Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 4, 1980

УДК 532.584 : 537.24

ЭЛЕКТРИЗАЦИЯ СЛАБО ПРОВОДЯЩИХ ЧАСТИЦ СУСПЕНЗИИ ПРИ СОУДАРЕНИЯХ С ГРАНИЧНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Л. Т. Черный

(Москва)

Найдено изменение электрического заряда слабо проводящих частиц суспензии за счет их соударений со стенками при течении суспензии. Для плотности электрического тока в разреженных суспензиях, состоящих из непроводящего газа и заряженных слабо проводящих частиц, получено условие на непроницаемых граничных поверхностях.

1. Условие для плотности электрического тока на непроницаемых стенках. При изучении движения заряженных суспензий в рамках механики сплошной среды [1,2] возникает необходимость задавать граничное условие для плотности электрического тока. Рассмотрим вывод такого условия для разреженных суспензий, состоящих из непроводящего газа и заряженных частиц, проводимость которых достаточно мала (в указанном ниже смысле), но отлична от нуля.

Известно [3,4], что в результате соударения частиц суспензии с твердой стенкой их заряды могут изменяться. В частности, первоначально незаряженные частицы могут приобретать заряды, т. е. электризоваться. Зная величину изменения электрического заряда одной частицы Δe_p в результате соударения со стенкой, можно записать граничное условие для плотности электрического тока $\mathbf{j}$ в виде

$$(\mathbf{j}\boldsymbol{\nu}) = -\int g(\mathbf{v})\,\Delta e_p\,(\mathbf{v}\boldsymbol{\nu})\,d\mathbf{v} \tag{1.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\nu}$ — внешняя нормаль к стенке, являющейся граничной поверхностью, $\mathbf{v}$ — скорость частицы, $g(\mathbf{v})$ — функция распределения по скоростям частиц суспензии, падающих на стенку (для которых $(\mathbf{v}\,\boldsymbol{\nu}) < 0$). При отсутствии разброса по скоростям среди падающих на стенку частиц имеем $g(\mathbf{v}) = n^- \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}^-)$, где $n^-, \mathbf{v}^-$ — концентрация и скорость частиц в потоке, падающем на стенку. Если влиянием электрического поля на движение частиц суспензии можно пренебречь, то функция $g(\mathbf{v})$ находится из решения чисто механической задачи. Причем, когда среди частиц, падающих на стенку, отсутствует разброс по скоростям, для определения $g(\mathbf{v})$ достаточно найти величины n^- и $\mathbf{v}^-$.

Рассмотрим изменение электрического заряда одной частицы Δe_p при ударе о металлическую стенку. В этом случае обычно время контакта частицы со стенкой много больше времени релаксации потенциала последней. Следовательно, при вычислении Δe_p потенциал стенки можно считать постоянным (далее принимаем его за нуль).

2. Распределение электрического заряда и поля в частице перед ударом о стенку. Пусть проводимость частицы обусловлена наличием в ней N сортов носителей электрического заряда, которыми могут быть ионы или в случае полупроводниковых частиц электроны и дырки [5,6]. Концентрации носителей заряда будем предполагать достаточно малыми, так что их коэффициенты подвижности и диффузии связаны соотношением Эйнштейна [5,6], а для проводимости частицы σ справедливы формулы (используется гауссова система единиц)

$$(2.1) \qquad \sigma = \sum \frac{e_i^2 n_i^\circ D_i}{kT}, \quad \frac{\varepsilon_p D}{4\pi\sigma} \sim d^2 = \frac{\varepsilon_p kT}{4\pi \sum e_i^2 n_i^\circ}$$

Здесь e_i, D_i, n_i° — заряд, коэффициент диффузии и собственная концентрация носителей заряда сорта i в частице, D — характерное значение коэффициентов D_i, T — абсолютная температура, k — постоянная Больцмана, ε_p, d — диэлектрическая проницаемость и дебаевский радиус материала частицы.

Пусть $\mathbf{E}_0$ — напряженность электрического поля у стенки в отсутствие рассматриваемой частицы. В разреженных суспензиях обычно величина $\mathbf{E}_0$ совпадает с напряженностью электрического поля, вводимой путем осреднения по физически бесконечно малому объему, содержащему достаточно много частиц суспензии. Найдем концентрацию носителей заряда у поверхности сферической частицы, несущей суммарный электрический заряд e_p, непосредственно перед ударом о стенку при условии

$$(2.2) \qquad \frac{R}{v} \ll \frac{\varepsilon_p}{4\pi\sigma} \sim \frac{d^2}{D} \sim \tau_e, \quad \tau_e \ll \frac{l_E}{v}, \quad \tau_e \ll \tau_E, \quad d \ll R$$

Здесь v — абсолютная величина скорости подлетающей к стенке частицы, R — радиус частицы, l_E, τ_E — характерная длина и время изменения напряженности среднего электрического поля в суспензии.

