Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 4, 1980

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ В ОДНОМ КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

С. В. Медведев

(Москва)

Рассматривается задача об устойчивости по Ляпунову нулевого решения неавтономной системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, когда характеристичное уравнение линеаризованной системы имеет r корней, равных единице, и $2q$ комплексно-сопряженных корней, по модулю равных единице, а между характеристическими показателями и частотой невозмущенного движения могут существовать несколько целочисленных соотношений (внутренних резонансов). Выписывается нормальная форма уравнений. Процедура нормализации проводится с помощью метода Депри — Хори в модификации, аналогичной модификации Мерсмана [1]. В случае $r = 1$, $q = 1$ при наличии в системе одного внутреннего резонанса получены достаточные условия неустойчивости и асимптотической устойчивости.

Рассмотрим задачу об устойчивости нулевого решения системы неавтономных дифференциальных уравнений с голоморфными правыми частями вида

$$dx/dt = A(t)x + \sum_{l \geqslant 2} X^{(l)}(x, t), \quad X^{(l)}(0, t) \equiv 0 \tag{0.1}$$

$$A(t + \omega) = A(t), \quad X^{(l)}(x, t + \omega) = X^{(l)}(x, t), \quad x \in R^{r+2q}$$

Здесь $X^{(l)}(x, t)$ — голоморфные вектор-функции, периодические по t, с вещественным периодом ω, представляющие собой формы l-го порядка.

Предполагаем, что характеристичное уравнение системы (0.1) имеет r корней, равных единице, и $2q$ корней, по модулю равных единице ($\rho_s = \exp(\pm\sqrt{-1}\omega_s)$, $s = 1, \ldots, q$), которым соответствуют простые элементарные делители.

Известно [2], что задача об устойчивости систем типа (0.1) сводится к исследованию устойчивости нулевого решения системы автономных уравнений с $(r + q)$ нулевыми корнями, которым соответствуют также простые элементарные делители, при условии, что среди характеристических показателей $\lambda_s = \pm\sqrt{-1}\omega_s$, $\omega_s > 0$, $s = 1, \ldots, q$ матрицы $A(t)$ не существует целочисленных соотношений вида [3]

$$\langle \Lambda P^{(j)} \rangle = \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega} p_j^*, \quad p_j^* = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{0.2}$$

$$P^{(j)} = (p_1^{(j)}, \ldots, p_q^{(j)}), \quad |P^{(j)}| = p_1^{(j)} + \ldots + p_q^{(j)} = m_j \geqslant 2, \; p_s^{(j)} \geqslant 0$$

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_q), \quad j = 1, \ldots, \mu, \quad \mu \geqslant 1$$

где $P^{(j)}$ — q-мерный вектор с целочисленными компонентами $P_s^{(j)}$. Если (0.2) выполняется, то говорят, что имеет место один или несколько внутренних резонансов. В этом случае [2] задача сводится к задаче об устойчивости нулевого решения системы автономных уравнений с $(r + 2q)$ нулевыми корнями. Некоторые вопросы устойчивости в последнем случае были рассмотрены в работах [4–7].

Цель работы — получение структуры нормальной формы системы (0.1) при наличии (0.2) вплоть до членов m-го порядка ($m \geqslant 2$) в критическом случае r нулевых и $2q$ чисто мнимых характеристических показателей с простыми элементарными делителями, исследование устойчивости нулевого решения системы (0.1) при $r = 1$, $q = 1$, если существует одно соотношение (0.2) (случай $r = 1$, $q = 1$ для систем общего вида при отсутствии резонансов был исследован Г. В. Каменковым [2], случай $r = 2$, $q = 1$ для гамильтоновых систем — в работе [8]).

1. Нормальная форма уравнений. Предполагаем, что выполняется (0.2) и μ — произвольное конечное натуральное число (других внутренних резонансов, кроме (0.2), в системе не существует). Как известно [9], с помощью неособенного линейного преобразования с периодическими (периода ω) коэффициентами, не меняющего задачу об устойчивости, систему (0.1) можно записать в виде

$$(1.1)\qquad \dot z = \Lambda z + \sum_{l\geqslant 2} Z^{(l)}(z, \bar z, y, t), \quad z = (z_1, \ldots, z_q)'$$

$$\dot y = \sum_{l\geqslant 2} Y^{(l)}(z, \bar z, y, t), \quad y = (y_1, \ldots, y_r)'$$

Здесь z и $\bar z$ — комплексно-сопряженные векторы, $Z^{(l)}$, $Y^{(l)}$ — вектор-функции, компоненты которых — однородные формы l-го порядка с периодическими (периода ω) коэффициентами.

Получим нормальную форму уравнений (1.1) [10], проводя нормализацию не классическим способом, использующим, в частности, трудоемкую операцию подстановки ряда в ряд [1], а с помощью метода Деприт — Хори [11, 12], который удобен для реализации на ЭВМ [2]. Обобщение метода Деприт — Хори для негамильтоновых систем было дано в работах [12,13]. Ниже получим другое обобщение метода, используя при этом методику Мерсмана [1,14].

