Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 4, 1980

УДК 531.36

О ВОЗМОЖНОСТИ РЕЗОНАНСНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ СИСТЕМЫ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Л. Г. Хазин, Г. Г. Хазина

(Москва)

Показано, что при взаимодействии двух неустойчивых осцилляторов с равными частотами возможна резонансная стабилизация, т. е. при «включении» резонанса неустойчивость сменяется асимптотической устойчивостью. Это явление не может произойти ни при каких других соотношениях между частотами.

1. Постановка задачи. Рассматривается вопрос об устойчивости положения равновесия системы двух линейных осцилляторов, связанных сильной нелинейной связью

$$x_1^{\cdot\cdot} + \omega_1^2 x_1 = f_1(x_1, x_1^{\cdot}) + g_1(x_1, x_2, x_1^{\cdot}, x_2^{\cdot}) \tag{1.1}$$
$$x_2^{\cdot\cdot} + \omega_2^2 x_2 = f_2(x_2, x_2^{\cdot}) + g_2(x_1, x_2, x_1^{\cdot}, x_2^{\cdot})$$
$$f_j(0) = g_j(0) = 0, \quad j = 1, 2$$

Здесь разложение в ряд Тейлора функций f и g начинается с квадратичных членов, а функции g_j содержат лишь перекрестные члены.

Известно [1, 2], что при отсутствии резонансного соотношения между частотами ω_1, ω_2 положение равновесия системы (1.1) может быть асимптотически устойчивым лишь тогда, когда каждый из осцилляторов устойчив. Действительно, укороченная нормальная форма системы (1.1) имеет вид

$$z_j^{\cdot} = i\omega_j z_j + z_j [A_{j1} |z_1|^2 + A_{j2} |z_2|^2] \tag{1.2}$$

и критерий асимптотической устойчивости состоит в одновременном выполнении трех условий

$$a_{11} = \operatorname{Re} A_{11} < 0, \quad a_{22} = \operatorname{Re} A_{22} < 0 \tag{1.3}$$
$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0 \text{ при } a_{12} > 0, \; a_{21} > 0, \; a_{ij} = \operatorname{Re} A_{ij}$$

Первые два условия гарантируют асимптотическую устойчивость каждого из осцилляторов.

Рассмотрим вопрос о том, может ли положение равновесия системы (1.1) быть асимптотически устойчиво, если один или даже оба осциллятора неустойчивы. Из изложенного выше следует, что если это и возможно, то лишь при резонансном соотношении между частотами. Так как система с резонансом выше четвертого порядка асимптотически устойчива или неустойчива одновременно с системой (1.2) (см. [3]), то «резонансная стабилизация», если и возможна, то лишь при соотношении частот 1 : 3

($\omega_2 = 3\omega_1$) или 1 : 1 ($\omega_2 = \omega_1$) (заметим, что при соотношении 1 : 2 ($\omega_2 = 2\omega_1$) положение равновесия неустойчиво [4, 5]).

Ранее показано [1], что при нарушении первого из условий (1.3) возможна частичная резонансная стабилизация системы (1.1). Именно, хотя при $a_{11} > 0$ система (1.2) неустойчива, при «включении» резонанса 1 : 3 полная резонансная система (1.1) может стать асимптотически устойчивой. Быстрый осциллятор стабилизирует неустойчивость, порожденную медленным. Условие $a_{22} < 0$ является необходимым для асимптотической устойчивости рассматриваемой резонансой системы.

Вопрос о возможности резонансной стабилизации системы (1.1) в случае неустойчивости каждого из осцилляторов оставался открытым. В п. 2 показано, что такая стабилизация возможна лишь при соотношении частот 1 : 1.

В пп. 3,4 задача об устойчивости рассматривается с более общей точки зрения. Пусть матрица A линеаризованной системы четвертого порядка

$$z^{\cdot} = F(z), \quad F(0) = 0 \tag{1.4}$$

имеет две пары чисто мнимых собственных значений

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\omega_2; \quad \omega_2 = \omega_1$$

При этих условиях жорданова форма матрицы A содержит, как правило, клетку

$$\begin{Vmatrix} i\omega & 1 \\ 0 & -i\omega \end{Vmatrix}$$

Задача имеет коразмерность $\nu = 3$ и положение равновесия неустойчиво [2]. Если матрица A диагональна ($\nu = 4$), проблема устойчивости алгебраически неразрешима [3], поэтому приобретают важность простые, легко проверяемые условия устойчивости — как необходимые, так и достаточные. Такие условия получены в пп. 3, 4 настоящей работы.