Первое неравенство (2.2) означает, что время пребывания частицы вблизи стенки ($\sim R / v$) много меньше времени релаксации распределения электрического заряда в частице τ_e, и, следовательно, влиянием стенки на распределение носителей заряда в частице до удара можно пренебречь. Второе и третье неравенства (2.2) означают, что релаксация электрического заряда в частице происходит во много раз быстрее, чем изменение напряженности электрического поля, действующего на рассматриваемую частицу. Поэтому распределение носителей заряда в частице непосредственно перед ударом можно считать таким же, как в электростатической задаче о заряженной частице, находящейся в постоянном однородном внешнем электрическом поле напряженности $\mathbf{E}_0$ в отсутствие стенки.

Отметим, что на основании первого и второго условий (2.2) $l_E \gg v\tau_e \gg R$, и, следовательно, напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ на предшествующем контакту участке траектории частицы длиной порядка $v\tau_e \gg R$ мало отличается от $\mathbf{E}_0$ — напряженности электрического поля непосредственно у стенки в отсутствие частицы; для бесконечной плоской стенки $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$, если нет других тел. Четвертое неравенство (2.2) означает, что почти весь электрический заряд сосредоточен в тонком поверхностном слое толщины $\sim d$.

В этом случае, определяя концентрации носителей заряда на поверхности частицы n_{is}, можно положить $R = \infty$ и воспользоваться известными соотношениями для полупространства [5,6]

$$(2.3) \qquad n_{is} = n_i^\circ \exp\left(-\frac{e_i\psi(0)}{kT}\right)$$

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon_p}\sum e_i n_i^\circ \left[\exp\left(-\frac{e_i\psi}{kT}\right) - 1\right]$$

$$(2.4) \qquad \psi(\infty) = 0, \; -\varepsilon_p\psi'(0) = \varepsilon(\mathbf{E}_s'\boldsymbol{\nu}) \equiv \varepsilon E'$$

Здесь ε — диэлектрическая проницаемость несущей фазы, $\mathbf{E}_s'$ — напряженность электрического поля снаружи у поверхности частицы в упомянутой выше электростатической задаче о заряженной частице, находящейся в однородном внешнем электрическом поле напряженности $\mathbf{E}_0$, $\boldsymbol{\nu}$ — внутренняя нормаль к поверхности частицы. Значения векторов $\mathbf{E}_s'$ и $\boldsymbol{\nu}$ берутся, конечно, в той же точке на поверхности частицы, в которой вычисляется величина n_{is}. Функция $\psi(z)$, полностью определяющаяся вторым уравнением (2.3) и граничными условиями (2.4), может рассматриваться как распределение электрического потенциала в заполненном веществом частицы полупространстве ($z > 0$), у поверхности которого (при $z \leqslant 0$) напряженность электрического поля равна E' и направлена (при $E' > 0$) по оси z внутрь полупространства. Для сферической частицы при $d \ll R$ величина E', определенная указанным выше способом, легко находится по формуле для идеально проводящей частицы [7] (при тех же значениях R, e_p, $\mathbf{E}_0$) и связана с поверхностной плотностью заряда q на ней соотношением $4\pi q = -\varepsilon E'$. В частности, в точке касания частицей стенки

$$(2.5) \qquad E' = 3E_0 - e_p / (\varepsilon R^2)$$

Второе уравнение (2.3) имеет первый интеграл, который на основании первого условия (2.4) можно записать так:

$$(2.6) \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2 = \frac{4\pi}{\varepsilon_p}\sum e_i n_i^\circ \left[\frac{kT}{e_i}\left[\exp\left(-\frac{e_i\psi}{kT}\right) - 1\right] + \psi\right]$$

Соотношение (2.6) с учетом второго условия (2.4) позволяет найти значение $\psi(0)$ в зависимости от величины E', которая в точке касания частицы со стенкой элементарно выражается при помощи равенства (2.5) через E_0 и e_p. После этого первое равенство (2.3) определяет концентрацию носителей заряда в точке касания на поверхности частицы в зависимости от параметров E_0 и e_p.

Рассмотрим два примера.

