

ОБТЕКАНИЕ ПРОВОДЯЩЕЙ СФЕРЫ ЭЛЕКТРОГАЗОДИНАМИЧЕСКИМ ПОТОКОМ

О. К. Варенцов

(Москва)

Решена задача об обтекании электрогазодинамическим потоком проводящей сферы, моделирующей электростатический зонд. Построены вольт-амперные характеристики зонда и сопоставлены с результатами приближенных теорий. Определено возмущение, вносимое зондом, и связанные с ним погрешности измерений. При проведении численного анализа предполагается, что проводящая сфера конечного диаметра помещена в пространство между двумя сетками-электродами, из которых одна моделирует срез источника заряженных частиц. Диффузия и инерционность частиц не учитываются, гидродинамическое поле скоростей считается потенциальным.

Приближенная теория электростатического зонда была предложена в [1,2] без учета возмущения зондом объемного электрического заряда, в предположении однородности внешнего электрического поля и равенства нулю скорости потока газа, в пренебрежении диффузией и инерцией заряженных частиц. При тех же предположениях, но при отличной от нуля скорости газа, рассмотрена задача об обтекании зонда цилиндрической формы электрогазодинамическим потоком и даны приближенные оценки влияния сжимаемости газа на показания зонда [3]. Изучена ситуация, когда присутствие в потоке зонда специальной формы не возмущает линий электрического тока [4]. В работе [5] при проведении экспериментальных исследований использовалась наиболее простая теория, не учитывающая влияние объемного электрического заряда вблизи зонда и эффекты его поляризации.

Для определения границ применимости приближенных теорий необходимо решить более полную задачу об обтекании зонда потоком с электрически заряженными частицами. Такое решение представляется ниже.

1. Постановка задачи. Метод решения. Рассмотрим проводящую сферу радиуса a° , помещенную между двумя параллельными бесконечными сетками-электродами. Цилиндрическая система координат выбрана таким образом, что ось Ox° перпендикулярна плоскостям электродов, уравнения которых $x^\circ = 0$ и $x^\circ = L$, и проходит через центр сферы $x^\circ = x_0^\circ$, $y^\circ = 0$.

Будем считать, что сетки заземлены: $\varphi^\circ(0, y^\circ) = \varphi^\circ(L, y^\circ) = 0$, а потенциал сферы φ_s° может регулироваться внешним источником напряжения. Предполагается, что сетки прозрачны для газа и влиянием всех токоподводящих цепей на распределение электрических и гидродинамических величин в межэлектродном промежутке можно пренебречь. Параметр электрогазодинамического взаимодействия считается малым, и поэтому распределение газодинамических параметров в окружающем сферу пространстве находится из обычных газодинамических уравнений. Пред-

полагается, что жидкость несжимаемая, ее вязкость несущественна, на бесконечности поток однороден и имеет скорость U_0 , параллельную оси Ox . Поле скоростей в окружающую сферу пространстве при этих условиях потенциально.

Электрод $x^\circ = 0$ можно рассматривать как срез источника заряженных частиц. Предполагается, что источник работает таким образом, что вблизи электрода $x^\circ = 0$ поддерживается постоянная плотность объемного электрического заряда: $q^\circ(0, y^\circ) = q_*$. Заряженные частицы выносятся с эмиттера потоком жидкости и движутся к электроду-коллектору. Будем считать, что их инерцией можно пренебречь (например, в случае, когда заряженными частицами являются ионы), а электрическое число Пекле велико, и поэтому диффузия частиц несущественна. Закон Ома для заряженной компоненты имеет вид $j^\circ = q^\circ(v^\circ - b\nabla\varphi^\circ)$, где подвижность частиц b предполагается постоянной.

При сделанных предположениях распределение потенциала φ и объемного заряда q в межэлектродном промежутке описывается в безразмерных переменных

$$\varphi = \frac{b}{U_0 L} \varphi^\circ, \quad q = \frac{4\pi b L}{\varepsilon U_0} q^\circ, \quad x = \frac{x^\circ}{L}, \quad y = \frac{y^\circ}{L}, \quad v = \frac{v^\circ}{U_0}$$

следующей системой уравнений с граничными условиями:

$$(1.1) \quad \Delta\varphi = -q, \quad (v - \nabla\varphi)\nabla q + q^2 = 0 \\ x = 0, \quad \varphi = 0, \quad q = \beta; \quad x = 1, \quad \varphi = 0$$

$$(1.2) \quad (x - x_0)^2 + y^2 = a^2, \quad \varphi = \varphi_s; \quad y = \infty, \quad \partial\varphi / \partial y = 0,$$

$$(1.3) \quad \beta = \frac{4\pi b L}{\varepsilon U_0} q_*, \quad \varphi_s = \frac{\varphi_s^\circ b}{U_0 L}, \quad a = \frac{a^\circ}{L}, \quad x_0 = \frac{x_0^\circ}{L}$$

где v° — известное распределение скорости при потенциальном обтекании шара.

