Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 4, 1980

УДК 539.3

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В. Г. Вильке

(Москва)

Ядро функционала потенциальной энергии упругих деформаций зависит от инвариантов тензора конечных деформаций, а сам функционал представляется в виде конечной суммы однородных функционалов от перемещений и определен на пространстве Соболева $(W_p{}^1(\Omega))^3$ $(p > 2)$ [1, 2]. Устанавливается ряд неравенств, которым удовлетворяет функционал потенциальной энергии деформаций и его производные по Фреше, и доказывается теорема существования и единственности обобщенных решений динамических задач нелинейной теории упругости в фазовом пространстве $(L_2(\Omega))^3 \times \times (W_p{}^1(\Omega))^3$ $(2 < p < \infty)$.

Ранее рассматривались теоремы существования и единственности решений динамических задач линейной теории упругости малых деформаций [3] и одного класса нелинейных задач [4].

1. Свойства функционала потенциальной энергии упругих деформаций. Зададим функционал потенциальной энергии деформаций в виде

$$\mathrm{E}[\mathbf{u}] = \int\limits_\Omega e(\mathrm{I}_E, \mathrm{II}_E, \mathrm{III}_E)\,dx \quad (dx = dx_1\,dx_2\,dx_3) \tag{1.1}$$

$$e(\mathrm{I}_E, \mathrm{II}_E, \mathrm{III}_E) = \sum_{k=2}^{p} e_k(w), \quad w = (u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{33}) \in R^9$$

$$u_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad \forall\, i, j = 1, 2, 3, \quad \mathrm{E}_k[w] = \int\limits_\Omega e_k(w)\,dx$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset R^3$$

Здесь Ω — область, занимаемая телом в естественном недеформированном состоянии, I_E, II_E, III_E — инварианты тензора конечных деформаций, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — вектор перемещений, $e_k(w)$ — однородные функции порядка k

$$e_k(w) = \sum_{|l|=k} a_l w^l, \quad e_k(\mu w) = \mu^k e_k(w), \quad \mu \in R^1, \quad k = 2, \ldots, p \tag{1.2}$$

$$l = (l_1, \ldots, l_9), \quad w^l = w_1{}^{l_1} \ldots w_9{}^{l_9}, \quad |l| = \sum_{i=1}^{9} l_i.$$

где l_i — неотрицательные целые числа, $a_l = a_{l_1, \ldots, l_9}$ — постоянные.

Функционал (1.1) имеет указанный вид в случае однородной изотропной среды. Для неоднородной неизотропной среды коэффициенты a_l в (1.2) зависят от точки $\mathbf{x}$ и ориентации главных осей деформации относительно осей, связанных со средой. Все полученные ниже результаты для однородных и изотропных сред будут справедливы в общем случае, если коэффициенты a_l (x) ограничены сверху и снизу на Ω.

Область определения функционала (1.1) — пространство Соболева $(W_p^1(\Omega))^3$ с нормой

$$\|\mathbf{u}\|_{p,1}=\Big(\sum_{i=1}^{3}\|u_i\|_{p,0}^{p}+\sum_{i,j=1}^{3}\|u_{ij}\|_{p,0}^{p}\Big)^{1/p},\qquad \|f\|_{p,0}^{p}=\int_\Omega |f|^p\,dx$$

Теорема 1. Функционал (1.1) ограничен в $(W_p^1(\Omega))^3$.

Доказательство теоремы 1 основывается на применении неравенства Гельдера для нескольких функций и оценок, следующих из теоремы вложения L_p в $L_{|l|}$ при $|l|<p$ [5].

Пусть

$$G=\{\mathbf{u}:\mathbf{u}=\gamma+(O-E)\,\mathbf{x},\ \ \mathbf{u},\gamma\in R^3,\ O\in SO(3)\}$$

есть группа вращений-перемещений в R^3 и справедливы условия

$$(1.3)\qquad \mathrm{E}[\mathbf{u}]=0\Leftrightarrow \mathbf{u}\in G;\ \ \mathbf{u}\notin G\Rightarrow \mathrm{E}[\mathbf{u}]\Rightarrow 0$$

которые означают, что при перемещениях упругого тела как твердого энергия деформаций равна нулю, а во всех остальных случаях положительна. Из второго условия (1.3) следует, что p — четное.

Лемма 1. Многочлен

$$(1.4)\qquad P_p(y)=\sum_{|l|=p}a_l y^l,\quad y\in R^9$$

не может принимать отрицательные значения.

Если допустить, что $P_p(y_0)=c<0$ при $y=y_0$, то для $y=\mu y_0$ получим

$$E[\mu y_0]=\sum_{k=2}^{p}\mu^k E_k[y_0],\ \ E_p[y_0]=c\,\mathrm{vol}\,\Omega<0$$

Ясно, что при достаточно большом μ функционал $E[\mu y_0]$ может быть сделан отрицательным, что противоречит (1.3).