Напомним, что нормализующее преобразование координат определяется формулой

$$(1.2)\qquad Q^* = \exp(D_{W(Q)})\,Q, \quad D_{W(Q)} = \sum_{\beta=1}^{r+2q+1} W_\beta(Q)\frac{\partial}{\partial Q_\beta}$$

$$Q^* = (z_1, \ldots, z_q, \bar z_1, \ldots, \bar z_q, y_1, \ldots, y_r, t)$$

$$Q = (u_1, \ldots, u_q, v_1, \ldots, v_q, w_1, \ldots, w_r, t)$$

Здесь Q^*, Q — $(r + 2q + 1)$-мерные векторы старых и новых переменных, $D_{W(Q)}$ — оператор Ли с генератором $W(Q)$ [12, 13] (время t используется в качестве дополнительной координаты; при этом $W_{r+2q+1}(Q) \equiv 0$).

Генератор Ли $W(Q)$ представляется в виде суммы однородных форм с периодическими по t коэффициентами

$$(1.3)\qquad W(Q) = \sum_{i\geqslant 1} W_i(Q)$$

$$W_{\beta, i}(Q) = \sum_{|K_\beta|+|L_\beta|+|N_\beta|=i} B_\beta^*(t)\, u^{K_\beta} v^{L_\beta} w^{N_\beta}, \quad \beta = 1, \ldots, r + 2q$$

$$B_\beta^*(t+\omega) = B_\beta^*(t), \quad |K_\beta| = \sum_{s=1}^{q} k_{s\beta}, \quad |L_\beta| = \sum_{s=1}^{q} l_{s\beta}$$

[1] *Медведев С. В.* Об одном алгоритме нормализации негамильтоновых систем. ВИНИТИ, № 2719-78, 1978.

[2] *Маркеев А. П., Сокольский А. Г.* Некоторые вычислительные алгоритмы нормализации гамильтоновых систем. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, 1976, № 31.

$$|N_\beta| = \sum_{s=1}^{r} n_{s\beta}, \quad u^{K_\beta} v^{L_\beta} w^{N_\beta} = u_1^{k_{1\beta}} \ldots u_q^{k_{q\beta}} v_1^{l_{1\beta}} \ldots v_q^{l_{q\beta}} w_1^{n_{1\beta}} \ldots w_r^{n_{r\beta}}$$

$$(*) \Rightarrow (K_\beta, L_\beta, N_\beta)$$

где K_β, L_β, N_β — векторы с целочисленными компонентами (далее при записи однородных форм будем использовать векторные показатели степеней аналогично формуле (1.3)).

Было показано [12, 13], что образ любой аналитической функции $g\ (Q^*)$ при преобразовании (1.2) есть

$$g^*(Q) = \exp\ (D_{W(Q)})\ g\ (Q) \tag{1.4}$$

Используя подход Мерсмана [1, 14], разработанный им для гамильтоновых систем и удобный для задач нормализации нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, можно показать, что для нахождения образа $g^*\ (Q)$ из (1.4) достаточно воспользоваться рекуррентными соотношениями

$$g^*(Q) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^*(Q) \tag{1.5}$$

$$g_n^*(Q) = \sum_{k=0}^{n} g_{k,\, n-k}(Q); \quad g_{k,\, n}(Q) = \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{n} D_{m+1} g_{k-1,\, n-m}(Q) \tag{1.6}$$

$$g_{0,\, n}(Q) = g_n(Q); \quad k \geqslant 1; \quad D_{m+1} = D_{W_{m+1}}(Q)$$

где $g_n^*\ (Q)$ — однородные формы степени $(n + 1)$ относительно переменных Q с периодическими по t коэффициентами. В формулах (1.6) присутствуют промежуточные формы $g_{k-1,\, n-m}\ (Q)$.

Подставляя согласно (1.7) и (1.8) формы $g_{k-1,\, n-m}$ одна в другую, начиная с $k = 1$ можно получить $g_n^*\ (Q)$ как функцию исходных форм $g_i\ (Q)$, $i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ (в этом заключается описываемая модификация метода Депри — Хори)

$$g_n^*(Q) = \sum_{k=0}^{n} N_k g_{n-k}(Q), \quad n \geqslant 0 \tag{1.7}$$

$$N_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} \sum_{|l|=k} \prod_{j=1}^{i} D_{l_j}, \quad N_0 = 1, \quad |l| = \sum_{j=1}^{i} l_j, \quad k \geqslant 1$$

Из (1.7) следует, что если хотя бы одна форма $g_i\ (Q) \equiv 0$, $i \in \{1, 2, \ldots\}$, то при вычислении $g_n^*\ (Q)$ в правой части (1.7) всегда будут отсутствовать слагаемые $N_k g_i\ (Q)$. С помощью (1.5) — (1.7) процедура нормализации уравнений (1.1) сводится к решению следующего операторного уравнения:

$$D_i^* g_0\ (Q) = f_i\ (Q) - g_i^{**}\ (Q), \quad i = 1, 2, \ldots, m - 1 \tag{1.8}$$