2. Два примера резонансной стабилизации. Рассмотрим два осциллятора с одинаковыми частотами $\omega_2 = \omega_1 = \omega$, связанных сильной нелинейной связью

$$\begin{aligned} z_1^{\cdot} &= i\omega z_1 + z_1 [A_{11} |z_1|^2 + A_{12} |z_2|^2] + \\ &+ B_1 |z_1|^2 z_2 + B_2 z_1^2 \bar{z}_2 + B_3 z_2 |z_2|^2 + B_4 \bar{z}_1 z_2^2 \\ z_2^{\cdot} &= i\omega z_2 + z_2 [A_{21} |z_1|^2 + A_{22} |z_2|^2] + \\ &+ B_5 z_1 |z_1|^2 + B_6 z_1 |z_2|^2 + B_7 z_1^2 \bar{z}_2 + B_8 \bar{z}_1 z_2^2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

К системе (2.1) необходимо добавить два сопряженных уравнения. Здесь A_{jk} и B_j — комплексные числа, $A_{jk} = a_{jk} + ic_{jk}$, $B_j = b_j e^{i\varphi_j}$, $b_j \geqslant 0$.

1°. Покажем, что положение равновесия (2.1) может быть асимптотически устойчивым, даже если $a_{11} > 0$ и $a_{22} > 0$, на следующем примере двух симметрично-связанных осцилляторов. Выберем коэффициенты системы (2.1) в виде

$$\begin{aligned} &A_{11} = A_{22} = 1; \; A_{12} = A_{21} = -91/3; \; B_1 = B_6 = 173/3 \\ &B_2 = B_8 = 1; \quad B_3 = B_5 = -42; \quad B_4 = B_7 = 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

[1] *Хазин Л. Г., Шноль Э. Э.* Исследование асимптотической устойчивости при резонансе 1 : 3. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, 1978, № 67.

[2] *Хазин Л. Г.* О резонансной неустойчивости положения равновесия при кратных частотах. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, 1975, № 97.

[3] *Хазина Г. Г., Хазин Л. Г.* Несуществование алгебраического критерия асимптотической устойчивости при резонансе 1 : 1. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, 1977, № 112.

Функция

$$L = |z_1|^2 + |z_2|^2 + {}^1/_2(\bar z_1 z_2 + z_1 \bar z_2) \tag{2.3}$$

является функцией Ляпунова системы (2.1), (2.2).

Действительно, положив $z_k = \sqrt{\rho_k} e^{i\varphi_k}$, $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$, получим

$$L = \rho_1 + \rho_2 + \operatorname{Re}(\sqrt{\rho_1\rho_2} e^{-i\psi}) \geqslant (\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}/2)^2 + {}^3/_4\rho_2 > 0$$

Вычислим dL/dt в силу (2.1), (2.2):

$$\begin{aligned} {}^1/_2 L^{\cdot} &= -20\ (\rho_1^2 + \rho_2^2) - 2\rho_1\rho_2 + 2(\rho_1 + \rho_2)\sqrt{\rho_1\rho_2}\cos\psi \leqslant \\ &\leqslant -19(\rho_1^2 + \rho_2^2) < 0 \end{aligned}$$

Тем самым положение равновесия системы (2.1), (2.2) асимптотически устойчиво.

Замечания. а) Более общие рассуждения, дающие как следствие рассмотренную функцию Ляпунова, приведены в п. 3; б) функция (2.3) является функцией Ляпунова для полной системы. Асимптотическая устойчивость полной системы следует также из общих теорем об однородных системах [6].

2°. Может оказаться, что нерезонансная связь такова, что система (1.2) неустойчива при устойчивости каждого из осцилляторов, т. е. при $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < 0$ при $a_{12} > 0$ и $a_{21} > 0$.