Лемма 2. Пусть система уравнений

$$(1.5)\qquad P_p(y)=0,\ \ \mathrm{grad}_y\,P_p(y)=0$$

не имеет решений. Тогда функционал $\mathrm{E}_p[\mathbf{u}]$ положительно определен

$$(1.6)\qquad \mathrm{E}_p[\mathbf{u}]\geqslant c_1\|w\|_{p,0}^{p},\quad \forall\, w\in(L_p(\Omega))^9$$

В силу однородности многочлена $P_p(y)$ для доказательства леммы достаточно доказать неравенство

$$(1.7)\qquad P_p(y)\geqslant c_1\sum_{i=1}^{9}y_i^{\,p},\quad y\in S_1=\Big\{y:\ \sum_{i=1}^{9}y_i^{\,p}=1\Big\}$$

Так как сфера S_1 — компакт в R^9, то многочлен $P_p(y)$ принимает на ней минимальное значение. Если минимум P_p на S_1 положителен, то (1.7) доказано. Минимум многочлена не может быть отрицательным согласно лемме 1. Остается рассмотреть случай, когда минимум равен нулю. Поскольку $P_p(y)$ — дифференцируемая функция, то вектор grad $P_p(y)$ в точке минимума должен равняться нулю (его проекция на касательную гиперплоскость к S_1 обращается в нуль, а проекция на нормаль к S_1 равна нулю, так как вдоль нормали многочлен остается равным нулю в силу однородности). Противоречие с условиями (1.5) доказывает лемму.

Теорема 2. Если функционал (I.I) (p — четное) удовлетворяет условиям (1.3), (1.5), то существуют постоянные $N > 0$, $c_2 > 0$ и справедливо неравенство

(1.8) $$\mathrm{E}\,[\mathbf{u}] \geqslant c_2 \,\| w \|_{p,\,0}^{p}, \quad \| w \|_{p,\,0} > N$$

Имеем

$$\mathrm{E}\,[w] = \mu^p \left\{ \mathrm{E}_p\,[w^0] + \sum_{k=2}^{p-1} \mu^{k-p} \mathrm{E}_k\,[w^0] \right\}, \quad \mu = \| w \|_{p,\,0}, \quad w^0 = \mu^{-1} w$$

Из теоремы 1 следует, что однородные функционалы

$$\mathrm{E}_k[w] = \int_\Omega e_k(w)\, dx$$

ограничены в $(W_p{}^1(\Omega))^3$. Это означает, что при достаточно больших μ ($\mu > N$) будет справедлива оценка

$$\max_{\|w^0\|_{p,\,0}=1} \left\{ \sum_{k=2}^{p-1} \mu^{k-p} \mathrm{E}_k\,[w^0] \right\} < \frac{c_1}{2}$$

и далее на основании (1.6) получим

$$\mathrm{E}\,[w] \geqslant 1/2\; c_1 \mu^p \,\| w^0 \|_{p,0}^{p} = 1/2\; c_1 \,\| w \|_{p,\,0}^{p}$$

что и доказывает (1.8).

Лемма 3. Градиент однородного функционала $\mathrm{E}_k\,[w]$ удовлетворяет неравенству

(1.9) $$\| \nabla \mathrm{E}_k\,[w] \|_{k',\,0}^{k'} \leqslant M_k \,\| w \|_{k,\,0}^{k}, \quad \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$$

Замечание. Функционал $E_k\,[\mathbf{u}]$ можно рассматривать либо на пространстве $(W_k{}^1(\Omega))^3$, либо на пространстве $(L_k(\Omega))^3$ (в этом случае будем писать $E_k\,[w]$). В зависимости от этого градиент E_k будет принадлежать сопряженным пространствам $\nabla E_k\,[\mathbf{u}] \in (W_{k'}{}^{-1}(\Omega))^3$ и $\nabla E_k\,[w] \in (L_{k'}(\Omega))^3$, а нормы градиентов связаны соотношением

$$\| \nabla E_k\,[w] \|_{k',\,0} \geqslant \| \nabla E_k\,[\mathbf{u}] \|_{k',\,-1}$$

Доказательство леммы 3. Согласно (1.1), имеем

$$\| \nabla E_k\,[w] \|_{k',0}^{k'} = \sum_{i=1}^{9} \left[\int_\Omega \Bigl| \sum_{|m|=k} a_m m_i w^{m-1(i)} \Bigr|^{k'} dx \right].$$

Здесь вектор $m - 1\,(i)$ имеет координаты $(m_1, \ldots, m_i - 1, \ldots, m_9)$. Так как

$$\Bigl| \sum_{s=1}^{n} z_s \Bigr|^{k_1} \leqslant n^{k'-1} \sum_{s=1}^{n} | z_s |^{k'} \quad (k' > 1)$$

то

(1.10) $$\| \nabla E_k\,[w] \|_{k',0}^{k'} \leqslant \sum_{i=1}^{9} \sum_{|m|=k} | a_m m_i |^{k'}\, 9^k \int_\Omega | w^{(m-1(i))\,k'} |\, dx$$