Здесь $g_i\ (Q)$, $f_i\ (Q)$ — вектор-функции размерности $(r + 2q)$, компоненты которых — формы $(i + 1)$-го порядка в правых частях исходной системы (1.1) и нормализованной системы соответственно; в (1.8) компонентами вектор-функции $g_i^{**}\ (Q)$ той же размерности, что и $g_i\ (Q)$, $f_i\ (Q)$, служат формы $(i+1)$-го порядка с известными периодическими коэффициентами

$$g_i^{**}(Q)=g_i(Q)+\sum_{k=1}^{i-1}\Bigl[N_k g_{i-k}(Q)-\sum_{\beta=1}^{r+2q} f_{\beta,\,i-k}(Q)\frac{\partial}{\partial Q_\beta}N_kQ\Bigr]+$$

$$+\sum_{k=2}^{i}\frac{1}{k!}\Bigl[\sum_{|l|=i}\prod_{j=1}^{k}D_{l_j}g_0(Q)-\sum_{\beta=1}^{r+2q}f_{\beta,\,0}(Q)\frac{\partial}{\partial Q_\beta}\sum_{|l|=i}\prod_{j=1}^{k}D_{l_j}Q-$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\sum_{|l|=i}\prod_{j=1}^{k}D_{l_j}Q\Bigr],\quad |l|=\sum_{s=1}^{k}l_s,\ l_j\geqslant 1,\ i>1,\ g_1^{**}(Q)=g_1(Q)$$

Действие оператора D_i^* на формы первого порядка $g_0(Q)$ равно

$$D_i^*g_0(Q)=D_ig_0(Q)-\sum_{\beta=1}^{r+2q}g_{\beta,\,0}(Q)\frac{\partial W_i(Q)}{\partial Q_\beta}-\frac{\partial W_i(Q)}{\partial t}$$

Заметим, что члены первого порядка в результате нормализации не меняются, так что

$$g_{\alpha,\,0}(Q)=\sqrt{-1}\ \omega_\alpha u_\alpha,\quad g_{\alpha+q,\,0}(Q)=\bar g_{\alpha,\,0}(Q)$$
$$g_{\gamma,\,0}(Q)=0,\ \alpha=1,\ldots,\ q,\ \gamma=1,\ldots,r$$

Учитывая этот факт, запишем левую часть (1.8)

$$D_i^*g_{\alpha,\,0}(Q)=-W_{\alpha,\,i}(Q)\langle K_\alpha-L_\alpha-E_\alpha,\lambda\rangle-\frac{\partial W_{\alpha,\,i}(Q)}{\partial t}$$

$$D_i^*g_{\gamma,\,0}(Q)=-W_{\gamma,\,i}(Q)\langle K_\gamma-L_\gamma,\lambda\rangle-\frac{\partial W_{\gamma,\,i}(Q)}{\partial t}$$

$$E_\alpha=(0,\ldots,\ 1,\ldots,\ 0),\quad \lambda=(\lambda_1,\ldots,\ \lambda_q)'$$

(здесь и далее выписываются соотношения лишь для первой группы комплексно-сопряженных переменных $u_1,\ldots,\ u_q$). Тогда коэффициенты $B_\alpha^*(t)$ форм $W_i(Q)$, определяющих нормализующее преобразование, будут находиться из уравнений вида

$$dB_\alpha^*/dt+\varkappa_\alpha B_\alpha^*=G_\alpha^*(t)-A_\alpha^*(t),\quad \alpha=1,\ldots,\ r+2q \tag{1.9}$$
$$\varkappa_\alpha=\langle K_\alpha-L_\alpha-E_\alpha,\lambda\rangle,\quad \alpha=1,\ldots,\ q$$
$$\varkappa_\alpha=\langle K_\alpha-L_\alpha,\lambda\rangle,\quad \alpha=1,\ldots,\ r$$

где $A_\alpha^*(t)$ — искомые коэффициенты нормальной формы, $G_\alpha^*(t)$ — известные периодические функции. Решение уравнений (1.9) известно [2], а именно: из (1.9) следует, что при невыполнении условия

$$\varkappa_\alpha=\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}p_\alpha,\quad p_\alpha=0,\pm1,\pm2,\ldots,\quad \alpha=1,\ldots,r+2q \tag{1.10}$$

существует единственное периодическое (периода ω) решение относительно $B_\alpha^*(t)$ при любых $A_\alpha^*(t)$, в том числе и при $A_\alpha^*(t)=0$

$$B_\alpha^*(t)=\exp(\varkappa_\alpha t)\Bigl[\frac{\exp(\varkappa_\alpha\omega)}{1-\exp(\varkappa_\alpha\omega)}\int_0^\omega\exp(-\varkappa_\alpha t)G_\alpha^*(t)\,dt+ \tag{1.11}$$

$$+\int_0^t\exp(-\varkappa_\alpha\tau)G_\alpha^*(\tau)\,d\tau\Bigr]$$

Соответствующие таким K_α, L_α, N_α члены однородных форм в правых частях уравнений называют нерезонансными. Эти члены выбором коэффициентов нормализующего преобразования можно уничтожить. Напротив, решение (1.11) теряет смысл, если имеет место (1.10). Однако, если положить [4, 5]

$$A_\alpha^*(t) = d_\alpha^* \exp(-\varkappa_\alpha t), \qquad d_\alpha^* = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \exp(\varkappa_\alpha t)\, C_\alpha^*(t)\, dt$$

