1, 2, 3)$$

По конфигурации оси все стержни можно разбить на две группы. К первой группе отнесем незамкнутые стержни. Такие стержни имеют границы $r_3 = 0$ и $r_3 = l$. На этих границах зададим условия

$$(1.5) \quad \begin{aligned} -a_{1k} P_k(0) + b_{1k} u_k(0) - g_{1k} &= 0, & a_{2k} P_k(l) + b_{2k} u_k(l) - \\ -g_{2k} &= 0 \\ -c_{1k} M_k(0) + d_{1k} \varphi_k(0) - f_{1k} &= 0, & c_{2k} M_k(l) + d_{2k} \varphi_k(l) - \\ -f_{2k} &= 0 \quad (k=1, 2, 3) \end{aligned}$$

где a_{nk} , b_{nk} , c_{nk} , d_{nk} , g_{nk} , f_{nk} ($n=1, 2$; $k=1, 2, 3$) — заданные коэффициенты, причем $a_{nk}^2 + b_{nk}^2 \neq 0$, $c_{nk}^2 + d_{nk}^2 \neq 0$. Коэффициенты f_{nk} , g_{nk} могут играть роль или действующих на концах стержня сосредоточенных сил, моментов или заданных перемещений, углов поворота. Граничные условия (1.5) являются достаточно общими и охватывают большой класс реальных конструкций. Ко второй группе отнесем замкнутые стержни. В этом случае граничные условия будут отсутствовать, а постоянные интегрирования находятся из условий периодичности u , φ , M , P .

Для определения напряжений в стержне воспользуемся теорией Сен-Венана [5]

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \sigma_{31} &= \frac{P_1 G}{E i_2} \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial x_1} - x_1^2 \right) + \frac{P_2 G}{E i_1} \left(\frac{\partial \chi_2}{\partial x_1} - 2\nu x_1 x_2 \right) + \frac{M_3}{c} \frac{\partial \chi_3}{\partial x_2} \\ \sigma_{32} &= \frac{P_1 G}{E i_2} \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial x_2} - 2\nu x_1 x_2 \right) + \frac{P_2 G}{E i_1} \left(\frac{\partial \chi_2}{\partial x_2} - x_2^2 \right) - \frac{M_3}{c} \frac{\partial \chi_3}{\partial x_1} \\ \sigma_{33} &= \frac{M_1 x_2}{i_1} - \frac{M_2 x_1}{i_2} + \frac{P_3}{s}, \quad \sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0 \end{aligned}$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона, а $\chi_k = \chi_k(x_1, x_2)$ ($k=1, 2, 3$) — решения краевых задач

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \Delta \chi_1 &= 0, \quad \partial \chi_1 / \partial r_1' |_{\Gamma} = \alpha_1 x_1^2 + 2\nu \alpha_2 x_1 x_2 \\ \Delta \chi_2 &= 0, \quad \partial \chi_2 / \partial r_1' |_{\Gamma} = 2\nu \alpha_1 x_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2 \\ \Delta \chi_3 &= -2, \quad \partial \chi_3 / \partial r_2' |_{\Gamma} = 0 \end{aligned}$$

причем введены обозначения: Δ — оператор Лапласа, Γ — контур, охватывающий сечение S , x_1', x_2', x_3' — система криволинейных координат, связанная с контуром Γ , так, что орт r_3' параллелен орту r_3 , орт r_2' направлен по касательной, а орт r_1' по нормали к контуру Γ , α_1, α_2 — направляющие косинусы нормали r_1', r_1', r_2' — длины дуг, вдоль координатных линий x_1', x_2' .

Напряжения (1.6) могут быть выражены через напряжения в исходном сечении. Действительно, сделаем замену координат x_1, x_2 и функций χ_1, χ_2, χ_3

$$(1.8) \quad x_k = \theta x_k^0, \quad \chi_k = \theta^3 \chi_k^0(x_1^0, x_2^0) \quad (k = 1, 2), \quad \chi_3 = \theta^2 \chi_3^0(x_1^0, x_2^0)$$

где нулевым индексом помечены, как и выше, величины, относящиеся к исходному сечению. Тогда после подстановки (1.8) в дифференциальные уравнения и граничные условия (1.7) получим краевые задачи для величин с нулевым индексом.