Интеграл в (1.10) оценивается с помощью неравенства Гельдера для нескольких функций [5]

$$\int_\Omega | w^{(m-1(i))\,k'} |\, dx \leqslant \prod_{s=1}^{9} \| w_s \|_{k,\,0}^{m_s - \delta_{is}} \quad (|m - 1\,(i)|\, k' = k)$$

Используем неравенство

$$\prod_{s=1}^{n} |z_s| \leqslant \sum_{s=1}^{n} p_s^{-1} |z_s|^{p_s}, \quad \sum_{s=1}^{n} p_s^{-1} = 1$$

и получим оценку

$$\int_{\Omega} |w^{(m-1(i))k'}|\, dx \leqslant \sum_{s=1}^{9} \frac{m_s - \delta_{is}}{k} \| w_s \|_{k,0}^{k} \leqslant \| w \|_{k,0}^{k}$$

из которой следует (1.9) с

$$M_k = \sum_{i=1}^{9} \sum_{|m|=k} 9^k |a_m m_i|^{k'}$$

Теорема 3. Градиент функционала (1.1) удовлетворяет неравенству

(1.11) $$\| \nabla \mathrm{E}\, [w] \|_{q,0}^{q} \leqslant N_1 \| w \|_{p,0}^{q} + N_2 \| w \|_{p,0}^{p}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad N_1 > 0, \quad N_2 > 0$$

Используя теорему вложения $L_p \subsetneq L_k$ $(k \leqslant p)$ и следующее из нее неравенство $\| z \|_{k,0} \leqslant C_k \| z \|_{p,0}$, а также лемму 3, приходим к оценке

$$\| \nabla \mathrm{E}\, [w] \|_{q,0} \leqslant \sum_{k=2}^{p} C_k M_k \| w \|_{k,0}^{k/k'}$$

Заметим, что $k / k' = k - 1$ и верно неравенство

$$\Bigl(\sum_{k=2}^{p} C_k M_k y^{k-1} \Bigr)^q \leqslant N_1 y^q + N_2 y^{(p-1)q}$$

при некоторых положительных N_1 и N_2, откуда и следует утверждение теоремы.

Следствие. Из неравенства (1.11) вытекает неравенство

$$\| \nabla \mathrm{E}\, [w] \|_{q,0} \leqslant N_1' \| w \|_{p,0} + N_2' \| w \|_{p,0}^{p-1}$$

где N_1', N_2' — некоторые положительные постоянные.

Теорема 4. Для градиента функционала (1.1) справедливо условие Липшица

(1.12) $$\| \nabla \mathrm{E}\, [w''] - \nabla \mathrm{E}\, [w'] \|_{q,0} \leqslant L\,(h) \| w'' - w' \|_{p,0}$$

если $\| w' \|_{p,0} < h$, $\| w'' \|_{p,0} < h$ $(h > 0)$, где $L\,(h)$ — постоянная, зависящая только от h и области интегрирования Ω.

Доказательство теоремы 4 основано на двух леммах.

Лемма 4. Вторая производная по Фреше функционала $\mathrm{E}_k\, [w]$ удовлетворяет неравенству

$$\| \nabla^2 \mathrm{E}_k\, [w] \|_{(k)} = \sup \frac{(\nabla^2 \mathrm{E}\, [w]\, z,\, v)}{\| z \|_{k,0} \| v \|_{k,0}} \leqslant B_k \| w \|_{k,0}^{k}, \quad B_k > 0$$

$$z,\, v \in (L_k(\Omega))^9, \quad (\nabla^2 \mathrm{E}\, [w]\, z,\, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{9} \frac{\partial^2 e\,(w)}{\partial w_i \partial w_j} z_i v_j\, dx$$

Лемма 5. Вторая производная по Фреше функционала $\mathrm{E}\, [w]$ удовлетворяет неравенству

$$\| \nabla^2\, \mathrm{E}\, [w] \|_{(p)} \leqslant G_1 + G_2 \| w \|_{p,0}^{p-2}, \quad G_1 > 0, \quad G_2 > 0$$

Доказательства этих лемм аналогичны доказательству леммы 3 и теоремы 3.

Для доказательства теоремы 4 рассмотрим функцию

$$\Phi(\tau) = (\nabla E[w' + \tau(w'' - w')], v), \quad (\nabla E[w], v) = = \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{9} \frac{\partial e(w)}{\partial w_i} v_i\, dx$$

Ее производная, согласно лемме 5, удовлетворяет неравенству

$$d\Phi/d\tau = (\nabla^2 E[w' + \tau(w'' - w')](w'' - w'), v) \leqslant \leqslant L(h) \| w'' - w' \|_{p,0} \| v \|_{p,0} \tag{1.13}$$

если $\| w'' \|_{p,0} < h$, $\| w' \|_{p,0} < h$ и $L(h) = G_1 + G_2 h^{p-2}$. Интегрируя (1.13) по τ от нуля до единицы, приходим к неравенству

$$(\nabla E[w''] - \nabla E[w'], v) \leqslant L(h) \| w'' - w' \|_{p,0} \| v \|_{p,0}$$

Далее

$$\| \nabla E[w''] - \nabla E[w'] \|_{q,0} = \sup_{\|v\|_{p,0}=1} (\nabla E[w''] - \nabla E[w'], v) \leqslant L(h) \| w'' - w' \|_{p,0},$$

что и требовалось доказать.