Решения, полученные ранее [3], соответствовали упрощенной задаче $\Delta\varphi = 0$, $(v - \nabla\varphi)\nabla q = 0$; $q = q_\infty = \text{const}$, $E = E_\infty = \text{const}$ при $r \rightarrow \infty$. Таким образом, в работах [2-5] не учитывалось влияние q на распределение потенциала, электрический заряд в области, занятой траекториями частиц, предполагался однородным, не принималось во внимание изменение электрических параметров вдали от сферы.

Сформулированная задача характеризуется четырьмя безразмерными параметрами (1.3). Потенциал φ_0 и плотность заряда q_0 в точке x_0 при отсутствии сферы в потоке определяются из решения одномерной задачи электрогазодинамики [6]

$$\varphi'' = -q, \quad (1 - \varphi')q' = -q^2, \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0, \quad q(0) = \beta$$

Именно величины q_0 и φ_0 должен регистрировать «идеальный» зонд.

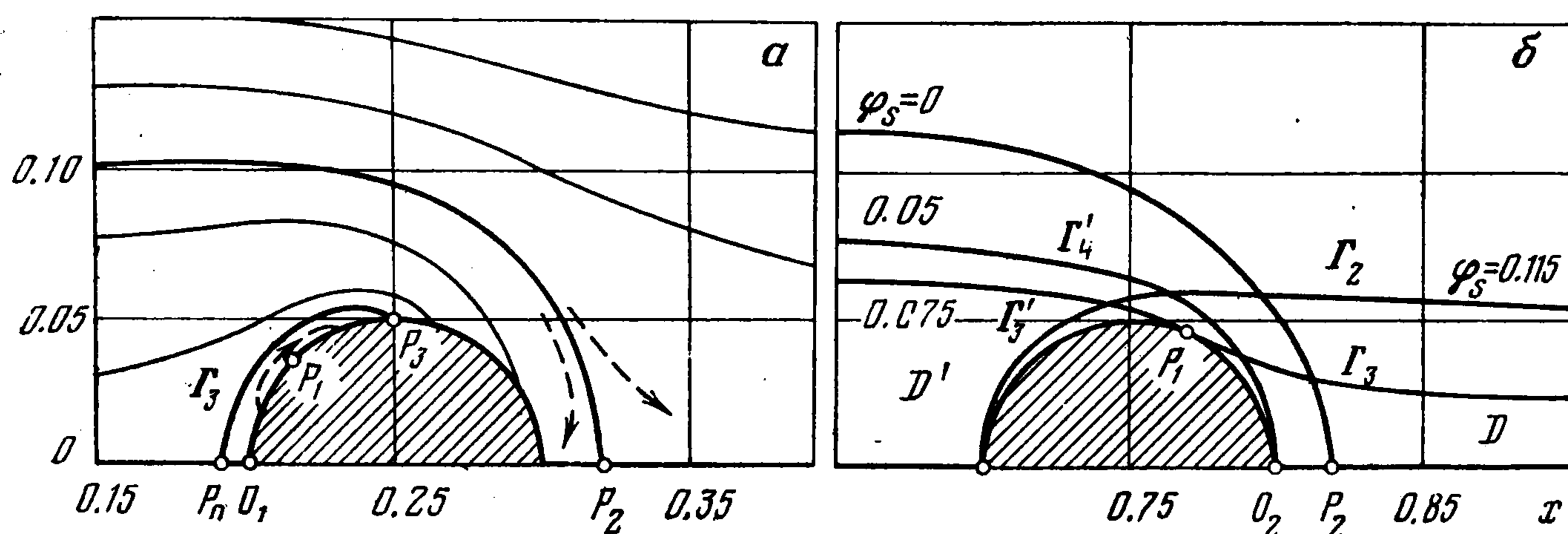
Систему (1.1) интегрировали численно с прямоугольной сеткой, неравномерной вблизи сферы. Уравнение Пуассона интегрировали методом Зейделя, уравнение для заряда — методом характеристик; решение системы (1.1) находили в результате процесса последовательных приближений [7].

В ряде расчетов с последовательным уменьшением размеров сферы одновременно проводили сокращение расчетной области. Для этого из расчета при $a = a_1$ определя-

ли область D° , возмущения одномерного электрогазодинамического потока в которой с точностью численного метода равны нулю. Так как при уменьшении радиуса сферы возмущения электрогазодинамического потока убывают, решение при $a_2 < a_1$ в области D° также будет совпадать (с той же точностью) с одномерным решением. Это дает возможность исключить область D° из рассмотрения.