то уравнение (1.9) снова будет иметь единственное (отличное от (1.9)) периодическое решение

$$B_\alpha^*(t) = \exp(-\varkappa_\alpha t)\left[c + \int_0^t [\exp(\varkappa_\alpha \tau)\, G_\alpha^*(\tau) - d_\alpha^*]\, d\tau\right]$$

где c — произвольная постоянная. Соответствующие члены называются резонансными. Последовательно определяя резонансные и нерезонансные коэффициенты $B_\alpha^*(t)$, $A_\alpha^*(t)$ согласно описанной выше процедуре для $i = 2, 3, \ldots, m$, будем получать каждый раз уравнения типа (1.9); при этом правые части $f_i(Q)$ нормализованной системы будут содержать только лишь резонансные члены с постоянными, либо равными нулю (в случае вырождения) коэффициентами. Коэффициенты нормализующего преобразования (а также генератора $W(Q)$) будут получаться ограниченными ω-периодическими функциями.

Определим структуру резонансных членов нормальной формы. Прежде всего заметим, что уравнение (1.10) при $p_\alpha = 0$ допускает следующее простое решение при любом i:

(1.12) $\quad K_\alpha = L_\alpha + E_\alpha, \ \alpha = 1, \ldots, q; \ 2 \mid L_\alpha \mid = i - 1 - \mid N_\alpha \mid$

(1.13) $\quad K_\alpha = L_\alpha, \ \alpha = 1, \ldots, r; \ 2 \mid L_\alpha \mid = i - \mid N_\alpha \mid$

Соответствующие члены, называемые членами тождественного резонанса, всегда присутствуют в нормальной форме независимо от значений собственных частот ω_α, в любом порядке i в отличие от критического случая q пар чисто мнимых корней, где они встречаются только в членах нечетного порядка [2].

Кроме (1.12), (1.13), если существуют соотношения (0.2), уравнение (1.10) будет иметь другие две группы решений

(1.14) $\quad L_\alpha = \varepsilon P^{(s)} + H_\alpha^{(s)} - E_\alpha, K_\alpha = H_\alpha^{(s)}, p_\alpha = -\varepsilon p_s^*, \alpha = 1 \ldots, q$

$\quad L_\beta = \sigma P^{(s)} + H_\beta^{(s)}, \ \ K_\beta = H_\beta^{(s)}, \ \ p_\beta = -\sigma p_s^*, \ \ \beta = 1, \ldots, r$

(1.15) $\quad K_\alpha = \varepsilon P^{(s)} + H_\alpha^{(s)} + E_\alpha, \ L_\alpha = H_\alpha^{(s)}, \ p_\alpha = \varepsilon p_s^*, \ \alpha = 1, \ldots, q$

$\quad K_\beta = \sigma P^{(s)} + H_\beta^{(s)}, \ L_\beta = H_\beta^{(s)}, \ \ p_\beta = \sigma p_s^*, \ \ \beta = 1, \ldots, r, \ s = 1, \ldots, \mu.$

Здесь $H_\alpha^{(s)}$ — столбец с номером α s-й целочисленной матрицы, элементы которой неотрицательны и удовлетворяют условиям

$$2 \mid H_\alpha^{(s)} \mid = (m \pm 1 - \varepsilon m_s - \mid N_\alpha \mid) \geqslant 0, \ \alpha = 1, \ldots, q, \ \varepsilon = 1, 2, \ldots, \varepsilon_{1,2}$$

$$2\,|\,H_\beta{}^{(s)}\,| = (m - \sigma m_s - |\,N_\beta\,|) \geqslant 0,\quad \beta = 1,\ldots, r,\quad \sigma = 1,\ldots, \sigma_1,\ s = 1,\ldots, \mu$$

$$\varepsilon_{1,2} = E\,[(m \pm 1 - |\,N_\alpha\,|)\,/\,m_s],\quad \sigma_1 = E\,[(m - |\,N_\beta\,|)\,/\,m_s]$$

(индексы 1, 2, а также знаки плюс, минус относятся к (1.14), (1.15) соответственно). Выражения (1.14), (1.15) позволяют определить наиболее общую структуру нормальной формы уравнений (1.1) вплоть до членов m-го порядка ($m \geqslant 2$); отметим, что члены s-го внутреннего резонанса порядка m_s могут появиться лишь в формах порядка не ниже, чем $m_s - 1$.