2. Теорема существования решений. Вариационный принцип Даламбера — Лагранжа динамической задачи теории упругости имеет вид [4]

$$(\mathbf{u}^{\cdot\cdot} + \nabla E[\mathbf{u}] - \mathbf{f}, \delta\mathbf{u}) - (\mathbf{F}, \delta\mathbf{u})_\Gamma = 0, \quad \forall \delta\mathbf{u} \in V \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{f}$, $\mathbf{F}$ — массовые и поверхностные силы, $\Gamma = \partial\Omega$ — дифференцируемое многообразие размерности два, удовлетворяющее условию конуса [5]. Упругое тело предполагается однородным и изотропным с единичной плотностью.

Поверхностные силы заданы на части границы Γ_F, а перемещения $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ — на части границы Γ_U, и $\Gamma = \Gamma_U \cup \Gamma_F$, $\Gamma_U \cap \Gamma_F = \varnothing$. Область определения функционала $E[\mathbf{u}]$ есть пространство С. Л. Соболева $(W_p^1(\Omega))^3$. Тогда следы функций $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ на Γ принадлежат пространству следов $(B_p^{1-1/p}(\Gamma))^3$, где $B_p^l(\Gamma)$ — пространство О. В. Бесова, совпадающее с пространством С. Л. Соболева при нецелых l [5]. Отсюда следует, что перемещения $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) \in (B_p^{1-1/p}(\Gamma))^3$ и, согласно теореме о следах, существует функция $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)$ на Ω, принадлежащая $(W_p^1(\Omega))^3$ и удовлетворяющая неравенству

$$\| \mathbf{u}_0 \|_{p,1} \leqslant d_1 \| \mathbf{U}^* \|_{p,1-1/p,\Gamma} \leqslant d_1 d_2 \| \mathbf{U} \|_{p,1-1/p,\Gamma} \quad (d_1 > 0,\ d_2 > 0) \tag{2.2}$$

где $\mathbf{U}^*$ — продолжение $\mathbf{U}$ на все Γ, а $\| \cdot \|_{p,1-1/p,\Gamma}$ — норма в $(B_p^{1-1/p}(\Gamma))^3$ [5]. Постоянные d_1, d_2 не зависят от функций, входящих в неравенство (2.2), а граница Γ_U на Γ (одномерная кривая) удовлетворяет условию конуса [5].

Линейное многообразие $V \subset (W_p^1(\Omega))^3$, где

$$V = \{\mathbf{v} : \mathbf{v} \in (W_p^1(\Omega))^3,\ \mathbf{v}|_{\Gamma_U} = 0\}$$

является конфигурационным пространством механической системы, а замена $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}$ приводит (2.1) к виду

$$(2.3) \qquad (\mathbf{v}^{\cdot\cdot} + \nabla E\,[\mathbf{u}_0 + \mathbf{v}] - \mathbf{f}_0,\ \delta\mathbf{v}) - (\mathbf{F},\ \delta\mathbf{v})_\Gamma = 0,$$
$$A\delta\mathbf{v} \in V, \quad \mathbf{f}_0 = \mathbf{f} - \mathbf{u}^{\cdot\cdot}_0$$

Ниже речь идет о существовании и единственности решений вариационной задачи (2.3) в фазовом пространстве системы $H \times V$ с начальными условиями

$$(2.4) \qquad \mathbf{v}\,(\mathbf{x},\ 0) = \mathbf{u}\,(\mathbf{x},\ 0) - \mathbf{u}_0\,(\mathbf{x},\ 0) \in V, \quad \mathbf{v}^\cdot\,(\mathbf{x},\ 0) =$$
$$= \mathbf{u}^\cdot\,(\mathbf{x}, 0) - \mathbf{u}^\cdot_0\ \ (\mathbf{x}, 0) \in H,\ H = \{\mathbf{v}^\cdot : \mathbf{v}^\cdot \in (L_2(\Omega))^3,\ \mathbf{v}^\cdot|_{\Gamma_U} = 0\}$$

Рассмотрим некоторый отрезок времени $[0,\ T]$ и предположим, что

$$(2.5) \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x},\ t) \in L_\infty\,(0,\ T;\ (L_2\,(\Omega))^3),\ \mathbf{F}\,(\mathbf{x},\ t) \in L_\infty\,(0,\ T;\ (W_2^{1/2}\,(\Gamma))^3)$$