Пример 1. Пусть частицы представляют собой полупроводник, обладающий электронной или дырочной примесной проводимостью (носители заряда — электроны или положительно заряженные дырки). Тогда зависимость $\psi(0)$ от E' выражается в неявной форме следующим образом:

$$(2.7) \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}E'\right)^2 = \frac{4\pi n^\circ kT}{\varepsilon_p}\left[\exp\left(\mp\frac{e\psi(0)}{kT}\right) - 1 \pm \frac{e\psi(0)}{kT}\right]$$

где e — заряд электрона ($e < 0$), n° — плотность дырок или электронов проводимости в частице при $e_p = E_0 = 0$; верхний знак соответствует электронной проводимости, а нижний — дырочной. При $|e\psi| \ll kT$ соотношение (2.7) легко разрешить относительно $\psi(0)$, если заменить экспоненту линейной функцией. В результате получаются следующие выражения для $\psi(0)$ и для концентраций электронов или дырок $n_{\mp s}$ на поверхности частицы:

$$\psi(0) = \frac{\varepsilon E'}{\varepsilon_p} \sqrt{\frac{\varepsilon_p kT}{4\pi e^2 n^\circ}}$$

$$n_{\mp s} = n^\circ \exp\left(\mp \frac{e\psi(0)}{kT}\right) \simeq n^\circ \left(1 \mp \frac{e\psi(0)}{kT}\right)$$

причем в точке касания величина E' определяется по формуле (2.5).

Пример 2. Пусть частица обладает бинарной ионной проводимостью (носители заряда — положительные и отрицательные ионы) и абсолютные величины зарядов ионов равны. Тогда зависимость между $\psi(0)$ и E' имеет следующий вид:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p} E'\right)^2 = \frac{4\pi n^\circ kT}{\varepsilon_p}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2, \quad \alpha \equiv \exp\frac{e\gamma\psi(0)}{2kT} \tag{2.8}$$

Здесь n° — концентрация положительных или отрицательных ионов при $ep = E_0 = 0$; γ — зарядовые числа положительных и отрицательных ионов. Разрешив равенство (2.8) относительно α, найдем выражение величины α через E'

$$\alpha = \sqrt{1 + A^2} + A, \quad A \equiv -{}^1\!/_4 \varepsilon E' (2\pi\varepsilon_p n^\circ kT)^{-1/2} \tag{2.9}$$

После этого концентрации отрицательных и положительных ионов ($n_{\mp s}$) на поверхности частицы определяются по формуле

$$n_{\mp s} = n^\circ \exp\left(\mp \frac{e\gamma\psi(0)}{kT}\right) = n^\circ \alpha^{\mp 2} = n^\circ (\sqrt{1 + A^2} \mp A)^2$$

причем на основании равенств (2.5), (2.9) в точке касания имеем

$$A = {}^1\!/_4 (2\pi\varepsilon_p n^\circ KT)^{-1/2} (e_p / R^2 - 3\varepsilon E_0)$$

Найдем проекцию на $\mathbf{v}$ напряженности электрического поля между частицей и стенкой E_w непосредственно перед началом столкновения, т. е. в точке касания частицы со стенкой. При этом, очевидно, вектор $\mathbf{v}$ совпадает с внешней нормалью к стенке. Величину E_w можно представить в виде суммы

$$E_w = 2(E' - E_0) + E_0 \tag{2.10}$$

Здесь $E' - E_0$ — проекция на $\mathbf{v}$ напряженности электрического поля, создаваемого частицей, электрический заряд в которой распределен так же, как в указанной выше электростатической задаче о частице, находящейся во внешнем поле $\mathbf{E}_0$ и несущей заряд e_p. Коэффициент 2 введен для учета электрического поля, создаваемого электростатическим изображением частицы относительно поверхности стенки, которую при изучении отдельных частиц можно считать плоской. Последнее слагаемое в (2.10) учитывает вклад в E_w внешнего по отношению к частице электрического поля с напряженностью $\mathbf{E}_0$. Используя теперь выражение (2.5) для E', запишем соотношение (2.10) в следующем виде:

$$E_w = 5E_0 - \frac{2e_p}{\varepsilon R^2} \tag{2.11}$$

Определим еще проекцию на $\mathbf{v}$ напряженности электрического поля внутри частицы в точке ее касания со стенкой E_s. Так как $\varepsilon_p E_s = \varepsilon E_w$, то на основании равенства (2.11) имеем

$$E_s = \frac{5\varepsilon}{\varepsilon_p} E_0 - \frac{2e_p}{\varepsilon_p R^2} \tag{2.12}$$

Проведенный расчет распределения электрического заряда и поля в частице носит приближенный характер и справедлив только при выполнении условий (2.2). В общем случае указанная задача должна рассматриваться в строгой постановке, приводящей к решению общих уравнений диффузии для концентраций носителей заряда и уравнений Максвелла для электрического поля.

