

К ИССЛЕДОВАНИЮ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В «УЗКИХ» КАНАЛАХ

А. Н. Крайко, В. А. Широносков

(Москва)

Осреднением по переменной y цилиндрических координат $x\varphi y$ получена система интегральных и дифференциальных уравнений и соотношений на сильных разрывах, описывающая стационарные и нестационарные пространственные течения идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа в важном для приложений классе каналов. Две стенки таких каналов Σ^+ и Σ^- близки к поверхностям вращения, а расстояние между ними — разность $y^+ - y^- \ll (y^+ + y^-) / 2$, где $y = y^\pm(x, \varphi)$ — уравнения Σ^\pm . Достижимое при этом сокращение числа независимых переменных делает возможным мобильное численное моделирование, как это демонстрируют примеры, рассчитанные с использованием линеаризованного и полного (нелинейного) вариантов полученной системы. Принятый способ вывода приближенных уравнений аналогичен приему, используемому при выводе двумерных уравнений газодинамики слоя «переменной высоты» применительно к течениям в венцах турбомашин. Это естественно ведет к совпадению соответствующих уравнений.

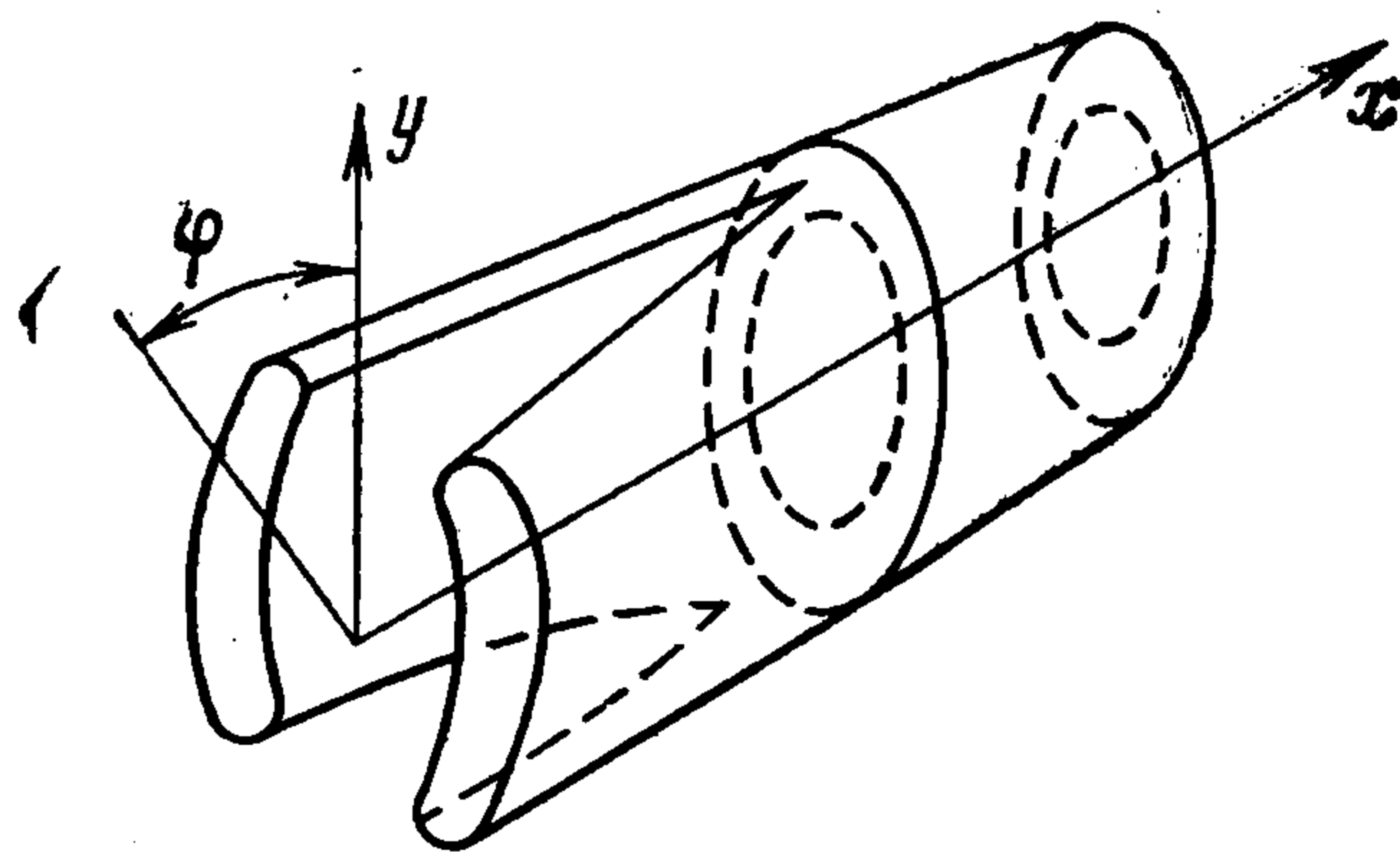
1. Рассмотрим узкий канал типа изображенного на фиг. 1. Пусть направление нормалей к Σ^\pm почти всюду близко к направлению оси y . Вместе с условием узости канала последнее ограничение означает, что

$$(1.1) \quad h \equiv y^+ - y^- \ll Y \equiv \frac{y^+ + y^-}{2}, \quad |y_{x^\pm}| \equiv \left| \frac{\partial y^\pm}{\partial x} \right| \ll 1,$$

$$\frac{y_{\varphi^\pm}}{y^\pm} \equiv \frac{1}{y^\pm} \left| \frac{\partial y^\pm}{\partial \varphi} \right| \ll 1$$

Слова «почти всюду» относятся ко второму и к третьему условиям, которые могут нарушаться в малой окрестности g_w — линии пересечения (стыковки) Σ^+ и Σ^- . Малость указанной окрестности обеспечивает близость Σ^\pm к поверхностям вращения, правда, лишь по y , но не по y_φ . Для длинных каналов второе условие (1.1) не означает малости изменения y^\pm и h на длине всего (или значительной части) канала. В дополнение к сказанному введем ограничение на форму рассматриваемых поверхностей сильного разрыва. Если t — время, а $D^\circ(t, x, \varphi, y) = 0$ — уравнение поверхности разрыва, то ограничимся течениями, для которых

$$(1.2) \quad D_y^{\circ 2} \ll D_x^{\circ 2} + y^{-2} D_\varphi^{\circ 2}$$



Фиг. 1

где нижние индексы означают соответствующие частные производные.