Введем в рассмотрение заданные на множестве $x_1^0, x_2^0 \in s^0$ функции

$$\chi_{nk} = \frac{G}{Ej_k^0} \left(\frac{\partial \chi_n^0}{\partial x_n^0} - x_n^{02} \right), \quad \chi_{nk} = \frac{G}{Ej_n^0} \left(\frac{\partial \chi_k^0}{\partial x_n^0} - 2\nu x_1^0 x_2^0 \right)$$

$$(n, k = 1, 2; n \neq k)$$

$$\chi_{13} = \frac{1}{c^0} \frac{\partial \chi_3^0}{\partial x_2^0}, \quad \chi_{23} = -\frac{1}{c^0} \frac{\partial \chi_3^0}{\partial x_1^0}, \quad \chi_{31} = \frac{x_2^0}{j_2^0}, \quad \chi_{32} = -\frac{x_1^0}{j_1^0}$$

$$\chi_{33} = \frac{1}{s^0}$$

Подставляя правые части (1.8) в выражения для напряжений (1.6), получим удобные формулы

$$(1.9) \quad \sigma_{3k} = \chi_{k1} P_1 / \theta^2 + \chi_{k2} P_2 / \theta^2 + \chi_{k3} M_3 / \theta^3 \quad (k = 1, 2)$$

$$\sigma_{33} = \chi_{31} M_1 / \theta^3 + \chi_{32} M_2 / \theta^3 + \chi_{33} P_3 / \theta^2$$

Рассмотрим в качестве условия прочности ограничение

$$(1.10) \quad -I_2(\text{Dev } \sigma) \leq \tau_0^2$$

где $I_2(\text{Dev } \sigma)$ — второй инвариант девиатора тензора напряжений σ , а τ_0 — предел текучести материала при кручении. Подставляя напряжения (1.9) в условие прочности (1.10), получим

$$(1.11) \quad \omega = \max_{x_1^0, x_2^0 \in s^0} [(\chi_{31} M_1 / \theta^3 + \chi_{32} M_2 / \theta^3 + \chi_{33} P_3 / \theta^2)^2 / 3 + (\chi_{11} P_1 / \theta^2 + \chi_{12} P_2 / \theta^2 + \chi_{13} M_3 / \theta^3)^2 + (\chi_{21} P_1 / \theta^2 + \chi_{22} P_2 / \theta^2 + \chi_{23} M_3 / \theta^3)^2] - \tau_0^2 \leq 0$$

Кроме ограничений (1.11), носящих в оптимальном управлении название ограничений нулевого порядка [6], часто возникает необходимость в ограничениях

$$(1.12) \quad 0 \leq \lambda_1 \leq \theta \leq \lambda_2$$

обусловленных конструктивными соображениями.

Поставим следующую задачу оптимизации. Среди кусочно-непрерывных управлений $\theta(r_3)$ и кусочно-гладких функций $u(r_3)$, $\varphi(r_3)$, $M(r_3)$, $P(r_3)$, удовлетворяющих уравнениям (1.2), граничным условиям (1.5),

ограничениям (1.11), (1.12), найти такие, которые сообщают весу стержня

$$(1.13) \quad J = \int_0^l \rho g s^0 \theta^2 dr_3$$

минимальное значение (g — ускорение силы тяжести, ρ — плотность материала, из которого изготовлен стержень, как правило, не зависящая от координаты r_3).

2. **Необходимые условия оптимальности.** Задача о минимуме веса стержня относится к задаче оптимального управления с фиксированными концами и с ограничениями на фазовые координаты нулевого порядка (1.11) и с ограничениями на управление (1.12). Следуя [7], перейдем от ограничений типа неравенств к ограничениям типа равенств

$$(2.1) \quad \omega + \theta_1^2 = 0, \quad -\theta + \lambda_1 + \theta_2^2 = 0, \quad \theta - \lambda_2 + \theta_3^2 = 0$$

где $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ — дополнительные управляющие функции.

Составим функцию Гамильтона H [8], для чего прибавим к подынтегральному выражению (1.13) правые части уравнений (1.2), скалярно умноженные последовательно на неопределенные множители Лагранжа $-v, -\psi, Q, N$, а также левые части уравнений (2.1), домноженные на множители Лагранжа μ_1, μ_2, μ_3

$$(2.2) \quad H = \rho g s^0 \theta^2 + v \cdot p + \psi \cdot (m + r_3 \times P) + Q \cdot (-r_3 \times \varphi + A \cdot P) + \\ + N \cdot (C \cdot M) + \mu_1 (\omega + \theta_1^2) + \mu_2 (-\theta + \lambda_1 + \theta_2^2) + \mu_3 (\theta + \\ + \lambda_2 + \theta_3^2)$$