Перейдем от переменных u_α, v_α, w_α к новым переменным ρ_α, φ_α по формулам

$$u_\alpha = \rho_\alpha \exp\left(\sqrt{-1}\,\varphi_\alpha + \sqrt{-1}\,\omega_\alpha t\right),\qquad v_\alpha = \bar{u}_\alpha,\quad w_\beta = w_\beta,$$
$$\alpha = 1,\ldots, q,\ \beta = 1,\ldots, r$$

Нормальная форма уравнений (1.1) в этом случае запишется так:

$$(1.16)\qquad \rho_\alpha{}^\cdot = \rho_\alpha \sum_{l\geqslant 2}^{m}\ \sum_{2|L_\alpha|=l-1-|N_\alpha|} a_\alpha{}^*\rho^{2L_\alpha} w^{N_\alpha} +$$
$$+ \sum_{s=1}^{\mu}\ \sum_{\substack{l=m_s-1\\ l\leqslant m\\ m_s\neq m}}^{m}\ \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon_1} \rho^{\varepsilon P^{(s)}-E_\alpha} \sum_{2|H_\alpha^{(s)}|=l+1-\varepsilon m_s-|N_\alpha|} P_\alpha{}^*(\varepsilon\theta_s)\,\rho^{2H_\alpha^{(s)}} w^{N_\alpha} +$$
$$+ \sum_{s=1}^{\mu}\ \sum_{\substack{l=m_s+1\\ l\leqslant m\\ m_s\neq m}}\ \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon} \rho^{\varepsilon P^{(s)}+E_\alpha} \sum_{2|H_\alpha^{(s)}|=l-1-\varepsilon m_s-|N_\alpha|} P_\alpha{}^*(\varepsilon\theta_s)\,\rho^{2H_\alpha^{(s)}} w^{N_\alpha} + \ldots$$

$$\theta_s{}^\cdot = \sum_{\alpha=1}^{q} p_\alpha^{(s)} \Bigg\{ \sum_{l\geqslant 2}^{m}\ \sum_{2|L_\alpha|=l-1-|N_\alpha|} b_\alpha{}^*\rho^{2L_\alpha} w^{N_\alpha} +$$
$$+ \sum_{s=1}^{\mu}\ \sum_{\substack{l=m_s-1\\ l\leqslant m\\ m_s\neq m}}^{m}\ \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon_1} \rho^{\varepsilon P^{(s)}-2E_\alpha} \sum_{2|H_\alpha^{(s)}|=l+1-\varepsilon m_s-|N_\alpha|} \frac{dP_\alpha{}^*(\varepsilon\theta_s)}{d(\varepsilon\theta_s)}\,\rho^{2H_\alpha^{(s)}} w^{N_\alpha} +$$
$$+ \sum_{s=1}^{\mu}\ \sum_{\substack{l=m_s+1\\ l\leqslant m\\ m_s\neq m}}^{m}\ \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon_2} \rho^{\varepsilon P^{(s)}} \sum_{2|H_\alpha^{(s)}|=l-1-\varepsilon m_s-|N_\alpha|} \frac{dP_\alpha{}^*(\varepsilon\theta_s)}{d(\varepsilon\theta_s)}\,\rho^{2H_\alpha^{(s)}} w^{N_\alpha} + \ldots \Bigg\}$$

$$w_\gamma{}^\cdot = \sum_{l\geqslant 2}^{m}\ \sum_{2|L_\gamma|=l-|N_\gamma|} a_\gamma{}^*\rho^{2L_\gamma} w^{N_\gamma} +$$
$$+ \sum_{s=1}^{\mu}\ \sum_{l=m_s}^{m}\ \sum_{\sigma=1}^{\sigma_1} \rho^{\sigma P^{(s)}} \sum_{2|H_\gamma^{(s)}|=l-\sigma m_s-|N_\gamma|} Q_\gamma{}^*(\sigma\theta_s)\,\rho^{2H_\gamma^{(s)}} w^{N_\gamma} + \ldots$$

$$\alpha = 1,\ldots, q;\quad \gamma = 1,\ldots, r;\quad \theta_s = \sum_{\alpha=1}^{q} p_\alpha^{(s)}\varphi_\alpha;\quad s = 1,\ldots,\mu$$

$$P_\alpha{}^*(\varepsilon\theta_s) = a_\alpha{}^*\cos(\varepsilon\theta_s) + b_\alpha{}^*\sin(\varepsilon\theta_s),\qquad a_\alpha{}^* = \operatorname{Re} d_\alpha{}^*;$$
$$b_\alpha{}^* = \operatorname{Im} d_\alpha{}^*$$
$$Q_\gamma{}^*(\sigma\theta_s) = d_\gamma^{**}\exp(-\sqrt{-1}\,\sigma\theta_s) + d_\gamma^{***}\exp(\sqrt{-1}\,\sigma\theta_s)$$
$$(*) \Rightarrow (H_\alpha^{(1)}, \varepsilon P^{(s)} + H_\alpha^{(s)} - E_\alpha, N_\alpha)\,(\varepsilon P^{(s)} + H_\alpha^{(s)} + E_\alpha,\quad H_\alpha^{(s)}, N_\alpha)$$
$$(**) \Rightarrow (H_\gamma^{(s)}, \sigma P^{(s)} + H_\gamma^{(s)}, N_\gamma),\qquad (***) \Rightarrow (\sigma P^{(s)} + H_\gamma^{(s)}, H_\gamma^{(s)}, N_\gamma)$$