Условия (2.5) ограничивают мощности массовых и поверхностных сил на отрезке времени $[0,\ T]$

$$(2.6) \qquad (\mathbf{f},\ \mathbf{v}^\cdot) \leqslant \|\,\mathbf{f}\,\|_{2,\,0}\,\|\,\mathbf{v}^\cdot\,\|_{2,\,0} \leqslant K_1\,\|\,\mathbf{v}^\cdot\|_{2,\,0}$$
$$(\mathbf{F},\ \mathbf{v}^\cdot)_\Gamma \leqslant \|\,\mathbf{F}\,\|_{2,\,1/2,\,\Gamma}\,\|\,\mathbf{v}^\cdot\,\|_{2,\,-1/2,\,\Gamma} \leqslant K_2 d_3\,\|\,\mathbf{v}^\cdot\,\|_{2,0}$$
$$K_1 = \operatorname*{vrai\,max}_{0\leqslant t\leqslant T}\|\,\mathbf{f}\,\|_{2,0}, \quad K_2 = \operatorname*{vrai\,max}_{0\leqslant t\leqslant T}\|\,\mathbf{F}\,\|_{2,\,1/2,\,\Gamma}$$
$$\|\,\mathbf{v}^\cdot\,\|_{2,\,-1/2,\,\Gamma} \leqslant d_3\,\|\,\mathbf{v}^\cdot\,\|_{2,0}$$

Последнее неравенство в (2.6) следует из теоремы о следах функций на многообразии [5]. Далее пусть

$$(2.7) \qquad \mathbf{U},\ \mathbf{U}^\cdot \in (W_p^{1-1/p}\,(\Gamma))^3, \quad \|\,\mathbf{U}\,\|_{p,\,1-1/p,\,\Gamma} \leqslant B_1, \quad \|\,\mathbf{U}^\cdot\,\|_{p,\,1-1/p,\,\Gamma} \leqslant B_2$$

$$(2.8) \qquad \mathbf{U}^{\cdot\cdot} \in (W_2^{-1/2}\,(\Gamma)), \quad \|\,\mathbf{U}^{\cdot\cdot}\,\|_{2,\,-1/2,\,\Gamma} \leqslant B_3, \quad \forall t \in [0,\ T]$$

Условия (2.7) совместно с неравенством (2.2) обеспечивают продолжения $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}^\cdot$ на все многообразие Γ и оценки

$$(2.9) \qquad \|\,\mathbf{u}_0\,\|_{p,\,1} \leqslant d_1 d_2 B_1, \quad \|\,\mathbf{u}_0^\cdot\,\|_{p,\,1} \leqslant d_1 d_2 B_2$$

Из условия (2.8) следует, что $\mathbf{u}_0^{\cdot\cdot} \in (L_2\,(\Omega))^3$ и

$$(2.10) \qquad \|\,\mathbf{u}_0^{\cdot\cdot}\,\|_{2,\,0} \leqslant d_4 B_3, \quad d_4 > 0$$

Теорема. Пусть однородная изотропная упругая среда занимает в естественном состоянии область Ω с гладкой границей Γ, потенциал упругих сил задается (1.1), внешние силы и перемещения на части границы удовлетворяют условиям (2.5), (2.7), (2.8), тогда для начальных условий (2.4) уравнение (2.3) имеет решение

$$(2.11) \qquad \mathbf{v}\,(\mathbf{x},\ t) \in L_\infty\,(0;\ T;\ V), \quad \mathbf{v}^\cdot\,(\mathbf{x},\ t) \in L_\infty\,(0,\ T;\ H)$$

Доказательство теоремы состоит из следующих основных этапов: построения приближенных решений по методу Галеркина, доказательства их ограниченности и доказательства того факта, что предельная функция удовлетворяет (2.3) и начальным условиям (2.4) [4].

Построение приближенных решений. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортогональный базис в H, удовлетворяющий условиям $\varphi_1\,(\mathbf{x}) = \mathbf{v}\,(\mathbf{x},\ 0)\,/\,\|\,\mathbf{v}\,(\mathbf{x},\ 0)\,\|_{p,\,1}$, $\|\,\varphi_k\|_{p,\,1} = 1$. Это возможно, так как пространство $W_p^1\,(\Omega)$ $(p > 2)$ вложено в $L_2(\Omega)$ и плотно в нем. Определим приближенное решение $\mathbf{v}^{(n)}(\mathbf{x}, t)$ как решение уравнения

$$(2.12)\qquad (\mathbf{v}^{\cdot\cdot(n)} + \nabla E[\mathbf{u}_0 + \mathbf{v}^{(n)}] - \mathbf{f}_0, \delta\mathbf{v}) - (\mathbf{F}, \delta\mathbf{v})_\Gamma = 0, \quad \forall\delta\mathbf{v} \in V^{(n)},$$

удовлетворяющее начальным условиям $\mathbf{v}^{(n)}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0)$, $\mathbf{v}^{\cdot(n)}(\mathbf{x}, 0) = P_n\mathbf{v}^{\cdot}(\mathbf{x}, 0)$, где P_n — проекционный оператор на $H^{(n)}$ в H. Пространства $V^{(n)}$ и $H^{(n)}$ — линейные оболочки векторов $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ с нормами W_p^1 и L_2 соответственно.