Покажем на примере, что и в этом случае резонансная связь при $\omega_2 = \omega_1$ может стабилизировать систему

$$\begin{aligned} z_1^{\cdot} &= iz_1 - 716\, z_1|z_1|^2 + 11 z_1|z_2|^2 - 673\,|z_1|^2 z_2 - \bar z_1 z_2^2 \\ z_2^{\cdot} &= iz_2 + 651\, z_2|z_1|^2 - 10 z_2|z_2|^2 - 1412\ z_1|z_1|^2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Функция Ляпунова для этой системы

$$L = 2|z_1|^2 + |z_2|^2 + \bar z_1 z_2 + z_1 \bar z_2 \geqslant \rho_1 + (\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2})^2 > 0$$

$$\begin{aligned} {}^1/_2 L^{\cdot} &\leqslant -20\rho_1^2 - 10\rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos 2\psi + \rho_1\sqrt{\rho_1\rho_2}\cos\psi \leqslant \\ &\leqslant -{}^1/_2(39\,\rho_1^2 + 20\rho_2^2 - 5\,\rho_1\rho_2) < 0 \end{aligned}$$

3. Необходимые условия устойчивости. Устойчивость системы (2.1) эквивалентна устойчивости следующей системы третьего порядка, полученной из (2.1) переходом к полярным координатам ρ_k, φ_k $(k = 1, 2)$ по формулам $z_k = \sqrt{\rho_k} e^{i\varphi_k}$; $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$, $\rho_k \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} \rho_k^{\cdot} &= 2\,[a_{kk}\rho_k^2 + \Omega_k\rho_1\rho_2 + \sqrt{\rho_1\rho_2}(\rho_1\Phi_k + \rho_2\Psi_k)] \\ \psi^{\cdot} &= P\rho_1 + R\rho_2 + S\sqrt{\rho_1\rho_2} + \\ &+ \rho_1^{-1/2}\rho_2^{1/2}[-b_5\rho_1^2\sin(\psi - \psi_5) - b_3\rho_2^2\sin(\psi + \psi_3)] \\ \Omega_1 &= a_{12} + b_4\cos(2\psi + \psi_4);\ \Omega_2 = a_{21} + b_7\cos(2\psi - \psi_7) \\ \Phi_1 &= b_1\cos(\psi + \psi_1) + b_2\cos(\psi - \psi_2);\ \Phi_2 = b_5\cos(\psi - \psi_5) \\ \Psi_1 &= b_3\cos(\psi + \psi_3),\ \Psi_2 = b_6\cos(\psi - \psi_6) + b_8\cos(\psi + \psi_8) \\ P &= c_{21} - c_{11} - b_7\sin(\psi - \psi_7) \\ R &= c_{22} - c_{12} - b_4\sin(2\psi + \psi_4) \\ S &= -b_1\sin(\psi + \psi_1) + b_2\sin(\psi + \psi_2) - b_6\sin(\psi - \psi_6) + \\ &+ b_8\sin(\psi + \psi_8) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Используем далее однородность полученной системы по ρ_1, ρ_2. Введем координаты R, θ $(0 \leqslant R < \infty,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi / 2)$ по формулам $\rho_1 = R\cos\theta$, $\rho_2 = R\sin\theta$, $d\tau = R dt$. Имеем