Применяя результаты [8], получим для поставленной задачи уравнения Эйлера (как и прежде, штрих означает производную по r_3)

$$(2.3) \quad Q' = 0, \quad N' + r_3 \times Q = 0, \quad v' + r_3 \times \psi = A \cdot Q + \mu_1 \frac{\partial \omega}{\partial P} \\ \psi' = C \cdot N + \mu_1 \frac{\partial \omega}{\partial M}, \quad 2\rho g s^0 \theta + Q \cdot \frac{\partial A}{\partial \theta} \cdot P + N \cdot \frac{\partial C}{\partial \theta} \cdot M + \\ + \mu_1 \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \mu_2 + \mu_3 = 0, \quad 2\mu_k \theta_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3)$$

Анализ этих уравнений показывает, что первые четыре уравнения Эйлера по структуре совпадают с уравнениями (1.2), если провести аналогию между u и v , φ и ψ , M и N , P и Q . Анализ последних трех уравнений Эйлера показывает, что они эквивалентны уравнениям

$$\mu_1 \omega = 0, \quad \mu_2 (-\theta + \lambda_1) = 0, \quad \mu_3 (\theta - \lambda_2) = 0$$

Условия Вейерштрасса — Эрдмана для задачи минимизации веса сводятся к

$$(2.4) \quad [v] = 0, \quad [\psi] = 0, \quad [N] = 0, \quad [Q] = 0, \quad [H] = 0 \\ [F] = F(r_3 + 0) - F(r_3 - 0)$$

Учитывая первые четыре условия (2.4), из $[H] = 0$ получим

$$(2.5) \quad \rho g s^0 [\theta]^2 + v \cdot [p] + \psi \cdot [m] + Q \cdot A^0 \cdot P [1/\theta^2] + \\ + N \cdot C^0 \cdot M [1/\theta^4] = 0$$

Составим теперь функцию, получаемую суммированием левых частей граничных условий (1.5), умноженных на неопределенные множители Лагранжа $\xi_{1k}, \xi_{2k}, \eta_{1k}, \eta_{2k}$ соответственно. Используя результаты работы [8], получим в точках $r_3 = 0$ и $r_3 = l$ двадцать четыре условия

$$(2.6) \quad \begin{aligned} Q_k(0) &= -\xi_{1k}b_{1k}, \quad v_k(0) = -\xi_{1k}a_{1k}, \quad N_k(0) = -\eta_{1k}d_{1k} \\ \psi_k(0) &= -\eta_{1k}c_{1k} \\ Q_k(l) &= \xi_{2k}b_{2k}, \quad v_k(l) = -\xi_{2k}a_{2k}, \quad N_k(l) = \eta_{2k}d_{2k}, \quad \psi_k(l) = \\ &= \eta_{2k}c_{2k} \quad (k = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

двенадцать из которых служат для определения множителей Лагранжа $\xi_{1k}, \xi_{2k}, \eta_{1k}, \eta_{2k}$, а остальные двенадцать являются граничными условиями для уравнений Эйлера (2.3). Исключая из уравнений (2.6) множители Лагранжа, получим более удобную форму граничных условий

$$(2.7) \quad \begin{aligned} -a_{1k}Q_k(0) + b_{1k}v_k(0) &= 0, \quad a_{2k}Q_k(l) + b_{2k}v_k(l) = 0 \\ -c_{1k}N_k(0) + d_{1k}\psi_k(0) &= 0, \quad c_{2k}N_k(l) + d_{2k}\psi_k(l) = 0 \\ (k = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

В обозначениях этой работы необходимые условия Клебша слабого и Вейерштрасса сильного минимумов приводят к неравенствам (2.8) и (2.9) соответственно

$$(2.8) \quad \mu_1 \geq 0, \quad \mu_2 \geq 0, \quad \mu_3 \geq 0$$

$$(2.9) \quad H(M, P, N, Q, \theta) \geq H(M, P, N, Q, \Theta)$$

где $\theta(r_3)$ — оптимальное, а $\Theta(r_3)$ — любое допустимое управления.