Точность, контролируемая по сохранению полного тока через сечения $x = \text{const}$, была не хуже 3%. Кроме того, при уменьшении радиуса a расчетное значение отношения тока на заземленную сферу к ее радиусу I_s / a стремится к $I_{s0} / a = 4\pi q_0 \Phi_0$ — значению, даваемому теорией Сато, т. е. расчетный предел совпадал с известным аналитическим пределом.

2. Картина течения. С помощью простых соображений [2, 5] можно показать, что в зависимости от потенциала зонда φ_s реализуются различные режимы, когда заряженные частицы приходят на всю поверхность зонда, только на часть ее или совсем не попадают на зонд. В последнем случае



Фиг. 1

зонд окружен областью D , не содержащей заряженных частиц. Эта область может быть либо замкнутой, либо иметь бесконечную протяженность [3]. При $\varphi_s < \varphi_f$ (φ_f — минимальное значение потенциала, при котором не происходит захвата зондом частиц, — «плавающий» потенциал) область D примыкает только к некоторой части поверхности зонда и сокращается до нуля при уменьшении потенциала φ_s в интервале (φ_*, φ_f) . На основе численного решения задачи (1.1), (1.2) были проанализированы все указанные режимы: режим запирания 1 ($\varphi_s > \varphi_f$), режим плавающего потенциала 2 ($\varphi_s = \varphi_f$), переходные режимы 3 ($\varphi_* < \varphi_s < \varphi_f$) и, наконец, режим 4 полного отбора частиц, реализующийся при $\varphi_s \leq \varphi_*$.

В качестве примера на фиг. 1, а показаны линии тока около сферы радиуса $a = 0.05$, помещенной в точку с координатой $x_0 = 0.25$. Степень насыщения потока равна $\beta = 4$, сфера имеет потенциал $\varphi_s = 0.09$. Между кривой Γ_3 и поверхностью сферы заключена зона, в которую заряженные частицы не попадают. Эта зона заполнена характеристиками второго уравнения (1.1), которые начинаются на участке поверхности сферы O_1P_1 и заканчиваются на участке P_1P_3 , где точка P_1 определена условием $d\varphi / dn = 0$. Фигура 1, б иллюстрирует случай, когда протяженность вниз по потоку области без заряда ограничена только электродом-коллектором. Разные положения границы Γ_i области D соответствуют различным

значениям потенциала сферы. В режиме 2 ($\varphi_s = \varphi_f = 0.115$) граница Γ_2 касается сферы в передней критической точке. В режиме 3 ($\varphi_s = 0.075$) кривая Γ_3' , являющаяся продолжением вверх по потоку границы Γ_3 зоны без заряда D , ограничивает область D' , из которой все частицы захватываются сферой. При $\varphi_s = \varphi_* = 0.05$ зона без заряда вырождается в отрезок O_2x , а кривая Γ_4' касается сферы в задней критической точке.

Отметим, что значения потенциала φ_{f0} и φ_{*0} , соответствующие модели [3], не совпадают с расчетными величинами φ_f и φ_* . Наличие неоднородности электрического поля в потоке и учет возмущения сферой объемного электрического заряда приводят к изменению характерных значений потенциала. В случае, показанном на фиг. 1, б, плавающий потенциал меньше значения $\varphi_{f0} = 0.133$ вследствие уменьшения E_x вверх по потоку. Отличие φ_* от $\varphi_{*0} = 0.053$ вызвано влиянием заземленного коллектора и отсутствием заряда в области D ; оба фактора затрудняют переход к режиму полного отбора.

Рассмотрим распределение заряда в межэлектродном промежутке. Для нахождения q на линии Γ и на оси течения за сферой необходимо определить изменение q в окрестности точек P_0 и P_2 (фиг. 1), в которых скорость частиц обращается в нуль.

Точки P_0 и P_2 аналогичны, поэтому достаточно рассмотреть лишь точку P_2 .

Разложим E_y и v_y в окрестности точки P_2 по координате y , учитывая непрерывность и ограниченность величин $\partial E_x / \partial x$ и q в этой точке. Имеем

$$(2.1) \quad E_y = -\alpha_1 y + O(y^2), \quad v_y = -\alpha_2 y + O(y^2), \quad \alpha_1 = (\partial E_x / \partial x - q)_{P_2}$$

где α_2 находится с помощью известного выражения для скорости потенциального обтекания шара.