3. Выражение для плотности тока электризации одной частицы. Предположим, что электризация частицы при соударении со стенкой происходит в результате взаимодействия с ней носителей заряда одного какого-то сорта r ($1 \leqslant r \leqslant N$). Это означает, что количество носителей заряда сорта r в частице за счет взаимодействия со стенкой может изменяться, а количество носителей заряда любого другого сорта $i \neq r$ остается постоянным.

В рассмотренных выше двух примерах такая ситуация соответствует случаям, когда: 1) стенка может обмениваться с частицей электронами (пример 1 при электронной проводимости); 2) стенка может поглощать из частицы или поставлять в нее положительные дырки (пример 1 при дырочной проводимости); 3) на стенке могут разряжаться (связываться) или, наоборот, рождаться ионы одного сорта (положительные или отрицательные, пример 2).

Пусть, кроме того, лимитирующей стадией процесса электризации частицы является диффузия носителей заряда сорта r. Тогда можно принять, что на поверхности контакта частицы со стенкой в течение всего времени соударения выполняются соотношения

$$n_r = n_w = \mathrm{const}; \quad -D_i \frac{\partial n_i}{\partial z} + \frac{e_i D_i n_i}{kT} E_z = 0, \quad i \neq r \tag{3.1}$$

Здесь n_i — концентрация носителей заряда сорта i; E_z — компонента вектора напряженности электрического поля $\mathbf{E}$. Декартова система координат xyz выбрана так, что ось z направлена по внешней нормали к стенке, а начало координат совпадает с точкой касания. Постоянная n_w может зависеть от величин T и E_s и представляет собой эффективную величину, которая вводится для учета физических свойств стенки. Поэтому граничное условие, определяемое первым равенством (3.1), носит, вообще говоря, приближенный характер. В строгой постановке необходимо рассматривать движение носителей заряда также в стенке, задавая условия на поверхности разрыва частица — стенка. В частном случае, когда носители заряда сорта r вступают на стенке в реакцию, скорость которой бесконечна, строго имеем $n_w = 0$.

Концентрации n_i и потенциал электрического поля φ удовлетворяют уравнениям электродиффузии и уравнению Пуассона

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div}\left(-D_i \nabla n_i + \frac{e_i D_i n_i}{kT}\mathbf{E}\right) = 0 \tag{3.2}$$

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi}{\varepsilon_p}\sum e_i (n_i - n_i^\circ), \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi$$

Здесь t — время, отсчитываемое от начала соударения частицы со стенкой.

Характер распределения концентраций n_i при $t \leqslant 0$ был установлен в предыдущем пункте. Это распределение является равновесным для уединенной частицы, находящейся во внешнем поле $\mathbf{E}_0$. Вблизи же стенки такое распределение, конечно, неравновесное. Поэтому оно будет изменяться в течение времени соударения τ, даже если количество носителей заряда любого сорта в частице за счет взаимодействия со стенкой не изменяется, и, следовательно, электризация отсутствует (в этом случае для всех значений i, включая $i = r$, справедливо второе равенство (3.1)). Однако указанным изменением n_i за время τ можно пренебречь, так как обычно $\tau \lesssim R / v$ [8], и на основании соотношений (2.2) имеем

$$(3.3) \qquad \tau \ll \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma} \sim \tau_e$$

Неравенство (3.3) означает, что время соударения много меньше времени релаксации электрического заряда в частице. Поэтому чисто электростатическое влияние стенки на распределение носителей заряда в частице в течение соударения мало.

Но концентрация n_r может еще изменяться в результате изменения числа носителей заряда сорта r при взаимодействии их со стенкой (в этом случае значение n_r на стенке задается первым равенством (3.1)). В дальнейшем будем рассматривать случай, когда к моменту окончания соударения заметное изменение концентрации n_r происходит только в расположенном внутри частицы (около контактной поверхности) пограничном слое, толщина которого δ удовлетворяет неравенствам

$$(3.4) \qquad \delta \ll d, \quad \delta \ll r_c$$

Здесь r_c — характерный размер площадки контакта при ударе частицы о стенку. Для r_c справедлива оценка $r_c^2 \sim Rv\tau$ [8]. Выражение для величины δ через параметры задачи будет дано ниже.