3. Оптимальные стержневые системы. Возьмем для простоты в качестве исходного сечения круг радиуса $a = 1$ м. Решая для него краевые задачи (1.7), найдем

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \chi_{11} &= \frac{(3+2\nu)(1-x_1^{02}) - (1-2\nu)x_2^{02}}{2\pi(1+\nu)}, \quad \chi_{12} = \chi_{21} = -\frac{(1+2\nu)x_1^0x_2^0}{\pi(1+\nu)} \\ \chi_{22} &= \frac{(3+2\nu)(1-x_2^{02}) - (1-2\nu)x_1^{02}}{2\pi(1+\nu)}, \quad \chi_{13} = -\frac{4x_2^0}{\pi}, \quad \chi_{23} = \frac{4x_1^0}{\pi} \\ \chi_{31} &= 4x_2^0/\pi, \quad \chi_{32} = -4x_1^0/\pi, \quad \chi_{33} = 1/\pi \end{aligned}$$

Минимум веса консоли. Консоль представляет собой прямолинейный стержень, один конец которого заделан, а другой свободен. Для прямолинейного стержня система уравнений (1.2) распадается на четыре системы уравнений (изгиб в двух плоскостях, растяжение и кручение). Граничные условия (1.5) для консоли упрощаются

$$(3.2) \quad u(0) = \varphi(0) = 0, \quad P_k(l) = g_k, \quad M_k(l) = f_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

Решая уравнения (1.2) с граничными условиями (3.2), найдем

$$(3.3) \quad \begin{aligned} M_1 &= f_1 - g_2(l-r_3) + \int_{r_3}^l m_1(\zeta) d\zeta - \int_{r_3}^l d\zeta \int_{\zeta}^l p_2(\zeta) d\zeta \\ M_2 &= f_2 + g_1(l-r_3) + \int_{r_3}^l m_2(\zeta) d\zeta + \int_{r_3}^l d\zeta \int_{\zeta}^l p_1(\zeta) d\zeta \\ M_3 &= f_3 + \int_{r_3}^l m_3(\zeta) d\zeta, \quad P_k = g_k + \int_{r_3}^l p_k(\zeta) d\zeta \quad (k = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

Управление $\theta(r_3)$ определяется уравнением

$$(3.4) \quad \omega = 0$$

Возьмем $p_k = m_k = 0$, $f_k = 0$ ($k = 1, 2, 3$), $g_1 = g_3 = 0$, $g_2 = 2.14 \cdot 10^4 \text{ Н}$, $l = 1 \text{ м}$, $\nu = 0.25$, $\tau_0 = 1.47 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$, $\rho = 7.8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Оптимальное управление представлено на фиг. 2 сплошной линией. Вес оптимального стержня и стержня постоянного сечения, удовлетворяющего условию прочности (1.11), соответственно $J_0 \approx 220 \text{ Н}$, $J_{\Pi} \approx 384 \text{ Н}$ (выигрыш веса $\approx 43\%$).

Минимум веса стержня, ось которого — винтовая линия. Возьмем стержень с круговым сечением, ось которого представляет собой винтовую линию, один конец которого заделан, а на второй действует сила g (фиг. 3). Положим $l = 1 \text{ м}$ — длина одного витка винтовой линии, $h = 0.1 \text{ м}$ — шаг винтовой линии, $g = 9.8 \cdot 10^3 \text{ Н}$, $\tau_0 = 1.47 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0.25$, $\rho = 7.8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