$$
\begin{aligned}
(3.2)\qquad & d\ln R / d\tau = 2\Pi(\theta, \psi) = 2\Pi_1(\theta) + 2\Pi_2(\theta, \psi) \\
& d\theta / d\tau = g(\theta, \psi) = g_1(\theta) + g_2(\theta, \psi) \\
& d\psi / d\tau = f(\theta, \psi) = f_1(\theta) + f_2(\theta, \psi) \\
& \Pi_1 = a_{11}\cos^3\theta + a_{12}\cos^2\theta\sin\theta + a_{21}\cos\theta\sin^2\theta + a_{22}\sin^3\theta \\
& \Pi_2 = \cos^{1/2}\theta\sin^{1/2}\theta\,[\Pi_{11}\cos^2\theta + \Pi_{12}\sin^2\theta + \Pi_{13}\cos\theta\sin\theta) + \\
& + \cos\theta\sin\theta\,[b_4\cos\theta\cos(2\psi + \psi_4) + b_7\sin\theta\cos(2\psi - \psi_7)] \\
& \Pi_{11} = b_1\cos(\psi + \psi_1) + b_2\cos(\psi - \psi_2),\ \Pi_{12} = b_6\cos(\psi - \psi_6) + \\
& + b_8\cos(\psi + \psi_8),\ \Pi_{13} = b_3\cos(\psi + \psi_3) + b_5\cos(\psi - \psi_5) \\
& g_1 = \cos\theta\sin\theta\,[(a_{21} - a_{11})\cos\theta + (a_{22} - a_{12})\sin\theta] \\
& g_2 = \cos\theta\sin\theta\,[b_7\cos\theta\cos(2\psi - \psi_7) - b_4\sin\theta\cos(2\psi + \\
& + \psi_4)] + \cos^{1/2}\theta\sin^{1/2}\theta\,[b_5\cos^2\theta\cos(\psi - \psi_5) + \\
& + \sin\theta\cos\theta g_{11} - b_3\sin^2\theta\cos(\psi + \psi_3)] \\
& g_{11} = b_6\cos(\psi - \psi_6) + b_8\cos(\psi + \psi_8) - b_1\cos(\psi + \\
& + \psi_1) - b_2\cos(\psi - \psi_2) \\
& f_1 = (c_{21} - c_{11})\cos\theta + (c_{22} - c_{12})\sin\theta \\
& f_2 = -b_7\cos\theta\sin(2\psi - \psi_7) - b_4\sin\theta\sin(2\psi + \psi_4) - \\
& - \sin^{-1/2}\theta\cos^{-1/2}\theta\,[b_5\cos^2\theta\sin(\psi - \psi_5) + f_{11}\sin\theta\cos\theta - \\
& - b_3\sin^2\theta\sin(\psi + \psi_3)] \\
& f_{11} = -b_1\sin(\psi + \psi_1) + b_2\sin(\psi + \psi_2) - b_6(\psi - \psi_6) + \\
& + b_8\sin(\psi + \psi_8)
\end{aligned}
$$

В полученной системе (3.2) угловые уравнения для θ и ψ образуют независимую подсистему, поэтому если $\theta(\tau)$, $\psi(\tau)$ — ее решение, то

$$
(3.3)\qquad R(\tau) = R_0 e^{p(\tau)};\quad p(\tau) = \int_0^\tau \Pi[\theta(\xi), \psi(\xi)]\,d\xi
$$

Теорема. Пусть θ_k, ψ_k — невырожденные решения алгебраической относительно $\sin\theta$, $\cos\theta$ системы $f(\theta, \psi) = g(\theta, \psi) = 0$. Тогда условие $\Pi(\theta_k, \psi_k) < 0$ при всех k необходимо для асимптотической устойчивости системы (3.1).

Доказательство непосредственно вытекает из формулы (3.3).

Следствие. Если $\Pi(\theta_k, \psi_k) > 0$ хотя бы для одной стационарной точки (θ_k, ψ_k), то положение равновесия системы (3.1) неустойчиво.

Замечание. Неустойчивость равновесия полной системы (при выполнении условий теоремы) следует из существования функции Четаева в окрестности растущего решения [1].

[1] *Шноль Э. Э., Хазин Л. Г.* Об устойчивости стационарных решений общих систем дифференциальных уравнений вблизи критических случаев. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, 1979, № 91.

4. Достаточные условия устойчивости. Достаточные условия устойчивости могут быть получены, если потребовать, чтобы некоторый однородный многочлен являлся функцией Ляпунова. Даже из рассмотрения простейшего многочлена второго порядка в качестве возможной функции Ляпунова получаются уже нетривиальные достаточные условия, использованные, в частности, в п. 2.

Лемма. Если система (2.1) допускает функцию Ляпунова вида

$$L = k\,|z_1|^2 + |z_2|^2 + a_{11}z_1^2 + \bar a_{11}\bar z_1^2 + a_{12}z_1z_2 + \bar a_{12}\bar z_1\bar z_2 + cz_1\bar z_2 + \bar c\bar z_1 z_2 + a_{22}z_2^2 + \bar a_{22}\bar z_2^2 \tag{4.1}$$

то эта же система допускает функцию Ляпунова

$$L_1 = k\,|z_1|^2 + |z_2|^2 + cz_1\bar z_2 + \bar c\bar z_1 z_2 \tag{4.2}$$

Здесь $k > 0$ действительно, a_{kj}, c — комплексные числа.

Доказательство. Если $z_1(t)$, $z_2(t)$ — решение системы (2.1), то $e^{i\alpha}z_1(t)$, $e^{i\alpha}z_2(t)$ — также ее решения. Поэтому $L(e^{i\alpha}z_1, e^{i\alpha}z_2)$ — функция Ляпунова системы (2.1). Тогда

$$L_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L(e^{i\alpha}z_1, e^{i\alpha}z_2)\,d\alpha = k\,|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(cz_1\bar z_2)$$

также является функцией Ляпунова системы (2.1).