Очевидно, в рассматриваемой задаче об электризации частицы за счет изменения в ней количества носителей заряда сорта r, взаимодействующих со стенкой при ударе частицы о нее, характерные значения переменных x, y, z, t, n_i равны r_c, r_c, δ, τ, n_{is}. Поэтому введем безразмерные параметры, разделив величины

$$D_i,\ e_i,\ x,\ y,\ z,\ t,\ n_i,\ \varphi$$

на следующие их характерные значения:

$D \equiv D_r$, e_r, r_c, r_c, δ, τ, n_{is}, kT / e_r, где в качестве D выбрано значение коэффициента диффузии носителей заряда сорта r.

Записывая систему уравнений (3.2) в безразмерном виде и пренебрегая в ней членами порядка δ^2 / d^2, δ^2 / r_c^2, получим для определения концентрации n_r следующие уравнения (индекс r далее опускаем):

$$(3.5) \qquad \frac{\partial n^*}{\partial t^*} - \frac{D\tau}{\delta^2}\left(\frac{\partial^2 n^*}{\partial z^{*2}} + \frac{\partial \varphi^*}{\partial z^*}\frac{\partial n^*}{\partial z^*}\right) = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial z^{*2}} = 0$$

Здесь звездочка означает операцию обезразмеривания. Граничными условиями при $z^* \to \infty$ для системы (3.5) служат условия асимптотического сращивания значений концентрации n и напряженности электрического поля внутри пограничного слоя с независящими от времени значениями величин $n(z)$, $E_z(z)$ вне пограничного слоя при $z \to 0$ (обезразмеренными соответствующим образом). Последние совпадают с концентрацией n_s (E_0,

e_p) и напряженностью электрического поля E_s (E_0, e_p) в точке касания, которые были определены в предыдущем пункте равенствами (2.2) — (2.4) и (2.12). Поэтому имеем следующие условия в бесконечности:

$$n^* = 1, \quad -\partial\varphi^* / \partial z^* = e_r E_s \delta / (kT), \quad z^* \to \infty \tag{3.6}$$

Граничными условиями при $z^* = 0$ для системы (3.5) являются первое соотношение (3.1) и принятое в первом пункте условие равенства нулю потенциала стенки. В безразмерном виде эти условия на стенке имеют вид

$$n^* = n_w / n_s, \quad \varphi^* = 0, \quad z^* = 0 \tag{3.7}$$

Из установленного в предыдущем пункте характера распределения носителей заряда в частице непосредственно перед ударом следует, что при $t = 0$ заметное изменение концентрации n как функции координат происходит в приповерхностном слое частицы толщины d, причем характерные длины изменения величины n по нормали к поверхности частицы и вдоль ее поверхности равны d и R. Поэтому при

$$\delta \ll d, \quad r_c \ll R \tag{3.8}$$

значение концентрации n в момент времени $t = 0$ внутри пограничного слоя толщины $\sim\delta$ можно считать постоянным и равным найденному в предыдущем пункте значению n_s (E_0, e_p) в точке касания непосредственно перед ударом. Следовательно, пренебрегая членами $\sim\delta / d$, $\sim r_c / R$, начальные условия для системы (3.5) можно записать в виде

$$n^* = 1, \quad t^* = 0 \tag{3.9}$$

Отметим, что первое неравенство (3.8) вытекает из принятых условий (3.4), а второе неравенство (3.8) всегда выполняется, если частица испытывает при ударе малые деформации.

Из второго уравнения (3.5) и второго граничного условия (3.6) находим

$$\partial\varphi^* / \partial z^* = -e_r E_s \delta / (kT)$$

Подставляя это значение производной от φ^* в первое равенство (3.5) и возвращаясь к размерным переменным, получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + V\frac{\partial n}{\partial z} - D\frac{\partial^2 n}{\partial z^2} = 0, \quad V \equiv \frac{e_r D E_s}{kT} \tag{3.10}$$

Здесь V — проекция на ось z скорости упорядоченного движения носителей заряда сорта r под действием электрического поля. Начальные и граничные условия для уравнения (3.10) на основании равенств (3.6) — (3.9) имеют вид

$$n(0, z) = n_s, \quad n(t, \infty) = n_s, \quad n(t, 0) = n_w \tag{3.11}$$

Плотность электрического тока электризации i, текущего с контактной площадки в частицу, с учетом второго равенства (3.1) и граничного условия для концентрации n ($n \equiv n_r$) на стенке определяется по формуле

$$\begin{aligned} i(t) &= (-e_r D\, \partial n / \partial z + 2 e_r D n \varkappa E_s)_{z=0} = \\ &= -e_r D(\partial n / \partial z)_{z=0} + 2 e_r D n_w \varkappa E_s, \quad \varkappa = e_r E_s / (2kT) \end{aligned} \tag{3.12}$$