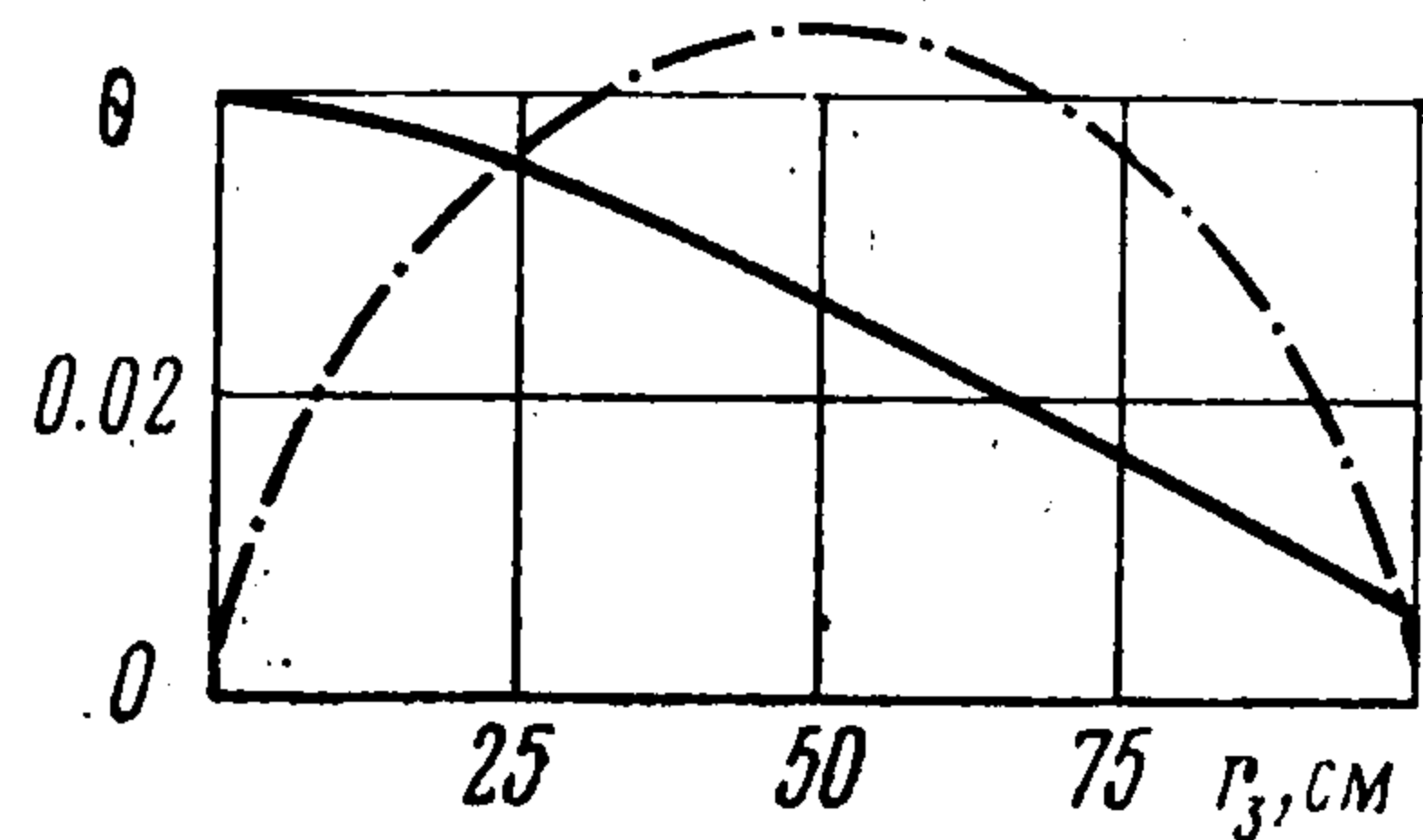
Решение уравнений (1.2) приводит к результату

$$P_1 = 0, \quad P_2 = -\frac{gd}{l}, \quad P_3 = \frac{gb}{l}, \quad M_1 = \frac{gl}{2\pi} \sin \frac{2\pi(l-r_3)}{l}$$