Как будет показано ниже, в силу условия непротекания на Σ^\pm и неравенств (1.1) и (1.2), везде, за исключением, быть может, малых окрестностей g_w , выполняется неравенство $v^2 \ll u^2 + w^2$, в котором u , v и w — x -, y - и φ -компоненты вектора скорости Q . Данное обстоятельство позволяет определять термодинамические параметры (давление p , плотность ρ , удельные энтропию s , внутреннюю энергию e и энтальпию $i = e + p / \rho$ и т. п.), а также компоненты u и w независимо от v . При выводе соответствующих уравнений удобно исходить из интегральных законов сохранения потоков массы, x -компонент количества движения и момента количества движения и энергии. Перечисленные законы сохранения имеют вид

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho d\Omega + \iint_{\sigma} \rho Q_n d\sigma &= 0 \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho u d\Omega + \iint_{\sigma} \rho u Q_n d\sigma + \iint_{\sigma} p n_x d\sigma &= 0 \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} y \rho w d\Omega + \iint_{\sigma} y \rho w Q_n d\sigma + \iint_{\sigma} y p n_{\varphi} d\sigma &= 0 \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho (2e + Q^2) d\Omega + \iint_{\sigma} \rho (2i + Q^2) Q_n d\sigma &= 0 \end{aligned}$$

Здесь Ω — произвольный, фиксированный объем, ограниченный замкнутой поверхностью σ и не содержащий внутри себя каких-либо тел, \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к σ с компонентами n_x , n_y и n_{φ} , $Q_n = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n}$ — нормальная к σ проекция Q и $Q = |\mathbf{Q}|$. В качестве σ возьмем поверхность, образованную стенками канала Σ^\pm и «боковой» поверхностью σ° . Пусть ориентация σ° такова, что $n_y = 0$ на σ° , хотя в остальном положение σ° произвольно. Далее наряду с истинным значением любого параметра Φ введем его среднюю величину

$$(1.4) \quad \langle \Phi \rangle = \frac{1}{h} \int_{y^-}^{y^+} \Phi dy$$

В частности, $\langle y \rangle = Y \equiv (y^+ + y^-) / 2$. По определению, $\Phi = \langle \Phi \rangle + \delta\Phi(t, x, \varphi, y)$, причем $\langle \Phi \rangle$ не зависит от y , а интеграл по высоте канала от $\delta\Phi$ равен нулю. Для каналов и течений, удовлетворяющих условиям (1.1) и (1.2), $\delta\Phi \ll \langle \Phi \rangle$. Благодаря этому с погрешностями порядка $(\delta\Phi)^2$ и $h\delta\Phi$ справедливы соотношения

$$(1.5) \quad \langle \Psi(\Phi_1, \dots, \Phi_n) \rangle = \Psi(\langle \Phi_1 \rangle, \dots, \langle \Phi_n \rangle)$$

Выполним в (1.3) интегрирование по y для объема, ограниченного выбранной выше поверхностью σ . Учтем условие непротекания, выполняющееся на Σ^\pm , неравенства (1.1) и соотношения (1.4) и (1.5) и в получившихся уравнениях пренебрежем величиной v по сравнению с $q = \sqrt{u^2 + w^2}$. Если затем опустить знак осреднения, а вместо Y использовать символ y , который далее в прежнем смысле не употребляется, то уравнения (1.3)

примут вид

$$\begin{aligned}
 (1.6) \quad & \frac{d}{dt} \iint_G \rho F dx d\varphi - \int_g \rho (uF d\varphi - wh dx) = 0 \\
 & \frac{d}{dt} \iint_G \rho u F dx d\varphi - \int_g \{ \rho u (uF d\varphi - wh dx) + pF d\varphi \} - \\
 & - \iint_G \{ pF_x + (p^+ - p^-) y y_x \} dx d\varphi = 0 \\
 & \frac{d}{dt} \iint_G \rho w y F dx d\varphi - \int_g \{ \rho w y (uF d\varphi - wh dx) - pF dx \} - \\
 & - \iint_G \{ pF_\varphi + (p^+ - p^-) y y_\varphi \} dx d\varphi = 0 \\
 & \frac{d}{dt} \iint_G \rho (2e + q^2) F dx d\varphi - \int_g \rho (2i + q^2) (uF d\varphi - wh dx) = 0
 \end{aligned}$$

Здесь G — проекция Ω на плоскость переменных $x\varphi$, g — граница G , $F = yh$, а p^\pm — значения p на Σ^\pm соответственно. Предполагается также, что в силу уравнения состояния e , а следовательно, и i — известные функции p и ρ , причем, хотя речь идет о средних параметрах, для них благодаря (1.5) справедливы те же связи, что и для истинных.

Наряду с уравнением состояния для замыкания выписанной системы требуется выражение для разности $p^+ - p^-$. Чтобы получить указанную связь (условие «радиального равновесия»), поступим так. Учтя ограничение на ориентацию возможных разрывов, обусловленное (1.2), проинтегрируем по высоте канала дифференциальное уравнение для радиальной компоненты количества движения. Поступая так же, как и ранее, и опустив знак осреднения, получим

$$(1.7) \quad \frac{\partial \rho v F}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v F}{\partial x} + \frac{\partial \rho w v h}{\partial \varphi} + (p^+ - p^-) y + \rho h (v^2 - w^2) = 0$$

Согласно (1.1) и (1.2) и условию непротекания на Σ^\pm : $v \sim uy_x + wy_\varphi/y$, и поэтому почти всюду v^2 много меньше u^2 и w^2 , что уже учитывалось при выводе (1.6). В силу этого и естественных предположений о порядках величин производных (1.7) дает искомое условие

$$(1.8) \quad (p^+ - p^-) y = \rho w^2 h$$

которое вместе с уравнением состояния замыкает (1.6).

Уравнения (1.6) и (1.8) допускают независимые масштабы для x и y , с одной стороны, и для h — с другой. Следовательно, при соблюдении условий (1.1), обеспечивающих справедливость описываемого приближения, имеет место подобие течений с одинаковыми распределениями $h/h_0 = f^h(\varphi, x/X)$ и $y/X = f^y(\varphi, x/X)$, где f^h и f^y — заданные функции своих аргументов, а $X = x_1$ — длина канала. Здесь и далее индекс нуль (единица) приписывается параметрам во входном (выходном) сечении канала. Отмеченная закономерность обобщает аналогичное свойство, известное для течений в каналах, которые могут рассматриваться в квазиодномерном приближении. Там важно лишь распределение относительной площади поперечного сечения F/F_0 по x/X .