Здесь невыписанные члены имеют порядок больший, чем m, и являются голоморфными периодическими по t функциями. Из (1.16) видно, что при наличии соотношений (0.2) система (1.1) посредством нормализации сводится к автономной системе с $r + 2q$ нулевыми корнями, которым соответствуют $r + 2q$ групп решений. Интересно отметить, что структура нормальной формы (1.16) не меняется в зависимости от того, имеют ли место соотношения (0.2) при $p_j^* = 0$, или при $p_j^* \neq 0$, $j \in \{1, \ldots, \mu\}$. Этот факт для случая $r = 0$ был установлен в работе [4].

2. Лемма о неустойчивости. Докажем следующую лемму, являющуюся модификацией известной теоремы Каменкова о неустойчивости [2]. Для частного случая двух степеней свободы подобная модификация была доказана ранее [1].

Лемма 2.1. Пусть с помощью некоторой замены переменных уравнения возмущенного движения приведены к виду

$$r^{\cdot} = r^m R^{(0)}(\varphi) + r^m \Xi(\varphi, r, t) \tag{2.1}$$
$$\varphi_s^{\cdot} = r^{m-1} F_s^{(0)}(\varphi) + r^{m-1} N_s(\varphi, r, t), \quad s = 1, \ldots, \nu$$

где $(\nu + 1)$ — порядок системы (2.1), m — порядок первых ненулевых членов в правых частях, $R^{(0)}(\varphi)$, $\Xi(\varphi, r, t)$ — голоморфные периодические функции вектора угловых переменных $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu)$, а также r, t; $F_s^{(0)}(\varphi)$, $N_s(\varphi, r, t)$, $s = 1, \ldots, \nu$ — голоморфные периодические функции при всех $\varphi \in [0, 2\pi]$, за исключением, быть может, конечного числа особых точек; $N_s(\varphi, 0, t) \equiv \Xi(\varphi, 0, t) \equiv 0$.

Пусть система уравнений

$$F_s^{(0)}(\varphi) = 0, \quad s = 1, \ldots, \nu \tag{2.2}$$

допускает частное вещественное решение относительно $\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu$

$$\varphi = \varphi^\circ = \text{const} \tag{2.3}$$

такое, что точка φ° из (2.3) не является особой для функций $F_s^{(0)}(\varphi)$, $N_s(\varphi, r, t)$.

Тогда, если

$$R^{(0)}(\varphi^0) > 0 \tag{2.4}$$

то имеет место неустойчивость по Ляпунову нулевого решения (2.1).

Доказательство. Линеаризуем в окрестности частного решения уравнения (2.1)

$$r^{\cdot} = r^m R^{(0)}(\varphi^\circ) + r^m \Phi(r, \eta, t) \tag{2.5}$$
$$\eta^{\cdot} = r^{m-1} C\eta + r^{m-1} H_c(r, \eta, t)$$
$$\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_\nu), \quad \eta_s = \varphi_s - \varphi_s^0, \quad s = 1, \ldots, \nu, \quad C = \| c_{si} \|$$

В уравнениях (2.5) голоморфные в некоторой области начала координат $B \in R^{\nu+1}$ функции $\Phi(r, \eta, t)$ и $H_s(r, \eta, t)$ удовлетворяют условиям $\Phi(0, 0, t) \equiv H_s(0, 0, t) \equiv 0$. Далее воспользуемся методом, предложенным Каменковым при доказательстве обобщения теоремы Брио и Буке [2].

---

[1] *Хазина Г. Г., Хазин Л. Г.* О возможности резонансной стабилизации системы осцилляторов. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, 1978, № 130.

Систему уравнений (2.5) можно свести к уравнениям вида

$$r\frac{d\eta_s}{dr}=\Big[\sum_{i=1}^{\nu}c_{si}\eta_i+rH_s(r,\eta,t)\Big]\big[R^{(0)}(\varphi^0)+\Phi(r,\eta,t)\big]^{-1} \tag{2.6}$$

В области B в силу (2.4) и голоморфности $\Phi(r, \eta, t)$ систему (2.6) можно представить следующим образом:

$$r\frac{d\eta_s}{dr}=\sum_{i=1}^{\nu}c_{si}^{*}\eta_i+\Gamma_s(r,\eta,t),\quad s=1,\ldots,\nu \tag{2.7}$$

где $\Gamma_s(r, \eta, t)$ — голоморфные в B функции с периодическими по t коэффициентами (в (2.7) время t рассматривается как параметр).