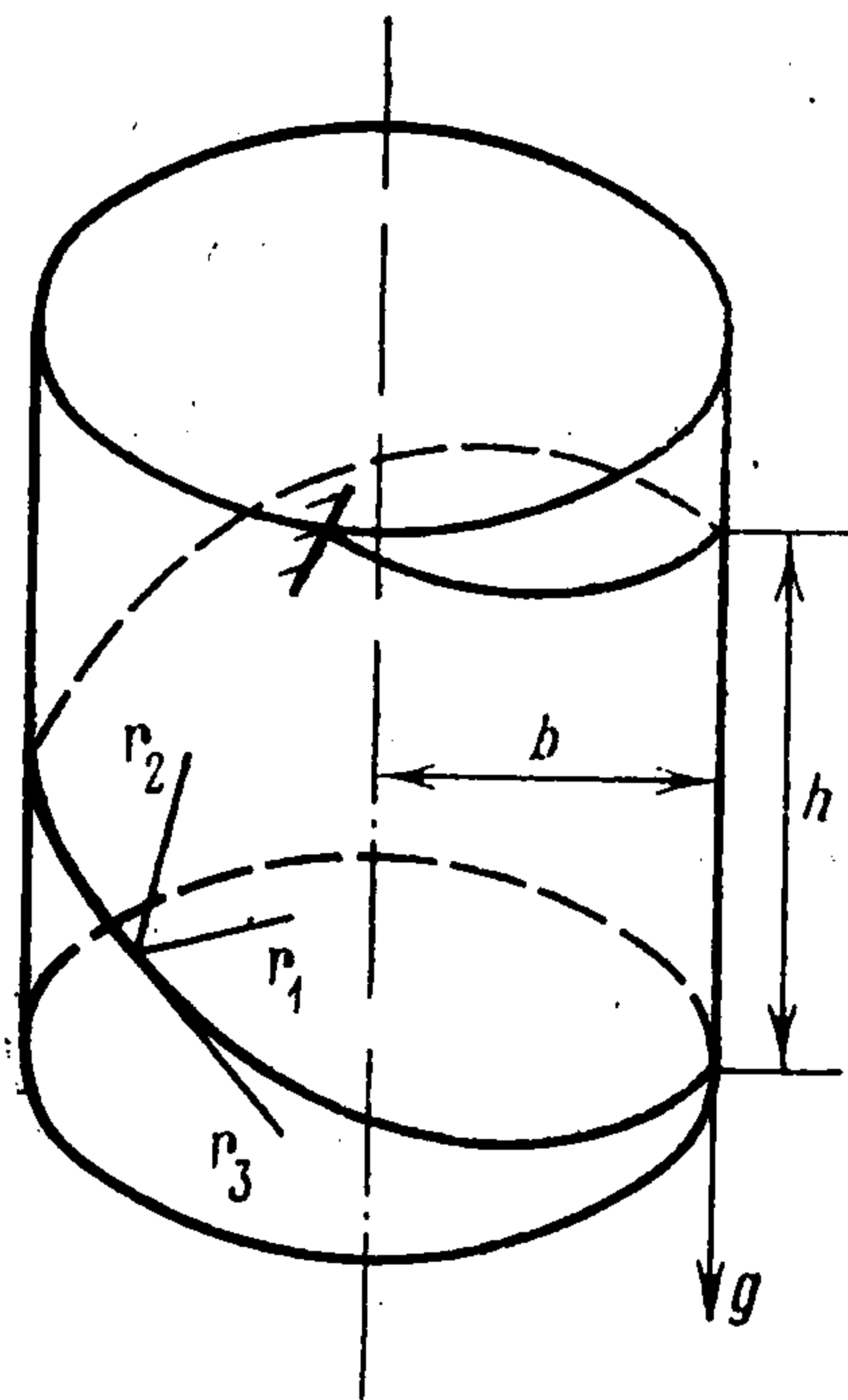
$$M_2 = -\frac{gdb}{2\pi l} \left[1 - \cos \frac{2\pi(l-r_3)}{l} \right], \quad M_3 = -\frac{gd^2}{2\pi l} \left[1 - \cos \frac{2\pi(l-r_3)}{l} \right]$$

$$d = \sqrt{l^2 - h^2}, \quad b = d / (2\pi)$$

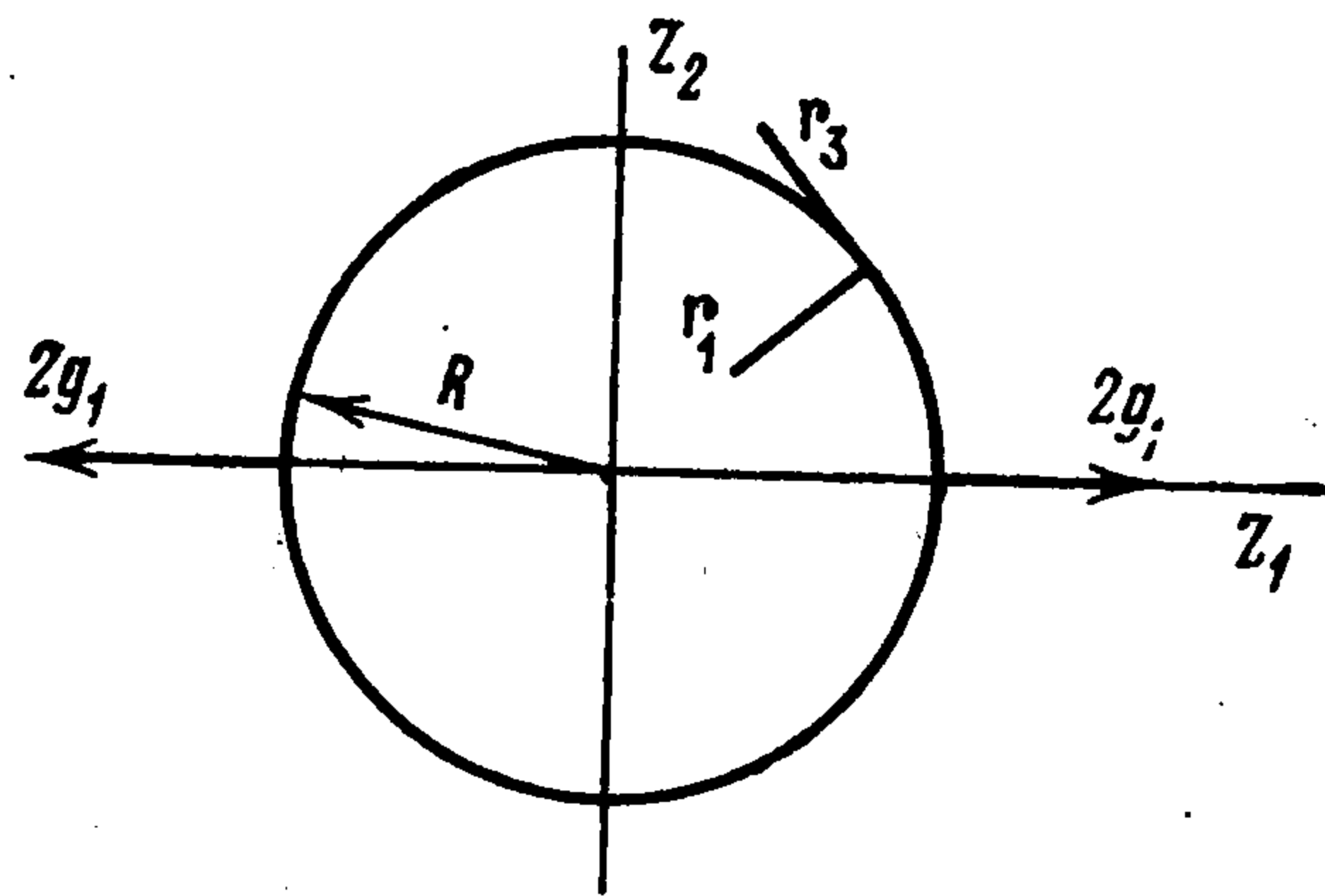
Оптимальное управление $\theta(r_3)$ можно определить из уравнения (3.4). Оно представлено на фиг. 2 штриховой линией. Вес оптимального стержня и стержня постоянного