Условия на разрывах, которые стандартным путем получаются из (1.6), совпадают с соответствующими условиями для истинных параметров. Так, если $D(t, x, \varphi) \equiv D^\circ(t, x, \varphi, y) = 0$ с $y(x, \varphi) \equiv (y^+ + y^-)/2$ — уравнение разрыва, а d — его скорость по нормали к себе (выражающаяся через D_t , D_x и D_φ), то на ударных волнах

$$(1.9) \quad [\rho(q_n - d)] = 0, \quad [p + \rho(q_n - d)^2] = 0 \\ [q_\tau] = 0, \quad [2i + (q_n - d)^2] = 0$$

Здесь и далее $[\Phi] = \Phi_+ - \Phi_-$ — разность Φ с обеих сторон от разрыва, q_n — нормальная и q_τ — касательная к разрыву компоненты \mathbf{q} , определяемые в данном случае через u и w . Аналогично на контактных (тангенциальных) разрывах

$$(1.10) \quad [p] = 0, \quad (q_n - d)_\pm = 0$$

Наконец, дифференциальные уравнения, следующие из (1.6) и (1.8) и справедливые в подобластях непрерывности параметров, после некоторых преобразований принимают вид

$$(1.11) \quad L_1 \equiv \frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \frac{\rho}{F} (uF_x + wh_\varphi) = 0 \\ L_2 \equiv \frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{w^2}{y} y_x = 0, \quad L_3 \equiv \frac{d\gamma}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0 \\ L_4 \equiv \frac{ds}{dt} \equiv \frac{1}{T} \left(\frac{di}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} \right) = 0 \quad \left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{w}{y} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

В (1.11) d/dt — оператор полного дифференцирования по времени вдоль траектории частицы (для осредненного потока), $\gamma = uw$ и T — абсолютная температура. Вторая форма записи уравнения $L_4 = 0$ получена с использованием известной термодинамической связи между дифференциалами s , i и p . Кстати, это уравнение имеет характеристический вид и обеспечивает постоянство энтропии в частице в подобластях непрерывного течения.

2. Если поток стационарен, то из оператора d/dt выпадает первое слагаемое, а саму систему (1.11) целесообразно переписать так:

$$(2.1) \quad L_1^\circ \equiv \frac{q^2}{\rho u} \left(L_1 - \frac{T}{i_\rho} L_4 \right) \equiv \frac{M^2 - 1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\zeta}{y} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) + \\ + \frac{u^2}{y} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} - y\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{q^2}{F} (F_x + \zeta h_\varphi) = 0 \\ L_2^\circ \equiv wL_1 - uL_2 \equiv \frac{1}{\rho} \left(\zeta \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{y} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) - u^2 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\zeta}{y} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} \right) - \\ - \frac{\zeta q^2}{y} y_x = 0, \quad L_3^\circ \equiv L_2 + \frac{\zeta}{y} L_3 + \frac{T}{u} L_4 \equiv \frac{\partial I}{\partial x} + \\ + \frac{\zeta}{y} \frac{\partial I}{\partial \varphi} = 0, \quad L_4^\circ \equiv \frac{1}{u} L_4 \equiv \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\zeta}{y} \frac{\partial s}{\partial \varphi} = 0$$

Здесь $M = q/a$ — число Маха, $a = \sqrt{\rho i_\rho / (1 - \rho i_\rho)}$ — скорость звука, $i_\rho = (\partial i / \partial \rho)_p$, $i_p = (\partial i / \partial p)_\rho$, $\zeta = w/u$ дает направление «двумерного» вектора \mathbf{q} , а $I = i + q^2/2$ — полная энтальпия. В (2.1) характеристический вид имеет не только последнее, но и предпоследнее уравнение, обеспечивающее постоянство I на линии тока (уравнение линии тока:

$d\varphi / dx = \zeta / y$). Тип подсистемы двух первых уравнений (2.1) зависит от величины M . При $M < 1$ система эллиптическая, а при $M > 1$ гиперболическая. Во втором случае через каждую точку «плоскости течения» $x\varphi$ кроме линии тока (c^0 -характеристики) проходят еще две характеристики (c^+ - и c^- -характеристики, или характеристики первого и второго семейств). Как следует из (2.1), аналогично плоскому и осесимметричному случаям они образуют с линиями тока угол Маха $\alpha = \arcsin(1/M)$. Если $\beta = \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{M^2 - 1}$, то последнее утверждение вместе с так называемым условием совместности записывается в форме

$$(2.2) \quad \frac{D^\pm \varphi}{Dx} = \frac{\beta \zeta \pm 1}{y(\beta \mp \zeta)}, \quad \frac{D^\pm \zeta}{Dx} \pm \frac{\beta}{\rho u^2} \frac{D^\pm p}{Dx} + \\ + \frac{\beta \zeta (1 + \zeta^2)}{(\beta \mp \zeta) y} y_x \mp \frac{1 + \zeta^2}{(\beta \mp \zeta) F} (F_x + \zeta h_\varphi) = 0$$

где D^\pm / Dx — операторы полного дифференцирования по x вдоль характеристики, а верхние (нижние) знаки отвечают c^+ - (c^- -)характеристике. Первые равенства (2.2) дают направления характеристик. Вторые — составляют условия совместности, отличие которых от соответствующих условий осесимметричного течения состоит в замене v на w и в виде свободных членов.