Рассмотрим характеристики второго уравнения (1.1). Уравнение характеристик и соотношение вдоль них имеют вид

$$(2.2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v_y + E_y}{v_x + E_x}, \quad \frac{dq}{q^2} = -\frac{dy}{v_y + E_y}$$

После интегрирования (2.2) с учетом (2.1) получаем закон изменения q вдоль характеристики в окрестности точки P_2

$$(2.3) \quad q = \left(C - \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} \ln y \right)^{-1}, \quad C = \text{const}$$

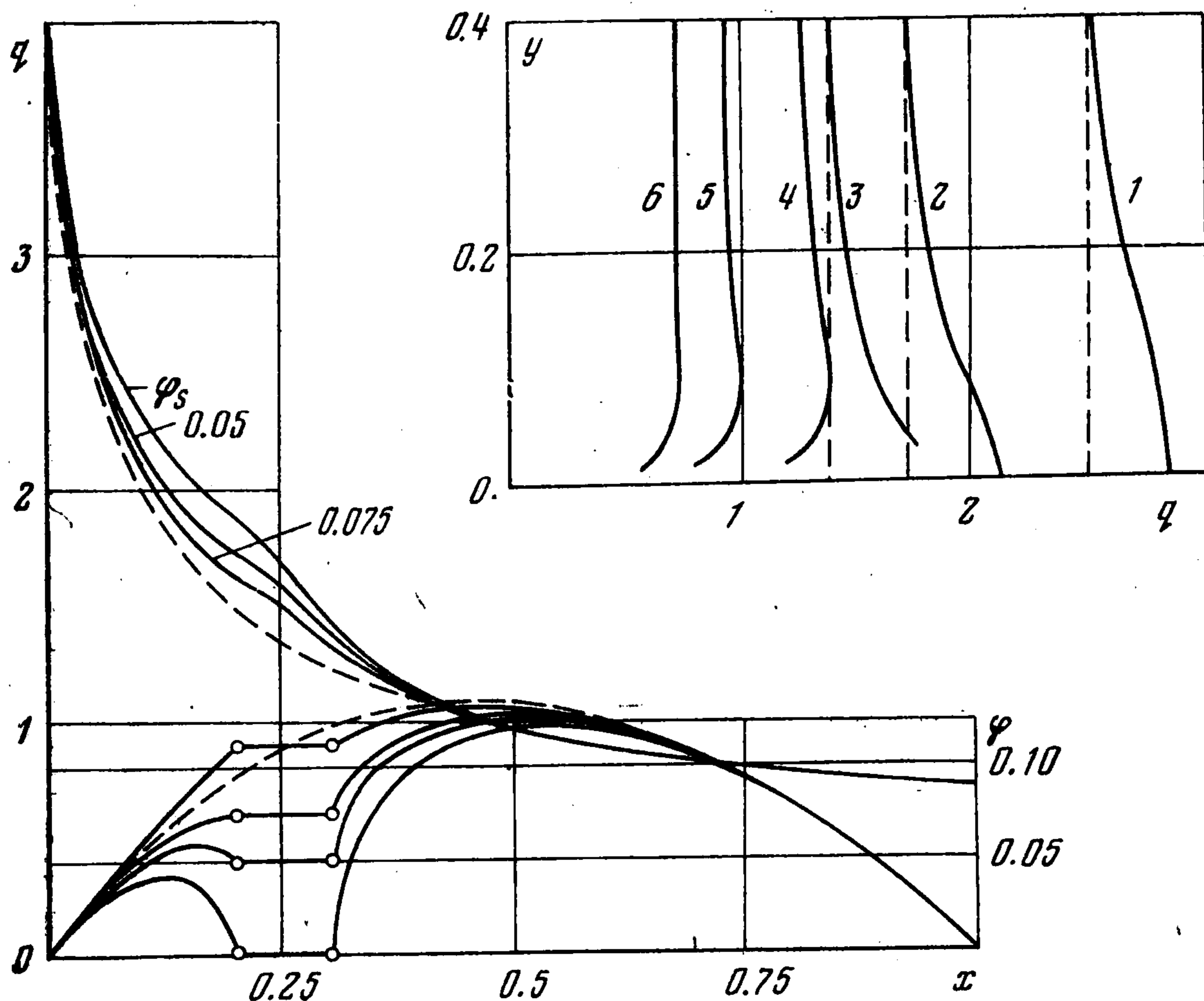
Из (2.3) вытекает, что в окрестности точки P_2 величина q мала и $(q)_{P_2} = 0$, $\alpha_1 = (\partial E_x / \partial x)_{P_2}$. Видно также, что P_2 — особая точка типа «седло».

Как следует из (2.2), вдоль линий тока заряженной компоненты величина q всегда убывает, либо равна нулю. Таким образом, на границах Γ_1 и Γ_2 в режимах плавающего потенциала и запирания, а также на оси за сферой в любом режиме имеем $q = 0$. Следовательно, граница Γ — линия разрыва q только в переходном режиме, когда в потоке отсутствуют точки P_0 и P_2 .