Найдем входящую в это равенство производную $\partial n / \partial z$, решая уравнение (3.10) с помощью преобразования Лапласа. Пусть $N(p, z)$ — изображение функции $n(t, z)$. Тогда из уравнения (3.10) и условий (3.11) следует, что функция $N(p, z)$ удовлетворяет соотношениям

$$pN - n_s + VdN / dz - Dd^2N / dz^2 = 0 \tag{3.13}$$

$$N(p, 0) = n_w / p, \quad N(p, \infty) = n_s / p$$

Решение задачи (3.13) имеет вид

$$N(p, z) = \frac{n_w - n_s}{p} \exp(-\lambda z) + \frac{n_s}{p}, \quad \lambda \equiv -\varkappa + \sqrt{\varkappa^2 + \frac{p}{D}}$$

Вычисляя производную $(dN / dz)_{z=0}$ и используя таблицы обратных преобразований Лапласа, найдем $(dn / dz)_{z=0}$ и из равенства (3.12) получим окончательную формулу для определения плотности тока

$$i(t) = e_r D \Big[\varkappa(n_w + n_s) + \tag{3.14}$$

$$+ \frac{n_w - n_s}{\sqrt{\pi D t}} \left(\exp(-D\varkappa^2 t) + \sqrt{\pi D \varkappa^2 t} \operatorname{erf} \sqrt{D\varkappa^2 t}\right)\Big]$$

Рассмотрим выражение для величины δ в зависимости от параметров задачи. Как отмечалось выше, при установлении контакта частицы со стенкой концентрация носителей заряда сорта r в результате их взаимодействия со стенкой изменяется на контактной поверхности на величину $n_w - n_s$. За счет процесса диффузии это возмущение распространяется внутрь частицы. Если электромагнитное поле в области контакта отсутствует ($E_s = 0$), то, очевидно, к моменту окончания соударения заметное возмущение концентрации n будет сосредоточено в нестационарном диффузионном пограничном слое толщины $\delta \sim \sqrt{D\tau}$ (напомним, что рассматривается случай, когда величина δ удовлетворяет неравенствам (3.4)).

Если $e_r E_s > 0$, то электрическое поле способствует распространению возмущения концентрации n с поверхности контакта внутрь частицы, так как оно действует на носители заряда сорта r с силой, направленной от стенки. Из уравнения (3.10) сразу следует, что в этом случае под действием только электрического поля возмущение концентрации n распространилось бы к моменту окончания соударения на расстояние $V\tau = e_r D E_s \tau / (kT)$. Поэтому для δ справедлива оценка

$$\delta \sim \max\left(e_r D E_s \tau / (kT), \sqrt{D\tau}\right), \quad e_r E_s > 0 \tag{3.15}$$

Если $e_r E_s < 0$, то электрическое поле препятствует распространению возмущения концентрации n с поверхности контакта внутрь частицы (так как действует на носители заряда сорта r с силой, направленной к стенке), и, следовательно, $\delta \lesssim \sqrt{D\tau}$. Кроме того, в этом случае из уравнения (3.10) следует, что даже при бесконечном времени соударения ($\tau = \infty$) заметное возмущение концентрации n при $t \to \infty$ будет сосредоточено в стационарном ($\partial n / \partial t = 0$) диффузионном пограничном слое. Его толщину δ_∞ можно определить, не решая уравнения (3.10), из условия, что за время τ', в течение которого носители заряда сорта r пройдут под действием силы электрического поля расстояние δ_∞, их среднеквадратичное смещение за счет диффузии как раз равно δ_∞^2, т. е.

$$\delta_\infty^2 = D\tau', \quad \tau' = \delta_\infty / |V|, \quad V = e_r D E_s / (kT)$$

Окончательная оценка для величины δ в этом случае, очевидно, имеет вид

$$\delta \sim \min(\delta_\infty = kT / |e_r E_s|, \sqrt{D\tau}), \quad e_r E_s < 0 \tag{3.16}$$

При $E_s = 0$ оценки (3.15) и (3.16), как и следовало ожидать, совпадают и дают $\delta \sim \sqrt{D\tau}$.