3. Пусть газ течет в осесимметричном кольцевом канале, а неосесимметричность потока связана лишь с малыми нестационарными возмущениями. В такой ситуации имеет смысл использовать уравнения в вариациях, получающиеся в результате линеаризации (1.11). Обозначим возмущения параметров через u°, w°, \dots , а их стационарные величины через U, W, \dots . Последние удовлетворяют системе, которая в этом случае получается из (1.11) и (2.1) после отбрасывания производных по t и по φ . Эта система интегрируется в квадратурах, приводя к достаточно очевидным соотношениям

$$(3.1) \quad RUF = \text{const}, \quad 2I + U^2 + W^2 = \text{const} \\ \Gamma \equiv yW = \text{const}, \quad S = \text{const}$$

В отличие от п. 2 в (3.1) I — не полная энтальпия, а стационарное значение удельной энтальпии. При заданной форме канала, т. е. при известных $F = F(x)$ и $y = y(x)$, формулы (3.1) вместе с уравнениями состояния и с условиями на входе и на выходе из канала, определяющими значения констант, позволяют найти распределения по x всех стационарных параметров потока. Введя u°, \dots равенствами

$$(3.2) \quad u = U(1 + u^\circ), \quad p = P(1 + p^\circ), \quad \rho = R(1 + \rho^\circ), \quad w = W + w^\circ$$

подставим (3.2) в (1.11) и выполним линеаризацию. Ограничиваясь далее совершенным газом с показателем адиабаты κ и опуская впредь индекс градус, обозначим через r, l, γ и s следующие комбинации возмущений:

$$(3.3) \quad 2r = u + \frac{p}{\kappa M}, \quad 2l = u - \frac{p}{\kappa M}, \quad \gamma = uw, \quad s = p - \kappa r$$

в которых $M = U/A$ — число Маха, определенное по стационарным x — компоненте скорости U и скорости звука A . Комбинации (3.3) назо-

вом возмущениями правого и левого инвариантов Римана, циркуляции и энтропии. Уравнения, которым они удовлетворяют, можно записать так:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \frac{D+r}{Dt} &= a_{11}r + a_{12}l + a_{13}\gamma + a_{14}s - \frac{A}{2y^2} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} \quad / \\ \frac{D-l}{Dt} &= a_{21}r + a_{22}l + a_{23}\gamma + a_{24}s + \frac{A}{2y^2} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} \\ \frac{D\gamma}{Dt} &= AU \frac{\partial}{\partial \varphi} (l-r), \quad \frac{Ds}{Dt} = 0 \\ \frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + \frac{W}{y} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \frac{D^\pm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \pm A \frac{\partial}{\partial x} \\ a_{11} &= \frac{A}{2(M^2-1)} \left\{ \left[\frac{1-\kappa}{2} (M-1) M^2 - 1 - 3M \right] \Sigma + \right. \\ &+ \left. \left[\frac{1-\kappa}{2} (M-1) - 1 - 3M \right] \chi \right\}, \quad \Sigma = \frac{d \ln F}{dx}, \quad \chi = \frac{W^2}{A^2} \frac{d \ln y}{dx} \\ a_{12} &= \frac{A}{2(M+1)} \left[\left(\frac{\kappa-1}{2} M^2 - 1 \right) \Sigma + \frac{\kappa-3}{2} \chi \right], \\ a_{13} &= a_{23} = \frac{W}{Uy} \frac{d \ln y}{dx}, \quad a_{14} = a_{24} = \frac{U(M^2 \Sigma + \chi)}{2\kappa(M^2-1)M^2} \\ a_{21} &= \frac{M+1}{M-1} a_{12}, \quad a_{22} = \frac{A}{2(M^2-1)} \left\{ \left[\frac{1-\kappa}{2} (M+1) M^2 + \right. \right. \\ &+ \left. \left. 1 - 3M \right] \Sigma + \left[\frac{1-\kappa}{2} (M+1) + 1 - 3M \right] \chi \right\} \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае возможные поверхности разрыва (скачки уплотнения) близки к плоскостям $x = \text{const}$. Поэтому уравнение любой из них удобно представить в форме $x(t, \varphi) = X_s + \delta(t, \varphi)$, где X_s — стационарная координата скачка, а $\delta(t, \varphi)$ мало по сравнению с характерным размером задачи, например с длиной канала. Если возмущения в набегающем сверхзвуковом потоке (при $x < X_s$) отсутствуют, то линеаризация (1.9) дает следующие связи (законы отражения), которые должны выполняться при $x = X_s$:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} r_+ &= \lambda_{rl} l_+ + \lambda_{r\delta} \Sigma \delta, \quad s_+ = \lambda_{sl} l_+ + \lambda_{s\delta} \Sigma \delta \\ \delta_t + Wy^{-1} \delta_\varphi &= \lambda_{\delta l} l_+ + \lambda_{\delta\delta} \Sigma \delta, \quad \dot{\gamma}_+ = \lambda_{\gamma\delta} \delta_\varphi \\ \lambda_{rl} &= \frac{(1-2M_+)M_-^2+1}{(1+2M_+)M_-^2+1}, \quad \lambda_{r\delta} = \frac{(1-K)N-E}{[(1+2M_+)M_-^2+1]M_+} \\ \lambda_{sl} &= \frac{\kappa(1-\lambda_{rl})(1-N)}{M_+M_-^2}, \quad \lambda_{s\delta} = \frac{\kappa[M_+(N-1)\lambda_{r\delta}-E]}{N} \\ \lambda_{\delta l} &= \frac{1-M_+-(1+M_+)\lambda_{rl}}{(K-1)M_+} U_-, \quad \lambda_{\delta\delta} = \left[\frac{(1+M_+)\lambda_{r\delta}}{(1-K)M_+} - 1 \right] U_- \\ \lambda_{\gamma\delta} &= K-1, \quad K = U_-/U_+, \quad N = M_-^2 M_+^2, \quad E = (\kappa-1)(M_+^2 - M_-^2) / \\ & / (\kappa+1) \end{aligned}$$

Здесь $\delta_t = \partial \delta / \partial t$, $\delta_\varphi = \partial \delta / \partial \varphi$, а λ_{rl} , $\lambda_{r\delta}$, ... имеют смысл коэффициентов взаимодействия.

4. Покажем, как развитые выше подходы и уравнения можно использовать при анализе достаточно сложных нестационарных течений. Начнем с применения теории п. 3 к исследованию нестационарного потока в кольцевом канале переменной площади при сверхзвуковом течении на входе ($x=0$), замыкающем скачке, расположенном внутри канала, и дозвуковой скорости в сечении выхода ($x=1$). Пусть, как и при вы-

воде (3.5), возмущения на входе в канал отсутствуют, а нестационарность обусловлена неоднородным по φ и конечным по t возмущением давления при $x=1$. Последнее задавалось формулой: $p_1(t, \varphi) = \varepsilon T(t)\Phi(\varphi)$, где ε — амплитуда колебаний, а функции T и Φ отличны от нуля соответственно в интервалах $0 < t < 0.5$ и $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$. Здесь T и Φ имеют вид равнобедренных треугольников единичной высоты, причем за единицу времени взята длина канала, отнесенная к критической скорости стационарного течения. Стационарное течение незакручено, число Маха на входе $M_0 = 1.4$, средняя ордината y — линейная функция x с $y_0 \equiv y(0) = 0.5$ и $y_x = 0.1$. Распределение F по x задавалось кубическим полиномом с минимумом и максимумом ($F_1/F_0 = 2$) при $x = 0$ и $x = 1$ соответственно. Стационарная координата скачка $X_s = 0.3$. Так как в рассматриваемой линейной задаче все возмущения пропорциональны ε , то в дальнейшем вместо них приводятся величины, которые получаются из (3.3) — (3.5) при $\varepsilon = 1$.