Численные расчеты показывают, что в режиме 4 распределение q в нижней по потоку от сферы области возмущается (по сравнению с одно-

мерным течением в отсутствие сферы) только в узкой (порядка диаметра сферы) зоне, примыкающей к оси течения. В верхней по потоку от сферы области возмущение заряда происходит в более широкой зоне, достигая максимума на оси потока и убывая до нуля при $y \rightarrow \infty$.

На фиг. 2 показано радиальное распределение q в сечениях $x = 0.05; 0.15; 0.25; 0.30; 0.55; 0.95$ (кривые 1—6 соответственно) потока, обтекающего заземленную сферу радиуса $a = 0.05$ с центром в точке $x_0 = 0.25$; степень насыщения потока $\beta = 4$. Показаны также продольные распределения q и φ при тех же значениях определяющих параметров. Штриховые кривые соответствуют невозмущенным одномерным распределениям $q_0(x)$ и $\varphi_0(x)$.



Фиг. 2

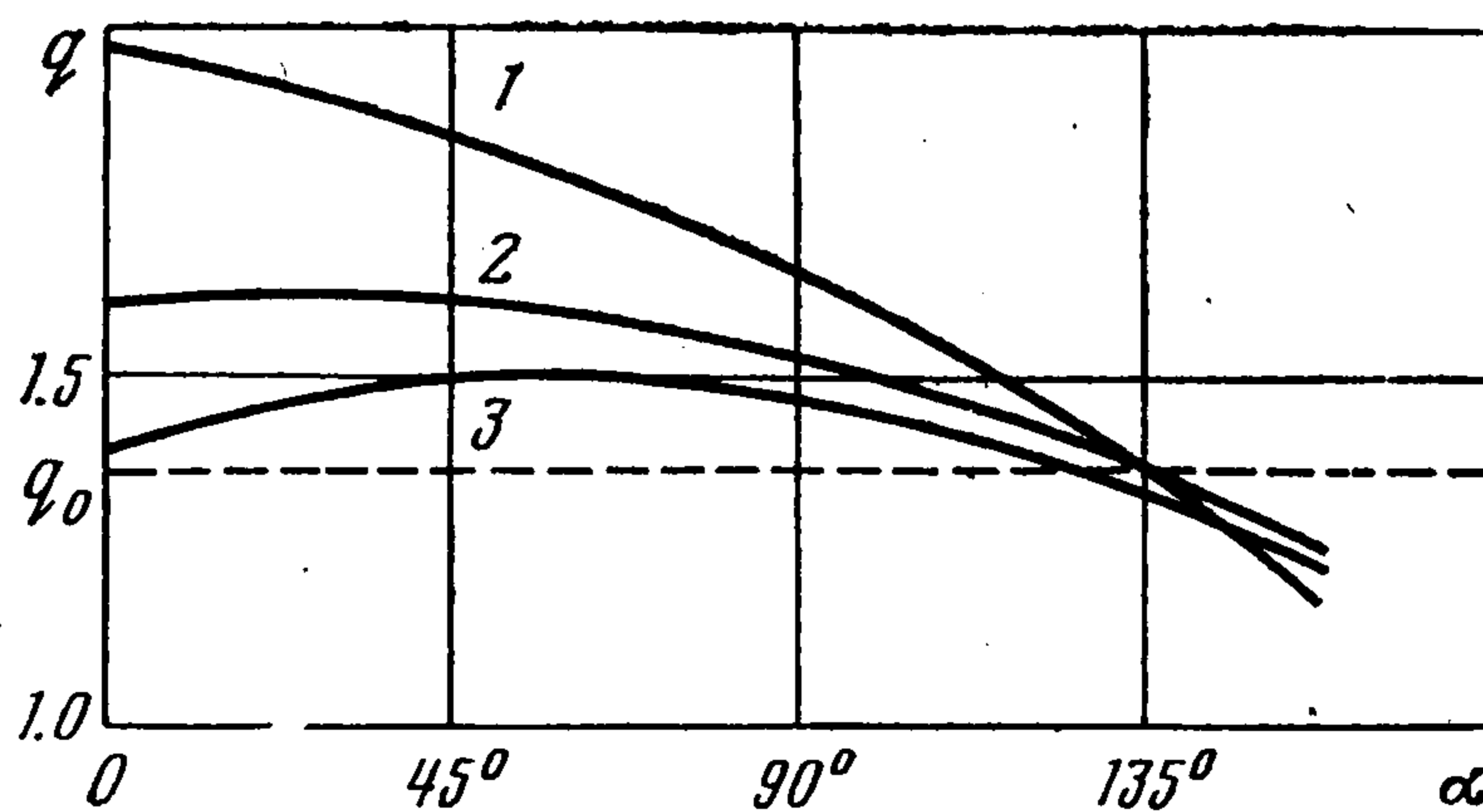
Такое изменение объемного заряда в окрестности сферы приводит к неравномерному распределению q по ее поверхности. При этом в окрестности задней критической точки заряд q всегда меньше невозмущенного значения q_0 вследствие большой протяженности приходящих сюда линий тока и малой скорости v_i зарядов ($v_i = v + E$) вблизи точек разворота этих линий. При уменьшении потенциала сферы скорость v_i приходящих на нее частиц возрастает, что приводит, согласно (2.3), к увеличению q и к усилению неравномерности распределения объемного заряда по поверхности сферы.