Найдем теперь условия на k и $c = c_1 + ic_2$, при которых L_1 является функцией Ляпунова. Обозначим $|c|^2 = c_0^2$ и пусть $c_0^2 < k$. Тогда квадратичная форма (4.2) положительно определена, т. е.

$$L_1 = (\sqrt{k\rho_1} - c_0\sqrt{\rho_2/k})^2 + \rho_2(1 - c_0^2/k) > 0, \quad \rho_j = |z_j|^2$$

Потребуем, чтобы $(dL_1/dt)_{(2.1)} < 0$. Опуская промежуточные выкладки, получим

$$\begin{aligned}
&(dL_2/dt)\,|_{(2.1)} = 2\rho_2^2 P_2(x); \quad x = \rho_1/\rho_2 > 0\\
&P_2(x) = ax^2 + bx + d; \quad a = \alpha + {}^1/_2\sqrt{C^2 + D^2}\\
&b = \gamma + \sqrt{A^2 + B^2} + {}^1/_2(\sqrt{C^2 + D^2} + \sqrt{E^2 + F^2})\\
&d = \beta + {}^1/_2\sqrt{E^2 + F^2}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\alpha = ka_{11} + b_5(c_1\cos\psi_5 + c_2\sin\psi_5), \quad \beta = a_{22} + b_3(c_1\cos\psi_3 - c_2\sin\psi_3), \gamma = ka_{12} + a_{21} + b_1(c_1\cos\psi_1 - c_2\sin\psi_1) + b_6(c_1\cos\psi_6 + c_2\sin\psi_6), A = kb_4\cos\psi_4 + b_7\cos\psi_7 + c_1(b_2\cos\psi_2 + b_8\cos\psi_8) + c_2(b_8\sin\psi_8 - b_2\sin\psi_2)$$

$$B = -kb_4\sin\psi_4 + b_7\sin\psi_7 + c_1(b_2\sin\psi_2 + b_8\sin\psi_8) + c_2(b_2\cos\psi_2 + b_8\cos\psi_8)$$

$$C = k(b_1\cos\psi_1 + b_2\cos\psi_2) + b_5\cos\psi_5 + c_1(a_{11} + a_{21}) + c_2(c_{21} - c_{11}) + b_7(c_1\cos\psi_7 + c_2\sin\psi_7)$$

$$D = k(b_2\sin\psi_2 - b_1\sin\psi_1) + b_7(c_1\sin\psi_7 - c_2\cos\psi_7) + b_5\sin\psi_5 + c_1(c_{11} - c_{21}) + c_2(a_{11} + a_{21})$$

$$E = kb_3 \cos\psi_3 + b_6 \cos\psi_6 + b_8 \cos\psi_8 + c_1 (a_{12} + a_{22}) + + c_2 (c_{22} - c_{12}) - b_4 (c_1 \cos\psi_4 - c_2 \sin\psi_4)$$

$$F = -kb_3 \sin\psi_3 + b_6 \sin\psi_6 - b_8 \sin\psi_8 + + c_1 (c_{12} - c_{22}) + c_2 (a_{12} + a_{22}) - b_4 (c_1 \sin\psi_4 + c_2 \cos\psi_4)$$

L_1 — функция Ляпунова, если $P_2(x) < 0$ при $x > 0$. Неравенство $P_2(x) < 0$ $(x > 0)$ выполняется при следующих трех условиях: 1) $a < 0$; 2) $d < 0$; 3) либо корни $P_2(x)$ отрицательны ($P_2^{\cdot}(0) = b < 0$), либо вещественных корней нет ($b^2 - 4ad < 0$).

Сформулируем достаточные условия устойчивости. Пусть

$$L_1 = k\,|z_1|^2 + |z_2|^2 + cz_1\bar{z}_2 + \bar{c}\bar{z}_1\bar{z}_2$$

$$P_2(x) = a(k, c)x^2 + b(k, c)x + d(k, c)$$

Пусть

$$I_1 = \{k, c : a > 0\}; \quad I_2 = \{k, c : d < 0\}$$

$$I_3 = \{k, c : b < 0 \vee b^2 - 4ad < 0\}$$

Теорема. Положение равновесия $z = 0$ системы (2.1) асимптотически устойчиво, если $I_1 \cap (I_2 \cup I_3) \neq \varnothing$.