Искомые функции r, l, \dots периодичны по φ . Учитывая это, представим их рядами Фурье по φ и интегралами Фурье — по t . В частности, для r, δ и p_1 будем иметь

$$(4.1) \quad r(t, x, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} R(x, n, \omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\delta(t, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(n, \omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$p_1(t, \varphi) \equiv T(t)\Phi(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} P(1, n, \omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Уравнения для определения спектральных плотностей R, L, Δ, \dots получаются из (3.4) и (3.5), причем, согласно (3.3) и последнему равенству (4.1), граничное условие при $x = 1$ принимает вид

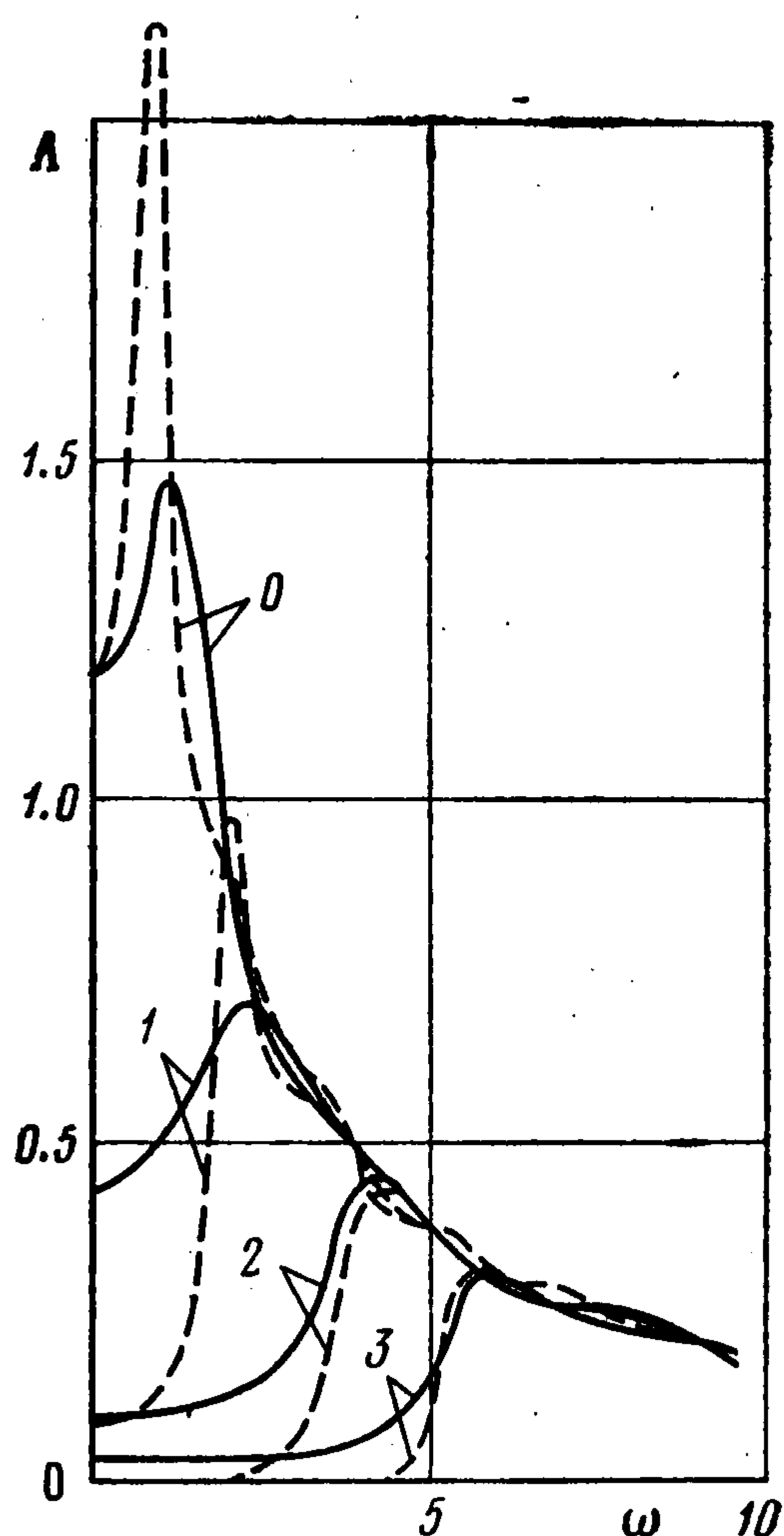
$$L_1 = R_1 - P_1 / \kappa M_1$$

$$P_1 \equiv P(1, n, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\varphi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} p_1(t, \varphi) e^{-i\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Phi(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi \int_0^{1/2} T(t) e^{-i\omega t} dt$$