На фиг. 3 показано распределение q вдоль поверхности сферы, причем угол α отсчитывается от передней критической точки. Кривая 1 соответствует примеру фиг. 2, для кривых 2 и 3 $\varphi_s = 0.05$ и 0.075 соответственно.

Возмущение заряда q существенно зависит от расположения сферы в межэлектродном промежутке. Проведенные расчеты показали, что за-

земленная сфера, помещенная вблизи коллектора $x = 1$, практически не искажает распределение объемной плотности заряда.

Например, при $\beta = 4$, $\varphi_s = 0$, $x_0 = 0.75$, $a = 0.05$ относительное возмущение заряда не превосходит 2%. Исключение составляет лишь узкая приосевая зона в нижней по потоку от сферы области, где происходит резкое уменьшение заряда q до нуля. Возмущения q сильно возрастают при приближении сферы к эмиттеру. Так, при $x_0 = 0.50$ и 0.25 и фиксированных значениях остальных параметров относительное возмущение q вблизи сферы составляет ~ 10 и 24% соответственно.



Фиг. 3

Увеличение возмущающего влияния сферы на электрические параметры при ее приближении к эмиттеру объясняется тем, что скорость заряженных частиц $v_x + E_x$ вблизи последнего мала за счет большого тормозящего поля E_x , поэтому малые изменения электрического поля приводят к сильным возмущениям плотности заряженных частиц.

Увеличение степени насыщения потока электрическим зарядом сопровождается усилением на эмиттере тормозящего поля и соответствующим падением «стартовой» скорости частиц до нуля [6]. Это приводит к возрастанию возмущения плотности объемного заряда при увеличении параметра β .

В случае, когда источник работает в режиме насыщения ($\beta = \infty$), можно оценить увеличение объемной плотности заряда. Воспользуемся тем, что при $\beta = \infty$ на эмиттере выполняется условие $E_x = -1$, т. е. суммарная поверхностная плотность заряда, наведенного на эмиттере заряженной сферой и добавочным объемным зарядом $\Delta q_s = q(x, y) - q_0(x)$, равна нулю в любой точке эмиттера. При вычислении наведенного заряда сферу заменим точечным зарядом $Q_s = -a(\varphi_0 - \varphi_s)$. Кроме того, учитывая, что в нижней по потоку от сферы области возмущение q мало, будем считать, что в интервале $(x_0, 1]$ $\Delta q(x, y) \equiv 0$. В результате получим оценку

$$(2.4) \quad \Delta q_s = 2a(\varphi_0 - \varphi_s)x_0^{-3}$$

где Δq_s — некоторое среднее значение добавочного заряда в окрестности сферы. Полученная оценка удовлетворительно совпадает с результатами численных расчетов при $\beta \geq 4$.

3. Вольт-амперные характеристики сферического зонда. Метод определения потенциала и плотности объемного заряда в электрогазодинамическом потоке основывается на анализе вольт-амперной характеристики зонда. При вычислении тока на зонд принято считать, что диффузионные токи пренебрежимо малы. Тогда, если заряженные частицы приходят на

всю поверхность зонда Σ , имеем

$$(3.1) \quad I_s = - \int_{\Sigma} q E_n d\sigma = - \langle q \rangle \int_{\Sigma} E_n d\sigma = - \langle q \rangle Q_s$$

где Q_s — заряд сферы. В упрощенной теории зонда предполагается [2, 5], что

$$(3.2) \quad \langle q \rangle = q_0, \quad Q_s = C (\varphi_s - \varphi_0)$$

Здесь q_0 , φ_0 — объемная плотность заряда и потенциал в данной точке потока в отсутствие зонда, C — емкость зонда относительно электродов. Следует отметить, что если жидкость несжимаема, то соотношение (3.1) справедливо также и в случае, когда к зонду примыкает зона без объемного заряда D замкнутой формы. Граница области D образована частью поверхности зонда Σ_0 , с одной стороны, и поверхностью Σ_3 с образующей Γ_3 (фиг. 1) — с другой. Тогда, учитывая условие непротекания для заряженной компоненты на Σ_3 и для газа — на Σ_0 , для потока вектора E через Σ_0 имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_0} E_n d\sigma &= \int_{\Sigma_0} (v_n + E_n) d\sigma = \int_{\Sigma_0 + \Sigma_3} (v_n + E_n) d\sigma = \\ &= \int_D \operatorname{div} (v + E) d\tau = 0 \end{aligned}$$

Таким образом, в (3.1) можно интегрировать по всей поверхности Σ .