Согласно [2], существует одна определенная система функций $\eta_s(r, t)$, удовлетворяющих (2.7), такая, что $\eta_s(0, t)\equiv 0$; при этом $\eta_s(r, t)$ — голоморфные функции в B с периодическими по t коэффициентами либо относительно r

$$\eta_s(r,t)=h_s r+r\Psi_s(r,t),\quad s=1,\ldots,\nu \tag{2.8}$$

либо относительно r и $r\ln r$

$$\eta_s(r,t)=h_s r+r\Psi_s(r,r\ln r,t),\quad s=1,\ldots,\nu \tag{2.9}$$

Подставим найденное решение (2.8) или (2.9) в первое уравнение (2.5)

$$r^{\cdot}=r^mR^{(0)}(\varphi^0)+r^mH(r,t),\quad H(0,t)\equiv 0 \tag{2.10}$$

где $H(r, t)$—голоморфная в B периодическая по t функция. Из (2.10) следует, что при условии (2.4) $r(t)$ будет возрастать с ростом t независимо от m и невозмущенное движение, соответствующее системе (2.1), будет неустойчиво.

3. Исследование устойчивости при резонансе в случае $r = 1$, $q = 1$. Предполагаем, что существует внутренний резонанс вида

$$3\lambda=\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}p,\quad p=\pm1,\pm2,\ldots \tag{3.1}$$

Случай отсутствия соотношения (3.1) детально рассмотрен в [2].

Согласно (1.19), выпишем нормальную форму уравнений

$$\begin{aligned}\rho^{\cdot}&=D\rho^2\cos(\psi-3\theta)+\alpha\rho w+\ldots\\ \theta^{\cdot}&=D\rho\sin(\psi-3\theta)+\beta w+\ldots\\ w^{\cdot}&=dw^2+c\rho^2+\ldots\\ D&=(a^2+b^2)^{1/2},\quad \sin\psi=a/D,\quad \cos\psi=b/D\end{aligned} \tag{3.2}$$

где a, b, α, β, c, d — вещественные коэффициенты, определяемые по формулам первого параграфа через коэффициенты исходной системы. Можно показать, что если $d\neq 0$, то нулевое решение неустойчиво по Ляпунову и доказательство проводится с помощью теоремы о неустойчивости Каменкова [2]. Поэтому в дальнейшем предполагаем, что $d = 0$. Совершим переход от ρ, w к полярным координатам r и φ. Система (3.2) в новых переменных примет вид

$$\begin{aligned}r^{\cdot}&=r^2R^{(0)}(\varphi,\theta)+\ldots+r^{m+2}R^{(m)}(\varphi,\theta)+r^{m+2}H(\varphi,\theta,r,t)\\ \varphi^{\cdot}&=rF_1^{(0)}(\varphi,\theta)+\ldots+r^{m+1}F_1^{(m)}(\varphi,\theta)+r^{m+1}\Phi_1(\varphi,\theta,r,t)\\ \theta^{\cdot}&=rF_2^{(0)}(\varphi,\theta)+\ldots+r^{m+1}F_2^{(m)}(\varphi,\theta)+r^{m+1}\Phi_2(\varphi,\theta,r,t)\end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь $R^{(l)}(\varphi, \theta)$, $F_{1,2}^{(l)}(\varphi, \theta)$ $(l = 0, 1, \ldots, m)$, $H(\varphi, \theta, r, t)$, $\Phi_{1,2}(\varphi, \theta, r, t)$ — голоморфные периодические по φ, θ или φ, θ, t функции, в частности

$$R^{(0)}(\varphi, \theta) = (c + \alpha)\cos\varphi\sin^2\varphi + D\sin^3\varphi\cos(\psi - 3\theta)$$

$$F_1^{(0)}(\varphi, \theta) = \sin\varphi\,[\alpha\cos^2\varphi - c\sin^2\varphi + D\cos\varphi\sin\varphi\cos(\psi - 3\theta)]$$

$$F_2^{(0)}(\varphi, \theta) = D\sin\varphi\sin(\psi - 3\theta) + \beta\cos\varphi$$

Можно заметить, что система уравнений

$$F_i^{(0)}(\varphi, \theta) = 0, \quad i = 1, 2 \tag{3.4}$$

имеет вещественное решение при условии

$$D^4 + 4c\alpha D^2 - 4c^2\beta^2 \geqslant 0 \tag{3.5}$$

Решение (3.4) $\varphi = \varphi^\circ = \text{const}$, $\theta = \theta^\circ = \text{const}$ обладает свойством: если $\varphi^\circ \in [0, \pi / 2]$, то существует другое решение (3.4) $\varphi^{*\circ} = \varphi^\circ + \pi$ и наоборот. При этом величина $R^{(0)}(\varphi^\circ, \theta^0)$ может принимать положительное значение. Согласно лемме 2.1, имеет место неустойчивость по Ляпунову.

Замечание. Если условие (3.5) не выполняется, то вещественного решения (3.4) не существует. Этот случай требует отдельного рассмотрения.

Докажем следующую теорему.