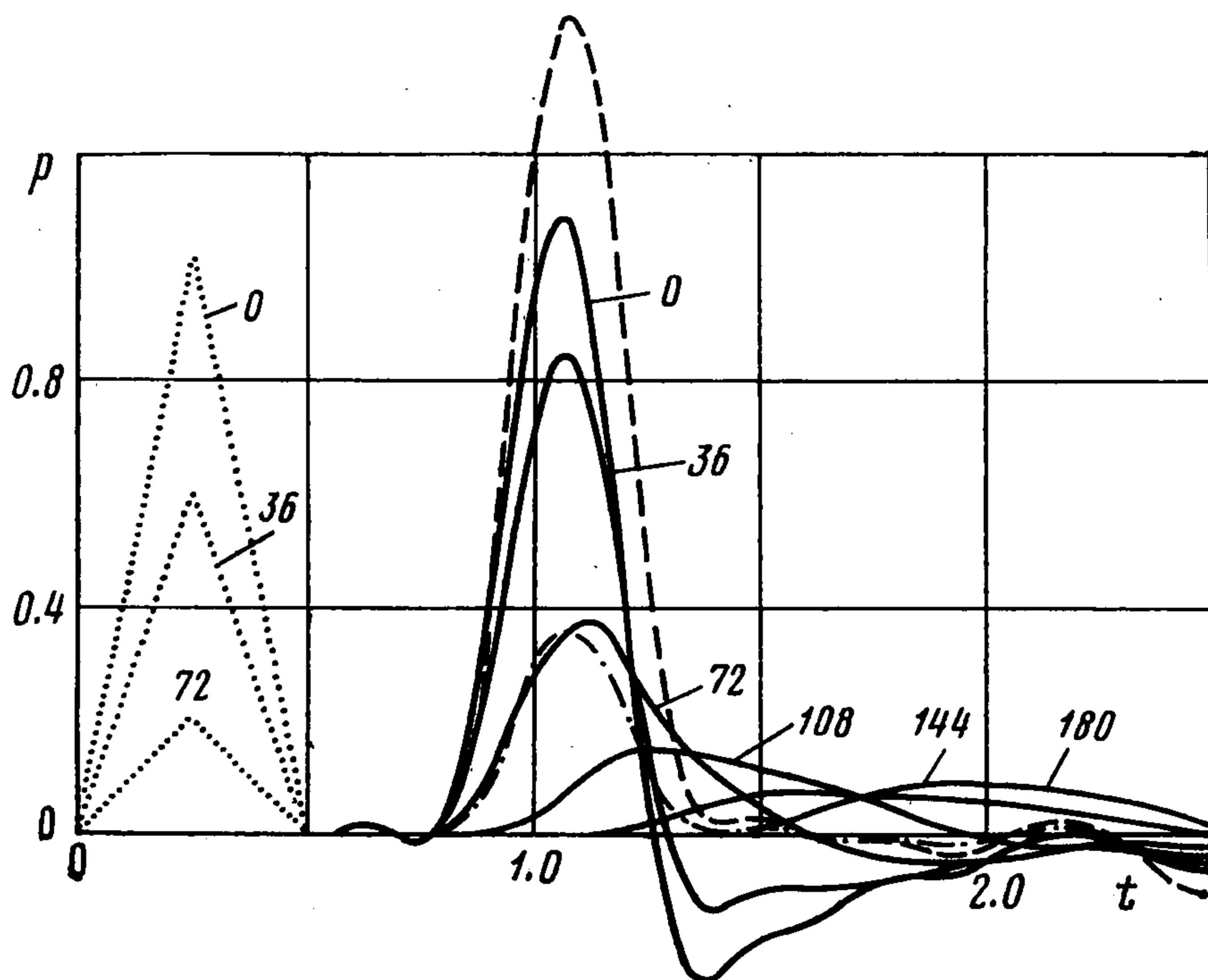
где второе выражение для P_1 записано с учетом выбранной выше зависимости p_1 от t и φ .

В созданном авторами алгоритме спектральные плотности находились через рассчитанные предварительно передаточные функции («частотные характеристики») $\Lambda^\delta(n, \omega), \Lambda^r(x, n, \omega), \dots$, которые отвечают $p_1(t, \varphi) = \exp i(n\varphi + \omega t)$. В силу линейности задачи $\Lambda^\delta, \Lambda^r, \dots$ выражают все спектральные плотности через P_1 равенствами типа $R = \Lambda^r P_1$. Вычисление передаточных функций проводилось способом, близким к описанному в [1]. Не останавливаясь на некоторых непринципиальных от-