Выражения (3.2) приближенные. О достоверности первого из них можно судить из приведенных выше результатов численного расчета. Второе следует сравнить с более точной формулой [8], в которой дополнительно введен член, учитывающий заряд, «вытесненный» зондом

$$(3.3) \quad Q_s = C (\varphi_s - \varphi_0) + Q_e + q_0 V_s, \quad Q_e = \int_{\Sigma} (\varphi_0 - \varphi) c d\sigma$$

где φ — распределение потенциала в отсутствие сферы, $c d\sigma$ — емкость элемента поверхности сферы. Таким образом, погрешность определения потенциала зонда с помощью второй формулы (3.2) без учета возмущения объемного заряда равна

$$(3.4) \quad \Delta\varphi_0 = (q_0 V_s + Q_e) / C$$

С точностью до членов более высокого порядка малости Q_e может быть представлено в виде

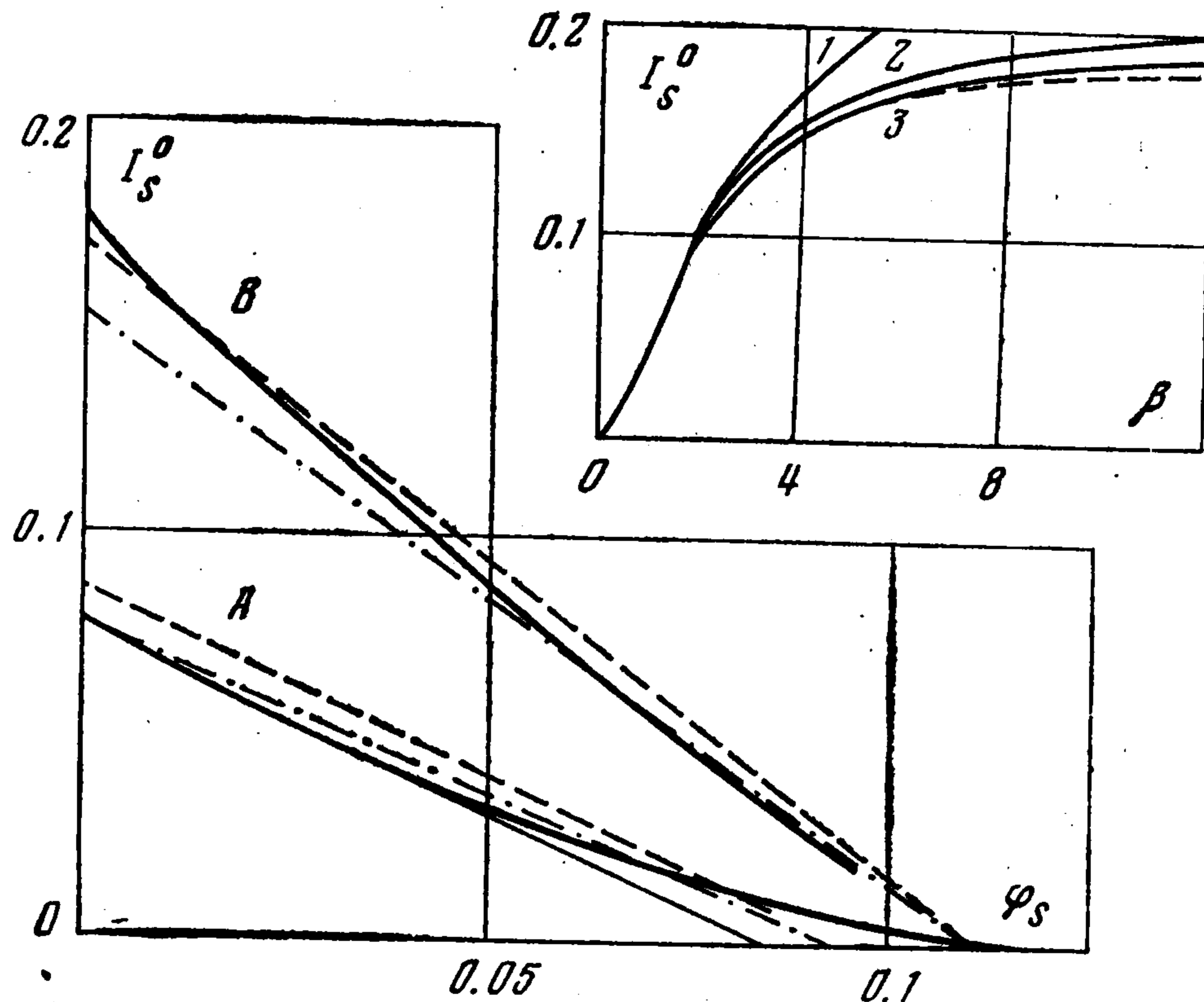
$$Q_e = \int_{\Sigma} E_0 (r - r_0) c d\sigma$$