Полученное выражение (3.14) для $i(t)$ упрощается, если $|\varkappa|\sqrt{D\tau} \ll 1$ или $|\varkappa|\sqrt{D\tau} \gg 1$. Имеем

$$\frac{i(t)}{e_r D} = \begin{cases} (n_w - n_s)/\sqrt{\pi D t}, & |\varkappa|\sqrt{D\tau} \ll 1 \\ 2\varkappa n_w, & \varkappa\sqrt{D\tau} \gg 1 \\ 2\varkappa n_s, & -\varkappa\sqrt{D\tau} \gg 1 \end{cases} \tag{3.17}$$

4. Выражение для Δe_p. Очевидно, зная функцию $i(t)$, величину Δe_p можно найти по формулам

$$\Delta e_p = \int_{\Sigma_c} \Delta q(r)\, ds, \quad \Delta q(r) = \int_0^{\tau(r)} i(t)\, dt \tag{4.1}$$

Здесь Σ_c — часть поверхности частицы (и ее площадь), вступающая в контакт со стенкой при соударении, ds — элемент поверхности Σ_c, $\Delta q(r)\, ds$ — электрический заряд, приобретаемый частицей в результате контакта со стенкой по элементу поверхности ds в точке $r \in \Sigma_c$, $\tau(r)$ — время контакта в точке r. При выводе выражения (4.1) для Δe_p предполагается, что механический и электрический контакты между участками поверхности частицы и стенкой совпадают. Тем самым пренебрегается частичной нейтрализацией электрического заряда частицы в результате газового разряда, который может иметь место при отскоке частицы от стенки [9]. Это справедливо для частиц достаточно малых размеров, когда зажигание разряда затруднено [9]. Простейшим способом учесть газовый разряд можно, предположив, что его действие ограничивает напряженность электрического поля E_z между частицей и стенкой в момент разрушения контакта некоторой предельной величиной E_+. С учетом электрического поля, создаваемого зарядом, приобретаемым частицей в результате контакта со стенкой, напряженность электрического поля E_z находится по формуле

$$E_z = E_w - 4\pi\varepsilon^{-1}\Delta q \tag{4.2}$$

где величина E_w определена равенством (2.11). Тогда формулы (4.1) справедливы при $|E_z| \leqslant E_+$. Если же их применение при вычислении E_z приводит к неравенству $|E_z| > E_+$, то надо заменить E_z на $(\operatorname{sign} E_z) E_+$, после чего величина Δq элементарно находится из соотношения (4.2).

Входящие в выражение для Δe_p параметры соударения Σ_c, $\tau(r)$ зависят от скорости подлета частицы к стенке v. Для нормального упругого удара сферической частицы их можно определить по формулам [8]

$$\Sigma_c = \pi R h, \quad h = R\left[\frac{5\pi\rho v^2}{4}\left(\frac{1-\nu_p^2}{E_p^Y} + \frac{1-\nu_w^2}{E_w^Y}\right)\right]^{2/5} \tag{4.3}$$

$$\tau(r) = \tau\left(1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{r^2}{Rh}\right), \quad \tau = \frac{3h}{v}$$

Здесь ρ — плотность массы частицы, ν_p, E_p^Y (ν_w, E_w^Y) — коэффициент Пуассона и модуль Юнга для частицы (стенки), r — расстояние от центра контактной площадки до точки $r \in \Sigma_c$. В результате величина Δe_p зависит от скорости подлета частицы к стенке. Как видно из полученных выше выражений для Δe_p, $i\,(t)$, эта зависимость может быть достаточно сложной. Скорость же подлета частиц к стенке (v) определяется течением суспензии в целом. Вычисление скорости v представляет собой задачу, которая во многих случаях может быть решена независимо от задачи об электризации частиц. Зная скорость подлета частиц к стенкам и используя полученные выше формулы для Δe_p, а также соотношение (1.1), легко найти величину электрического тока электризации на границах.

Рассмотрим в качестве примера электризацию аэрозольных частиц льда (град, снег) при столкновении с поверхностью металлического тела, движущегося в облаках или осадках. Для частиц чистого льда, обладающих бинарной ионной проводимостью, имеем $\varepsilon_p = 72$, $e = \pm 1.6 \cdot 10^{-19}$ к, $d = 10^{-6}$ м, $\sigma = 4 \cdot 10^{-7}$ Ом$^{-1}\cdot$м$^{-1}$, $\tau_e = \varepsilon_p/(4\pi\sigma) = 1.6 \cdot 10^{-3}$ с, $D \simeq 4\pi\sigma d^2 / \varepsilon_p = 6 \cdot 10^{-10}$ м^2 / с, $n^\circ \simeq \varepsilon_p kT / (8\pi e^2 d^2) = 4 \cdot 10^{19}$ м$^{-3}$, $E_p^Y = 3 \cdot 10^9$ Н / м^2, $\nu_p = 0.3$.