Примеры использования этой теоремы приведены в п. 2.

5. Предельные ситуации. 1°. *Малые коэффициенты при резонансных членах.*

Теорема. Если для достаточно малых $\varepsilon > 0$, $|B_j| < \varepsilon$, то система (2.1) асимптотически устойчива или неустойчива одновременно с системой (1.2).

Доказательство. а) Пусть выполнен критерий асимптотической устойчивости для системы (1.2). Тогда эта система обладает однородной функцией Ляпунова L. Как следует из общих теорем об устойчивости однородных систем, эта функция L является функцией Ляпунова и для системы (2.1) при достаточно малых ε [6].

б) Пусть положение равновесия системы (1.2) грубо неустойчиво, т. е. нарушено хотя бы одно из условий критерия устойчивости. Тогда угловая подсистема системы (3.2) при $b_j = 0$ имеет невырожденную стационарную точку (θ_0, ψ_0), т. е.

$$f = (\theta_0, \psi_0) = g(\theta_0, \psi_0) = 0; \quad d(f, g) / d(\theta, \psi)\,|_{\theta_0, \psi_0} \neq 0$$

$$\Pi(\theta_0, \psi_0) > \lambda > 0$$

Следовательно, при достаточно малом ε алгебраическая система $f(\theta, \psi) = g(\theta, \psi) = 0$ имеет решение (θ_{10}, ψ_{10}) и $\Pi(\theta_{10}, \psi_{10}) > \lambda / 2 > 0$. Теорема п. 3 гарантирует при этих условиях неустойчивость системы (3.2) и полной резонансной системы.

2°. *Большие коэффициенты при резонансных членах.*

Теорема. Пусть $B_j = B_j'\varepsilon^{-1}$, тогда для достаточно малых ε система (2.1) неустойчива.

Доказательство. Введем в системе (2.1) новое время $dt = \varepsilon dt_1$. Получим

(5.1)
$$dz_1 / dt_1 = \varepsilon\, i\omega z_1 + \varepsilon z_1 [A_{11} |z_1|^2 + A_{12} |z_2|^2] + + B_1' |z_1|^2 z_2 + B_2' z_1^2 \bar{z}_2 + B_3' z_2 |z_2|^2 + B_4' \bar{z}_1 z_2^2$$

$$dz_2 / dt_1 = \varepsilon i\omega z_2 + \varepsilon z_2 [A_{21} |z_1|^2 + A_{22} |z_2|^2] + + B_5' |z_1|^2 z_1 + B_6' z_1 |z_2|^2 + B_7' z_1^2 \bar{z}_2 + B_8' \bar{z}_1 z_2^2$$

Положим в (5.1) $\varepsilon = 0$. Получившаяся система грубо неустойчива. Действительно, угловая подсистема системы (3.2) (при $a_{ij} = 0$) имеет невырожденную стационарную точку (θ_0, ψ_0), т. е. $f(\theta_0, \psi_0) = g(\theta_0, \psi_0) = 0$, $\Pi(\theta_0, \psi_0) > \lambda > 0$.

Поэтому при достаточно малых ε алгебраическая система $f(\theta, \psi) = g(\theta, \psi) = 0$ имеет стационарное решение (θ_{10}, ψ_{10}) и $\Pi(\theta_{10}, \psi_{10}) > \lambda / 2 > 0$. Теорема п. 3 гарантирует при этом неустойчивость системы 5.1 и тем самым системы (2.1).

Поступила 28 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каменков Г. В.* Избр. тр., т. 2. Устойчивость и колебания нелинейных систем. М. «Наука», 1972.
2. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
3. *Молчанов А. М.* Устойчивость в случае нейтральности линейного приближения. Докл. АН СССР, 1961, т. 141, № 1.
4. *Куницын А. Л.* Об устойчивости в критическом случае чисто мнимых корней при внутреннем резонансе. Дифференц. уравнения, 1971, т. 7, № 9.
5. *Хазина Г. Г.* Некоторые вопросы устойчивости при наличии резонансов. ПММ, 1974, т. 38, вып. 1.
6. *Красовский Н. Н.* Об устойчивости по первому приближению. ПММ, 1955, т. 19, вып. 5.