Используя представление

$$\mathbf{v}^{(n)}(\mathbf{x}, t) = \sum_{s=1}^n q_{sn}(t)\varphi_s(\mathbf{x})$$

и полагая в (2.12) $\delta\mathbf{v} = \varphi_r(\mathbf{x})$ $(r = 1, \ldots, n)$, получим систему $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений, эквивалентную (2.12)

$$(2.13)\qquad \dot q_{rn} = p_{rn}\|\varphi_r\|_{2,0}^{-1}, \quad \dot p_{rn} = \Phi_{rn}(q_{1n}, \ldots, q_{nt}, t), \quad r = 1, \ldots, n$$

$$\Phi_{rn} = \|\varphi_r\|_{2,0}^{-1}[(\mathbf{f}_0 - \nabla E[\mathbf{u}_0 + \mathbf{v}^{(n)}], \varphi_r) + (\mathbf{F}, \varphi_r)_\Gamma]$$

Оценим правые части уравнений (2.13) в нормах L_p и L_2 соответственно, используем неравенство (1.12) и придем к выводу, что для них выполняется условие Липшица с постоянной $Z(n, h) = \max(1, nL(h))(\min\limits_{1\leqslant r\leqslant n}\|\varphi_r\|_{2,0})^{-1}$, если $\|D(\mathbf{v}^{(n)\prime} + \mathbf{u}_0)\|_{p,0} < h$ и $\|D(\mathbf{v}^{(n)\prime\prime} + \mathbf{u}_0)\|_{p,0} < h$. Операция D означает взятие частных производных по всем переменным и вектор $D\mathbf{v}^{(n)} \in (L_p(\Omega))^9$. Согласно (2.9), эти условия будут выполнены, если

$$\mathbf{v}^{(n)\prime}, \ \mathbf{v}^{(n)\prime\prime} \in S_b = \{\mathbf{v}^{(n)}: \|\mathbf{v}^{(n)}\|_{p,1} < b = h - d_1d_2B_1\}$$

Правые части уравнений (2.13) с учетом следствия из теоремы 3 и неравенств (2.6), (2.9), (2.10) удовлетворяют неравенству

$$\Big(\sum_{r=1}^n p_{rn}^p\|\varphi_r\|_{2,0}^{-p}\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{r=1}^n \Phi_{rn}^2\Big)^{1/2} \leqslant M(n, h)$$

$$M(n, h) = (\min_{1\leqslant r\leqslant n}\|\varphi_r\|_{2,0})^{-1}[h - d_1d_2B_1 + n(N_1'h + N_2'h^{p-1}) + $$
$$+ n\max_{1\leqslant r\leqslant n}\|\varphi_r\|_{2,0}(K_1 + K_2 + d_4B_3)]$$

при условии, что

$$\|\mathbf{p}_n\|_{2,0} + \|\mathbf{v}^{(n)}\|_{p,1} < h - d_1d_2B_1$$

По теореме существования и единственности решений система (2.13) имеет единственное решение на интервале времени [6]

$$T_1^{(n)} = \min(Z^{-1}(n, h), (h - d_1d_2B_1 - a_1)M^{-1}(n, h))$$

$$a_1 = \|\mathbf{v}^{\cdot}(\mathbf{x}, 0)\|_{2,0} + \|\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0)\|_{p,1}$$

Заметим, что $T_1^{(n)} \to 0$ при $n \to \infty$.

Ограниченность решений. Заменим в (2.12) $\delta\mathbf{v}$ на $\mathbf{v}^{\cdot(n)}$ и проинтегрируем полученное равенство от нуля до t

$$(2.14)\qquad \frac{1}{2}\|\mathbf{v}^{\cdot(n)}\|_{2,0}^2 + E[\mathbf{u}_0 + \mathbf{v}^{(n)}] = L_1^{(n)} + \int_0^t[(\nabla E[\mathbf{u}_0 + \mathbf{v}^{(n)}], \mathbf{u}_0^{\cdot}) +$$

$$+(\mathbf{f}_0, \mathbf{v}^{\cdot(n)}) + (\mathbf{F}, \mathbf{v}^{\cdot(n)})_\Gamma]\, d\tau, \quad L_1^{(n)} = \frac{1}{2}\|\mathbf{v}^{\cdot(n)}(\mathbf{x}, 0)\|^2_{2,0} +$$
$$+ \mathrm{E}[\mathbf{u}_0(\mathbf{x}_0, 0) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0)] \leqslant \frac{1}{2}\|\mathbf{v}^{\cdot}(\mathbf{x}, 0)\|^2_{2,0} +$$
$$+ \mathrm{E}[\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, 0) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0)] = L_1$$

Оценивая правую часть (2.14) с помощью неравенств (2.6) — (2.10) и (1.11), придем к неравенству