При упругом ударе аэрозольной частицы льда о поверхность металлического тела получаем на основании (4.3) следующие значения основных характеристик соударения (для $R = 10^{-4}$ м, $v = 10$ м / с): $R / v = 10^{-5}$ с, $\tau = 9 \cdot 10^{-7}$ с, $h = 3 \cdot 10^{-6}$ м, $r_c = \sqrt{Rh} = 1.7 \cdot 10^{-5}$ м, $\Sigma_c = 9 \cdot 10^{-10}$ м^2, $\sqrt{D\tau} = 2 \cdot 10^{-6}$ с. Используя их, легко проверить, что в рассматриваемом случае неравенства (2.2), (3.4), (3.8) действительно удовлетворяются, если $l_E \gg 10^{-2}$ м, $\tau_E \gg 10^{-3}$ с и $\delta \sim \sqrt{D\tau}$. Эти соотношения выполнены, так как обычно длина l_E имеет порядок радиуса кривизны поверхности тела (~ 1 м), а время $\tau_E \sim l_E / v \sim 10^{-1}$ с. Кроме того, для приведенных значений основных параметров имеем $|\, eE_s \,| \sqrt{D\tau} / (2kT) \ll 1$, даже если напряженность электрического поля достигает пробойного значения 10^6 В/м. Поэтому из соотношений (3.15), (3.16) следует, что $\delta \sim \sqrt{D\tau}$. Подставляя в интегралы (4.1) первое значение (3.17) дял $i\,(t)$ (так как $|\,\varkappa\,| \sqrt{D\tau} \equiv |\, eE_s| \sqrt{D\tau} / (2kT) \ll 1$) и проводя интегрирование с учетом равенств (4.3), получим

$$\Delta e_p = \frac{2C\,(\pi/2)}{\sqrt{\pi}}\, e\,(n_w - n_s)\, \Sigma_c \sqrt{D\tau} \tag{4.4}$$

Здесь $C\,(\pi / 2) = 0.78$ — значение интеграла Френеля, а величина n_s была определена в п. 2 (пример 2). Если электрическое поле у поверхности тела отсутствует и аэрозольные частицы не заряжены, то $n_s = n^\circ$. Тогда для найденных значений n°, Σ_c, $\sqrt{D\tau}$ при $n_w = 0$, $e > 0$ имеем $\Delta e_p = -10^{-16}$ к. В результате электризации аэрозольных частиц заряд металлического тела и напряженность электрического поля у его поверхности будут возрастать, что приведет к уменьшению концентрации n_s по сравнению с n° и некоторому снижению плотности электрического тока j, текущего на тело. Используя выражение (1.1), можно оценить порядок j. Например, при скорости тела 100 м/с в кучево-дождевых облаках, для которых концентрация аэрозольных частиц $n^- = 10^8$ м$^{-3}$, а их радиус $R = 10^{-4}$ м, получим $j \simeq -\Delta e_p n^- v^- = 10^{-6}$ А/м^2. Такие токи действительно наблюдаются при полетах в облаках и осадках [10].

Автор благодарит Л. И. Седова и В. В. Гогосова за полезное обсуждение работы.

Поступила 6 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1973.
2. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. М., «Наука», 1978.
3. *Soo S. L.* Dynamics of charged suspensions. In: Intern. reviews in aerosol physics and chemistry. Vol. 2. Oxford — New York, Pergamon Press, 1971. (Рус. перев.: М., «Мир», 1975).
4. *Cheng L., Soo S. L.* Charging of dust particles by impact. J. Appl. Phys., 1970, vol. 41, No. 2. (Рус. перев.: Сб. перев. Механика, 1971, № 3).
5. Физика электролитов. Процессы переноса в твердых электролитах и электродах. Ред. Дж. Хладник. М., «Мир», 1978.
6. *Бонч-Бруевич В. Л., Калашников С. Г.* Физика полупроводников. М., «Наука», 1977.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
8. *Гольдсмит В.* Удар. М., Стройиздат, 1965.
9. *Попов Б. Г.* Электроперенос в двухфазных (газ — твердые частицы) потоках. Инж.-физ. ж., 1978, т. 34, № 1.
10. *Имянитов И. М.* Электризация самолетов в облаках и осадках. Л., Гидрометеоиздат, 1970.