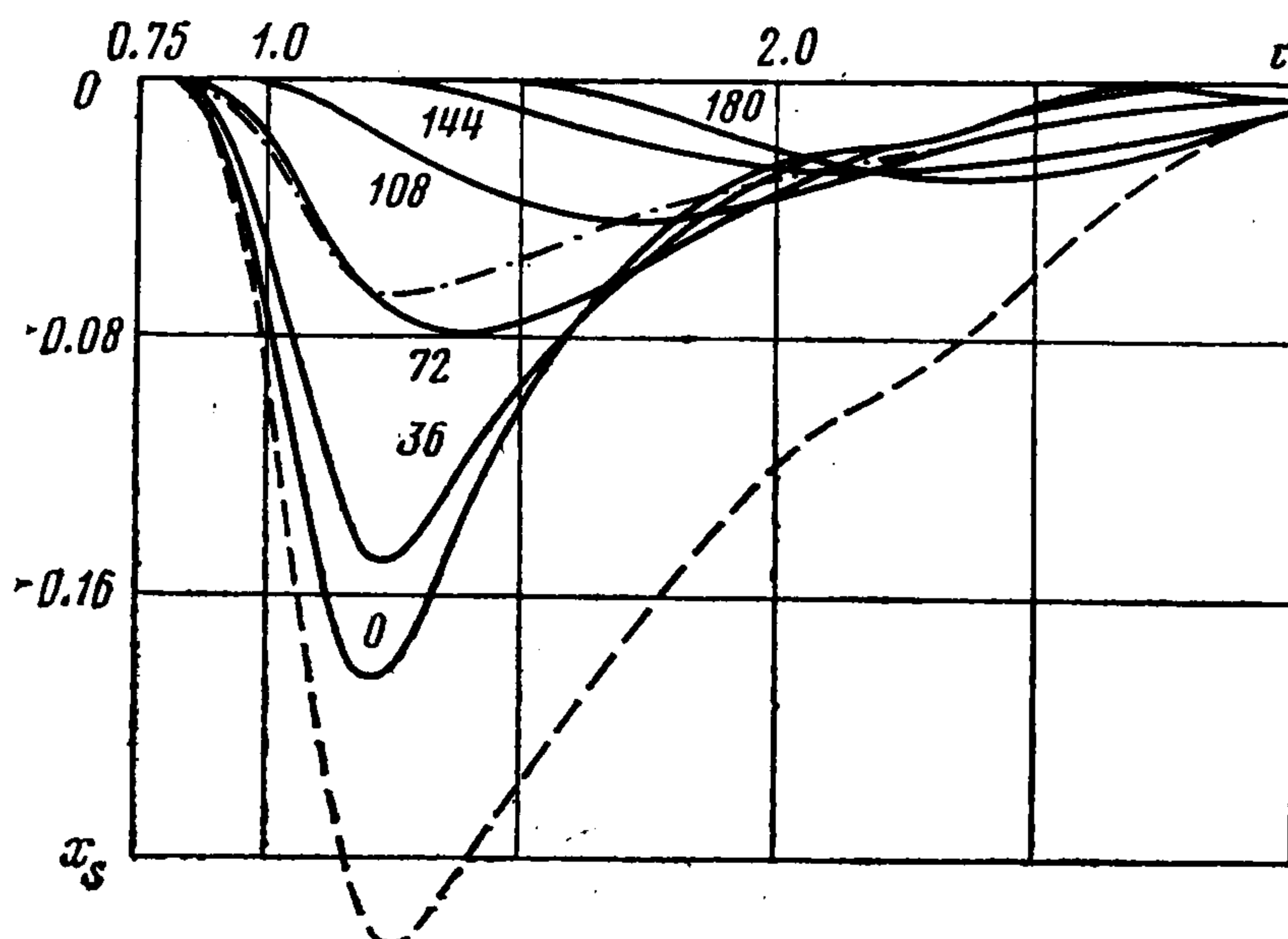


Фиг. 2

личиях (например, в [1] не было зависимости от φ , а следовательно, и от n), укажем следующее. Для достаточно широких (в смысле точности последующего определения r , l , ...) диапазонов n и ω их счет по программе, составленной для ЭВМ БЭСМ-6 на ФОРТРАНе, занимает менее 10 мин. После этого эволюция течения для выбранного выше $p_1(t, \varphi)$ рассчитывалась примерно за 5 мин. Некоторые результаты выполненных таким способом расчетов приведены сплошными линиями на фиг. 2—4. Все последующие результаты относятся к $\kappa = 1.4$.



Фиг. 3

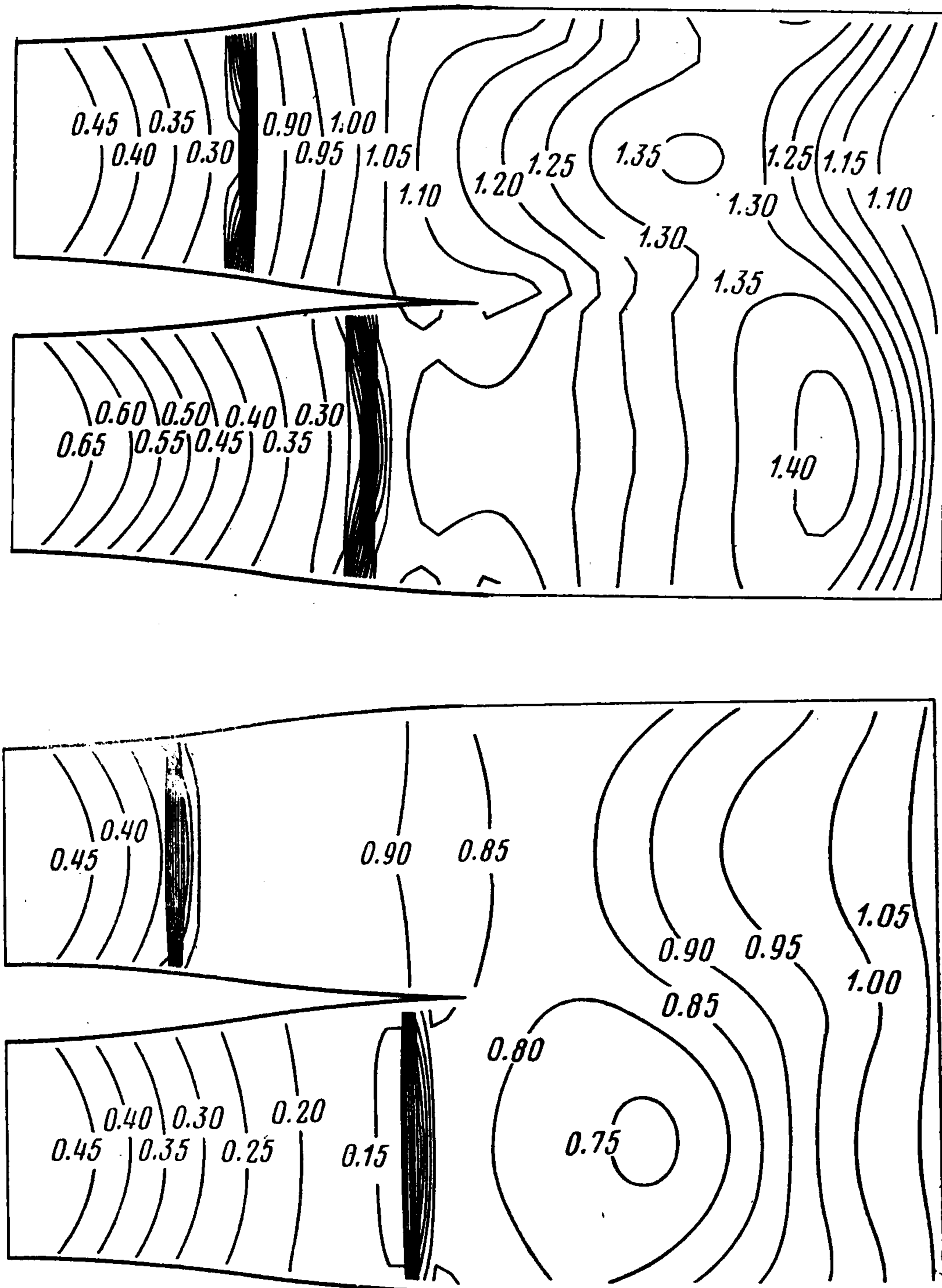


Фиг. 4

Фигура 2 дает $\Lambda = |\Lambda^\delta|$ в зависимости от n и ω . Цифры у кривых — значения n , частота ω отнесена к стационарной критической скорости, деленной на длину канала. Как видно, с ростом n при больших ω наблюдается уменьшение Λ , которое, кроме того, убывает (в некоторой окрестности $\omega = 0$) и при уменьшении ω . Для $n \neq 0$ природа последнего явления связана с тем, что при $\omega < \omega_*(n)$, где ω_* — так называемая «критическая» частота или частота «отсечки» [2, 3] не существует решений типа «бегущих волн». Можно показать, что в рассматриваемом случае $\omega_* = An \sqrt{1 - M^2} / y$. Наряду с кривыми, отвечающими исследуемому каналу, на фиг. 2 штрихами нанесены аналогичные зависимости для канала, полученного добавлением к исходному справа цилиндрического участка единичной длины. Как и следовало ожидать, для $n \neq 0$ это практически не повлияло на правые (ниспадающие) ветви кривых, уменьшило

А при $\omega < \omega_*$ и увеличило кривизну участков роста Λ , которые располагаются вблизи $\omega = \omega_*$. Для $n = 0$ удлинение канала увеличило «резонансный» пик при малых ω .