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{v}^{\cdot(n)}\|^2_{2,0} + \mathrm{E}[\mathbf{u}_0 + \mathbf{v}^{(n)}] \leqslant L_2(t) + \int_0^t [A_1\|D(\mathbf{u}_0 + \mathbf{v}^{(n)})\|^q_{p,0} + \tag{2.15}$$
$$+ A_2\|D(\mathbf{u}_0 + \mathbf{v}^{(n)})\|^p_{p,0} + A_3\|\mathbf{v}^{\cdot(n)}\|^2_{2,0}]\, d\tau$$
$$A_1 = N_1 / q, \quad A_2 = N_2 / q, \quad A_3 = 1 + {}^1/_2 d_4{}^2$$
$$L_2(t) = L_1 + t\,[p^{-1}(d_1 d_2 B_2)^p + {}^1/_2(K_1{}^2 + K_2{}^2 + d_4{}^2 B_3{}^2)]$$

Рассмотрим два случая. Пусть $\|D(\mathbf{u}_0 + \mathbf{v}^{(n)})\|_{p,0} < N$, тогда по теореме 1 $0 \leqslant \mathrm{E}[\mathbf{u}_0 + \mathbf{v}^{(n)}] < L_3$ и (2.15) преобразуется в неравенство

$$\|\mathbf{v}^{\cdot(n)}\|^2_{2,0} \leqslant L_4 + 2A_3\int_0^t \|\mathbf{v}^{\cdot(n)}\|^2_{2,0}\, d\tau$$
$$L_4 = 2\,[L_2(T) + A_1 N^q T + A_2 N^p T]$$

На основании неравенства Гроноулла [3]

$$\|\mathbf{v}^{\cdot(n)}\|^2_{2,0} \leqslant L_4 \exp(2A_3 t) \tag{2.16}$$

В случае, когда $\|D(\mathbf{u}_0 + \mathbf{v}^{\cdot(n)})\|_{p,0} > N$, согласно теореме 2 (неравенство (1.8))

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{v}^{\cdot(n)}\|^2_{2,0} + c_2 z \leqslant L_2(T) + \int_0^t (A_1 z^{q/p} + A_2 z + A_3\|\mathbf{v}^{\cdot(n)}\|^2_{2,0})\, d\tau \tag{2.17}$$
$$z = \|D(\mathbf{u}_0 + \mathbf{v}^{(n)})\|^p_{p,0}$$

Поскольку $q/p < 1$, а $z > N^p$, то $z^{q/p} < A_4 z$. Если обозначить $\min({}^1/_2, c_2) = c_3$, $\max(A_1 A_4 + A_2, A_3) = A_5$, $\|\mathbf{v}^{\cdot(n)}\|^2_{2,0} + z = y$, то из (2.17) получим

$$c_2 y(t) \leqslant L_2(T) + A_5 \int_0^t y(\tau)\, d\tau$$

и согласно неравенству Гроноулла

$$y(t) \leqslant c_2{}^{-1} L_2(T) \exp(c_2{}^{-1} A_5 t) \tag{2.18}$$

Из ограниченности $\|\mathbf{v}^{\cdot(n)}\|_{2,0}$ следует ограниченность $\|\mathbf{v}^{(n)}\|_{2,0}$, так как [3]

$$\|\mathbf{v}^{(n)}\|^2_{2,0} \leqslant 2\|\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0)\|^2_{2,0} + c_4 \int_0^t \|\mathbf{v}^{\cdot(n)}\|^2_{2,0}\, d\tau \quad (c_4 > 0) \tag{2.19}$$

С другой стороны, на основании мультипликативного неравенства [5]

$$\|\mathbf{v}^{(n)}\|_{p,0} \leqslant c_5(\|\mathbf{v}^{(n)}\|_{2,0} + \|D\mathbf{v}^{(n)}\|_{p,0}) \quad (c_5 > 0) \tag{2.20}$$

Суммируя результаты (2.16), (2.18) — (2.20), приходим к выводу, что существуют такие $Q > 0$ и $\alpha > 0$ и справедлива оценка

$$\| \mathbf{v}^{\cdot(n)} \|_{2,0} + \| \mathbf{v}^{(n)} \|_{p,1} \leqslant Qe_{\alpha}{}^{t} \tag{2.21}$$

В неравенстве (2.21) постоянные Q и α не зависят от номера n.

Как было показано выше, решение системы (2.13) существует на отрезке времени $[0, T_1^{(n)}]$. Рассмотрим вопрос о продолжении решения на отрезок времени $[0, T]$. Если

$$a_2 \coloneqq \| \mathbf{v}^{\cdot(n)} (\mathbf{x}, T_1^{(n)}) \|_{2,0} + \| \mathbf{v}^{(n)} (\mathbf{x}, T_1^{(n)}) \|_{p,1} < h - d_1 d_2 B_1$$

то решение можно продолжить на отрезок $[T_1^{(n)}, T_2^{(n)}]$, где

$$T_2^{(n)} - T_1^{(n)} = \min (Z^{-1}(n, h), (h - d_1 d_2 B_1 - a_2) M^{-1}(n, h))$$

Процесс продолжения решения можно повторять до тех пор, пока $h - d_1 d_2 B_1 - a_k$ не станет отрицательным. Учитывая оценку роста (2.21), приходим к выводу, что решение будет существовать на отрезке времени $[0, T']$, где T' удовлетворяет равенству

$$h - d_1 d_2 B_1 - Q \exp (\alpha T') = 0$$

Выбирая h достаточно большим (этим выбирается область в фазовом пространстве системы), можно гарантировать существование решения на отрезке $[0, T]$ для любого номера n. Все решения $(\mathbf{v}^{\cdot(n)}, \mathbf{v}^{(n)})$ системы (2.13) ограничены в пространстве $L_\infty (0, T; H \times V)$.