Теорема 3.1. Пусть в (3.2) $d = 0$, $\beta = 0$. Если выполняется неравенство

$$D^2 \geqslant -4c\alpha \tag{3.6}$$

то нулевое решение (3.2) неустойчиво по Ляпунову. Если (3.6) нарушено, однако при $\varphi = \varphi^\circ$, $\theta = \theta^\circ$, являющимися решениями (3.4), справедливо соотношение

$$R^0(\varphi^\circ, \theta^\circ) = \ldots = R^{(m-1)}(\varphi^\circ, \theta^\circ) = 0, \quad R^{(m)}(\varphi^\circ, \theta^\circ) > 0, \quad m \geqslant 1 \tag{3.7}$$

то имеет место неустойчивость. Если же (3.6) не выполняется и

$$R^{(0)}(\varphi^\circ, \theta^\circ) = \ldots = R^{(m-1)}(\varphi^\circ, \theta^\circ) = 0, \quad R^{(m)}(\varphi^\circ, \theta^\circ) < 0, \quad m \geqslant 1 \tag{3.8}$$

то нулевое решение асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. В качестве функции Ляпунова возьмем следующую:

$$V = r\exp\left\{N\left[-\frac{\alpha + c}{3}\cos^3\varphi + c\cos\varphi + \frac{D}{3}\sin^3\varphi\cos(\psi - 3\theta)\right]\right\} \tag{3.9}$$

Производная по времени $V^\cdot$ в силу уравнений возмущенного движения равна

$$V^\cdot = Vr\Big\{R^{(0)}(\varphi, \theta) + N[F_1^{(0)}(\varphi, \theta)]^2 + N[F_2^{(0)}(\varphi, \theta)]^2 + \tag{3.10}$$
$$+ \sum_{k=1}^{2} F_k^{(0)}(\varphi, \theta)\,\Phi_k(\varphi, \theta, r, t) + \sum_{k=1}^{m} r^k R^{(k)}(\varphi, \theta) + r^m H(\varphi, \theta, r, t)\Big\}$$

При условии (3.6) или (3.7) $R^{(m)}(\varphi^\circ, \theta^\circ) > 0$, так, что функцию $V^\cdot$ можно сделать определенно-положительной для всех φ, $\theta \in [0, 2\pi]$, в том числе и тех, при которых $F^{(0)}_{1,2}(\varphi, \theta) = 0$, если в качестве N выбрать достаточно большое положительное число. Тогда функция V удовлетворяет теореме Ляпунова о неустойчивости [9].

Если выполнено условие (3.8) и $D^2 < -4c\alpha$, то можно показать, что $R^{(0)}(\varphi^\circ, \theta^\circ) = 0$; выберем в качестве N достаточно большое отрицательное число. Тогда везде в области, где $F^{(0)}_{1,2}(\varphi, \theta) \neq 0$, функцию $V^\cdot$ можно сделать определенно-отрицательной. При тех значениях φ, θ, при которых $F^{(0)}_{1,2}(\varphi, \theta) = 0$, имеем (3.8), так, что знак выражения в фигурных скобках в (3.10) по-прежнему отрицательный. Таким образом, V удовлетворяет теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости [9]. Теорема доказана.

Автор благодарит В. Г. Веретенникова за внимание к работе и обсуждение результатов.

Поступила 11 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mersman W. A.* A new algorithm for the Lie transformation. Celest. Mech., 1970, vol. 3, No. 1, p. 81—89.
2. *Каменков Г. В.* Избр. тр., т. 2. Устойчивость и колебания нелинейных систем. М., «Наука», 1971.
3. *Куницын А. Л., Медведев С. В., Тхай В. Н.* Разработка алгоритма и составление программы для решения на ЭВМ некоторых резонансных задач устойчивости динамических систем. В сб.: Проблемы устойчивости движения, аналитической механики и управления движением, Новосибирск, «Наука», 1979.
4. *Куницын А. Л.* Об устойчивости периодических движений при резонансе. ПММ, 1975, т. 39, вып. 1.
5. *Куницын А. Л.* Нормальная форма и устойчивость периодических систем при внутреннем резонансе. ПММ, 1976, т. 40, вып. 3.
6. *Хазина Г. Г.* Некоторые вопросы устойчивости при наличии резонансов. ПММ, 1974, т. 38, вып. 1.
7. *Куницын А. Л., Медведев С. В.* Об устойчивости при наличии нескольких резонансов. ПММ, 1977, т. 41, вып. 3.
8. *Сокольский А. Г.* Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе первого порядка. ПММ, 1977, т. 41, вып. 1.
9. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., т. 2, М., Изд-во АН СССР, 1956.
10. *Брюно А. Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений. Тр. Московск. матем. о-ва, 1971, т. 25.
11. *Deprit A.* Canonical transformations depending on a small parameter. Celest. Mech., 1969, vol. 1, No. 1, p. 90—106.
12. *Hori G.-I.* Theory of general perturbations for non-canonical systems. Publ. Astron. Soc. Japan, 1971, vol. 23, p. 567—587.
13. *Kamel A. A.* Perturbation method in the theory of nonlinear oscillations. Celest. Mech., 1970, vol. 3, No. 3, p. 90—106.
14. *Mersman W. A.* Explicit recursive algorithms for the construction of equivalant canonical transformations. Celest. Mech., 1971, vol. 3, No. 3, p. 384—389.