На фиг. 3 представлены осциллограммы возмущений давления в сечении скачка (цифры около кривых — значения φ). Пунктирными треугольниками там же даны возмущающие импульсы давления на выходе из канала. Для сравнения на фиг. 3 нанесены осциллограммы, получающиеся при замене возмущения, неоднородного по φ , некоторыми однородными распределениями $p_1 = p_1(t)$. Штриховая кривая отвечает



Фиг. 5

$p_1 = T(t)\Phi(0)$ и демонстрирует эффект бокового «расползания» возмущений. Этот эффект, однако, не является полным, как следует из рассмотрения штрихпунктирной кривой, соответствующей $p_1 = T(t)\bar{\Phi}$. Здесь $\bar{\Phi} = 0.25$ — значение, полученное осреднением по φ . Аналогичные выводы следуют и из рассмотрения осциллограмм изменения координаты скачка (фиг. 4).

В заключение продемонстрируем возможности численного алгоритма, который в отличие от предыдущего опирается на нелинеаризованные уравнения (1.6) и (1.8) и предназначен для расчета существенно неоднородных по x и φ и нестационарных течений с ударными волнами. Представление об одном из таких каналов дает фигура 5,

на которой нарисованы «развертка» в переменных $x\eta$ рассчитывавшейся области ($d\eta = yd\varphi$ при $x = \text{const}$), граница g_w , показанная жирной линией, и изобары. На g_w ставилось условие непротекания: $w/u = yd\varphi g/dx$, где $\varphi = \varphi^g(x)$ — уравнение g_w . Изобары строились через интервал $\Delta p = 0.05$, цифры около части из них — значения давления, отнесенного к $\rho_* a_*^2$. За ρ_* и a_* взяты критические плотность и скорость стационарного потока на входе в канал. Исследуемая конфигурация получена «усечением» осесимметричного кольцевого канала, отличающегося от описанного выше только величинами $y_0/X = 0.1$ и $y_x = 0.01$. Она имела два секторных входа и общий кольцевой выход. Расчет велся по схеме С. К. Годунова [4] без выделения поверхностей разрыва. Приводимые ниже результаты были получены на сетке: 60 ячеек по x при 30 — по φ по программе, составленной на ФОРТРАНе для БЭСМ-6. Счет до $t \sim 1.5$ (время обезразмеривалось так же, как и выше) занимал примерно 1.5 ч. Изобары строились при помощи специально созданной программы построения изолиний. Начальные стационарные поля параметров находились в процессе установления по t при стационарном сверхзвуковом потоке на входе (течение осевое, $M_0 = 1.4$) и постоянном по φ давлении $p_1 = 1.07$ на выходе. Как и выше, в канале располагались замыкающие скачки, представленные на фиг. 5 зонами сгущения изобар.

После достижения стационарных распределений параметров на вход или на выход подавались различные возмущения, имитировавшие приход на один из входов (называемый далее «нижним» по его расположению на фиг. 5) ударной волны или контактного разрыва, а также вращению в сечении выхода непроницаемого сектора. Несмотря на достаточно сильные воздействия, течение, как правило, не разрушалось, демонстрируя устойчивость, что согласуется с результатами анализа, выполненного в [5-8].

Фигура 5 дает изобары в задаче о приходе в нижний канал возмущения, которое задавалось формулами: $\chi(t) = \chi_s \alpha(t) + \chi_0 [1 - \alpha(t)]$. Здесь χ — любой параметр, χ_0 — его стационарное значение, а χ_s — значение за ударной волной, движущейся по потоку с относительной скоростью $1.2 a_*$. Функция $\alpha(t) = 1 - t$ при $0 < t < 1$ и равна нулю при $t > 1$. За начало отсчета времени, обезразмеренного как и в предыдущем примере, брался момент прихода скачка в сечение $x = 0$. В течение всего процесса давление при $x = 1$ поддерживалось постоянным $p_1 = 1.07$. В момент $t = 0.5$ (фиг. 5, а) верхний замыкающий скачок еще не «чувствует» возмущения, пришедшего в нижний канал. На фиг. 5, б ($t = 1.3$) поток возмущен уже по всей дозвуковой части канала, а верхний скачок смещен влево. Однако к этому моменту времени слева от нижнего скачка возмущений уже нет. Представленные на фиг. 5 результаты показывают, что в рамках развитой выше математической модели и созданного алгоритма возможно оперативное численное экспериментирование с нестационарными течениями в каналах достаточно сложной формы.

Поступила 24 XII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Важенина Т. Д., Гринь В. Т., Крайко А. Н. К определению частотных характеристик канала воздухозаборника. Уч. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 6.
2. Исакович М. А. Общая акустика. М., «Наука», 1973.
3. Nayfeh A. H., Kaiser J. E., Telionis D. P. Acoustics of aircraft engine — duct system. AIAA J., 1975, vol. 13, No. 2, p. 130—153.
4. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М., «Наука», 1976.
5. Гринь В. Т., Крайко А. Н., Тилляева Н. И. Исследование устойчивости течения идеального газа в квазицилиндрическом канале. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3.
6. Гринь В. Т., Крайко А. Н., Тилляева Н. И. Об устойчивости течения идеального газа в канале с замыкающим скачком уплотнения при одновременном отражении от сечения выхода акустических и энтропийных волн. ПММ, 1976, т. 40, вып. 3.
7. Крайко А. Н., Широносков В. А. Исследование устойчивости течения в канале с замыкающим скачком уплотнения при околосзвуковой скорости потока. ПММ, 1976, т. 40, вып. 4.
8. Гринь В. Т., Крайко А. Н., Тилляева Н. И., Широносков В. А. Анализ устойчивости одномерного течения в канале при произвольном изменении параметров стационарного потока между сечением замыкающего скачка и выходом из канала. ПММ, 1977, т. 41, вып. 4.