Сходимость последовательных приближений. Воспользуемся свойством ограниченных последовательностей в функциональных пространствах: в рефлексивном банаховом пространстве из всякой ограниченной последовательности можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность [7]

$$(\mathbf{v}^{\cdot(n)}, \mathbf{v}^{(n)}) \to (\mathbf{v}^{\cdot}, \mathbf{v}) \text{ слабо в } L_\infty (0, T; H \times V)$$

Здесь n пробегает некоторую подпоследовательность натурального ряда.

Методом, аналогичным указанному в работе [4], показывается, что предельная функция удовлетворяет уравнению (2.3) и начальным условиям (2.4), а уравнение

$$\mathbf{v}^{\cdot\cdot} + \nabla \mathrm{E} [\mathbf{u}_0 + \mathbf{v}] \coloneqq \boldsymbol{\Phi}, \quad (\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\psi}) \coloneqq (\mathbf{f}_0, \boldsymbol{\psi}) + (\mathbf{F}, \boldsymbol{\psi})_\Gamma, \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in V$$

понимается в смысле распределений на отрезке $[0, T]$ со значениями в V' — пространстве, сопряженном к конфигурационному пространству V.

3. Единственность решений. Сформулируем две теоремы, устанавливающие единственность решений.

Теорема (стационарный случай). Пусть решение $\mathbf{v}$ уравнения (2.3) таково, что $\mathbf{u} \coloneqq \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}$ не зависит от времени, и функционал $\mathrm{E}[\mathbf{u}]$ выпуклый

$$\mathrm{E} [\mathbf{u} + \Delta \mathbf{v}] - \mathrm{E} [\mathbf{u}] - (\nabla \mathrm{E} [\mathbf{u}], \Delta \mathbf{v}) \geqslant \beta \| \Delta \mathbf{v} \|_{p,1}^2 \tag{3.1}$$

$$(\beta > 0, \ \| \Delta \mathbf{v} \|_{p,1} < h_1, \ h_1 > 0)$$

Тогда это решение единственно.

Замечание. Условие (3.1) можно заменить условием на вторую вариацию по Фреше функционала E [w]

(3.2) $$\| \mathbf{w} - \mathbf{u} \|_{p,1} < h_1 \; (h_1 > 0), \; (\nabla^2 E [\mathbf{w}] \Delta \mathbf{v}, \; \Delta \mathbf{v}) \geqslant 2\beta \, \| \Delta \mathbf{v} \|^2_{p,1}$$

Условия (3.1) и (3.2) являются условиями локальной выпуклости функционала E [u].

Доказательство теоремы аналогично указанному в работе [4].

Теорема (*динамический случай*). Если функционал E [u] удовлетворяет условию (3.1) и $\mathbf{v}^{\cdot} \in L_\infty (0, T; V)$, то решение $\mathbf{v} (\mathbf{x}, t)$ вариационного уравнения (2.3) единственно.

При доказательстве этой теоремы используется лемма: третий дифференциал по Фреше функционала E [u] удовлетворяет условию

(3.3) $$(\nabla^3 E [w] \, (z_1, \; z_2), \; z_3) \leqslant (D_1 + D_2 \, \| w \|^{p-3}_{p,0}) \; \| z_1 \|_{p,0} \, \| z_2 \|_{p,0} \times \times \| z_3 \|_{p,0}$$
$$w, \; z_i \in (L_p \, (\Omega))^9 \quad (i = 1, \; 2, \; 3)$$

где D_1, D_2 — положительные постоянные.

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 3 и теоремы 3.

Тогда при $w = D \, (\mathbf{u}_0 + \mathbf{v})$

$$(\nabla^3 E \, [w] (\Delta \mathbf{v}, \; \Delta \mathbf{v}), \; \mathbf{u}_0^{\cdot} + \mathbf{v}^{\cdot}) \leqslant M \, \| \Delta \mathbf{v} \|^2_{p,1} \quad (M > 0)$$

и дальнейшее доказательство теоремы проводится по схеме доказательства теоремы единственности в динамическом случае в работе [4].

Поступила 24 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. Гостехиздат, Л.— М., 1947.
2. *Eringen A. C.* Nonlinear theory of continuous media. New York, McGrow — Hill, 1962.
3. *Duvaut G., Lions J.-L.* Les inéquations en mécanique et en physique. Paris, Dunod, 1972.
4. *Вильке В. Г.* О существовании и единственности решений некоторых классов динамических задач нелинейной теории упругости, ПММ, 1979, т. 43, № 1.
5. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., «Наука», 1975.
6. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., «Наука», 1970.
7. *Иосида К.* Функциональный анализ, М., «Мир», 1967.