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

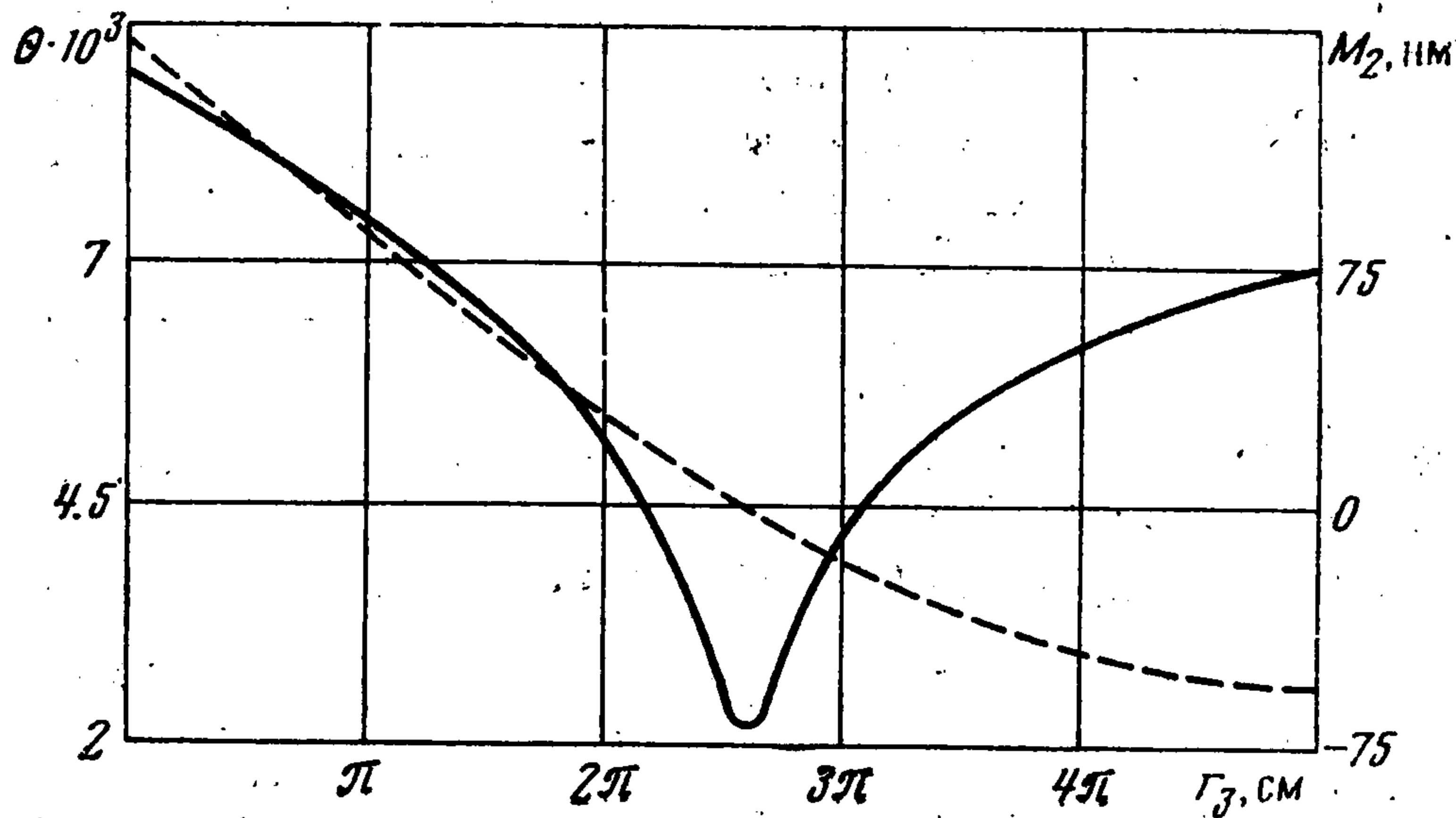
сечения, удовлетворяющего условию прочности, соответственно $J_0 \approx 289 \text{ Н}$, $J_{\Pi} \approx 473 \text{ Н}$ (выигрыш веса $\approx 40\%$).