Отсюда следует, в частности, что при заземленных электродах всегда Q_e больше нуля и неограниченно возрастает при приближении зонда к ним.

Итак, использование упрощенной теории в общем случае дает заниженное значение потенциала. Погрешность в определении потенциала $\Delta\varphi_0$ дается (3.4) и стремится к нулю при устремлении размера зонда к нулю. Расчеты показывают, что изменение заряда на зонде вследствие возмуще-

ния распределения объемной плотности электрического заряда мало и во всех рассмотренных случаях не превышало 0.5% от общего заряда зонда.

На фиг. 4 представлены расчетные вольт-амперные характеристики сферического зонда радиуса $a = 0.05$ в одномерном потоке при $\beta = 4$ для зонда в точке с координатой $x_0 = 0.75$ (кривые А) и $x_0 = 0.25$ (кривые В). Штрихпунктирными линиями нанесены зависимости $I_{s0} / (4\pi a) = q_0 (\varphi_0 - \varphi_s) = I_{s0}^\circ$. Сплошные соответствуют расчетным значениям $I_s^\circ = I_s / (4\pi a)$, где I_s — величина тока, воспринимаемого сферой, $4\pi a$ — емкость уединенного шара.



Фиг. 4

Смещение характеристики влево объясняется увеличением Q_e при приближении зонда к электроду. Возмущение заряда практически отсутствует и увеличение наклона вольт-амперной характеристики обусловлено только возрастанием емкости при приближении зонда к электроду. Для сравнения штриховой линией нанесена зависимость $I = I_{s0}^\circ C_1 / (4\pi a)$, где C_1 — емкость шара относительно электрода.

Таким образом, для исследования областей, лежащих вниз по потоку от точки максимума потенциала, применение приближенной теории возможно, когда зонд находится достаточно далеко от проводящих поверхностей. Если этому условию удовлетворить нельзя, измеренное значение потенциала может быть уточнено согласно (3.4). Погрешность в определении объемной плотности заряда не превышает 2%, так как распределение заряда практически не возмущено.

При приближении зонда к электроду-эмиттеру искажение вольт-амперной характеристики сферического зонда обусловлено сильным возрастанием объемного заряда в окрестности сферы, увеличением емкости зонда, а также ростом заряда Q_e . Первые два фактора приводят к увеличению наклона вольт-амперной характеристики, за счет третьего — точка пересечения характеристики с осью $O\varphi_s$ смещается влево.

Следовательно, при измерениях электростатическим зондом вблизи источника заряженных частиц погрешность в определении локальных электрических параметров связана, главным образом, с сильным возмущением распределения электрического заряда. Оценка сверху вносимой в измерение q погрешности дается (2.4).

При уменьшении степени насыщения потока электрическим зарядом погрешность измерения убывает. В правой верхней части фиг. 4 нанесены зависимости тока, вос-

принимаемого сферой, от параметра β при $x_0 = 0.25$. Штриховая линия соответствует зависимости для идеального зонда, кривые 1, 2, 3 — сферам с размерами $a = 0.05$; 0.025; 0.0125 соответственно.

Автор благодарит А. Б. Ватажина за большую помощь в работе.

Поступила 12 VII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Satoh V.* Measurement of the space potential and the density of the space charge in d.c. corona discharge. Mem. Ryujen. Coll. Energy, 1932, vol. 5, No. 313.
2. *Кравченко В. Д., Левитов В. И.* К теории зонда Сато. Изв. АН СССР. ОТН, 1955, № 10.
3. *Ушаков В. В.* К теории зонда Сато в электрогазодинамике. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 3.
4. *Бучин В. А.* Задача об электрогидродинамическом зонде, не возмущающем распределений плотностей тока и объемного заряда. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
5. *Ватажин А. Б., Лихтер В. А., Шильгин В. И.* Исследование электрогазодинамической струи за источником заряженных частиц. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5.
6. *Грабовский В. И.* Некоторые вопросы исследования электрогидродинамических струй за срезом источника заряженных частиц. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 1.
7. *Ватажин А. Б., Грабовский В. И.* Распространение униполярно заряженных струй в гидродинамических потоках. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
8. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1948.