Минимум веса стержня, ось которого — окружность. Возьмем стержень с круговым сечением, ось которого — окружность (фиг. 4), растягиваемый сосредоточенными силами $2g_1$.

Положим $b = 0.1 \text{ м}$, $g_1 = 9.8 \cdot 10^3 \text{ Н}$, $\tau_0 = 1.47 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$, $E = 2.06 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0.31$, $\rho = 7.8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Так как задача растяжения кругового кольца имеет оси симметрии $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$, будем рассматривать четверть кольца $r_3 \in [0, \pi b / 2]$ с граничными условиями

$$u_3(0) = \varphi_2(0) = u_3(l) = \varphi_2(l) = P_1(l) = 0, \quad P_1(0) = g_1$$

Найти точное решение поставленной задачи не представляется возможным. В связи с этим решалась задача, для которой ограничение (1.11) учитывалось в виде штрафного множителя к функционалу (1.13). Оптимальный стержень и стержень постоянного сечения, удовлетворяющий условию прочности (1.11), представлены на фиг. 5 сплошными линиями, а распределение момента M_2 — штриховой линией. Вес оптимального стержня и стержня постоянного сечения соответственно $J_0 \approx 5.98$ Н, $J_{II} \approx 11.0$ Н (выигрыш веса $\approx 46\%$).



Фиг. 5

Анализ полученных оптимальных стержней показывает, что все они равнопрочные независимо от формы оси стержня. Напомним, что стержень называется равнопрочным, если в каждом сечении имеется точка, в которой ограничение (1.11) выполняется в виде равенства. Эти точки не обязательно расположены в какой-либо одной части сечения. В зависимости от длины дуги s_3 эти точки могут перемещаться по сечению.

Если бы удалось показать, что постановка задачи с ограничениями типа неравенства (1.11) эквивалентна задаче с соответствующим ограничением типа равенства, то процесс решения мог бы несколько упроститься.

Поступила 28 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Аристов М. В., Троицкий В. А. Применение теории оптимального управления к конструированию оптимальных балок. В сб.: Прикладная математика. Тула, 1974.
2. Haug E. J. J., Kirmser P. G. Minimum weight design of beams with inequality constraints on stress and deflection. Trans. ASME, Ser. E; J. Appl. Mech., 1967, vol. 34, No. 4.
3. Николаи Е. Л. Труды по механике. М., Гостехиздат, 1955.
4. Лурье А. И. Теория упругости. М., «Наука», 1970.
5. Брайсон А., Хо Ю Ши. Прикладная теория оптимального управления. М., «Мир», 1972.
6. Семенов А. С. Необходимые условия в вариационных задачах оптимизации процессов управления с ограничениями на фазовые координаты q -го порядка. Тр. Ленинградск. политехн. ин-та, № 318, 1971.
7. Троицкий В. А. Оптимальные процессы колебаний механических систем. Л., «Машиностроение», 1976.
8. Бинкевич Е. В., Дзюба А. П. Проектирование кривого бруса минимального веса. В сб.: Теоретические и экспериментальные исследования прочности, устойчивости и динамики конструкций. Изд-во Днепропетровск. ун-та, 1973.