Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 4, 1980

УДК 531.36

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМАХ С МЯГКОЙ И ЖЕСТКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

А. А. Зевин

(Днепропетровск)

Рассматриваются неавтономные слабо диссипативные системы с одной степенью свободы с мягкой и жесткой нелинейностью; ограничения на степень нелинейности и величину возмущающего воздействия не накладываются. Для исследования устойчивости периодических колебаний предложен новый подход, основанный на оценках расстояний между нулями решений уравнения в вариациях. В результате установлены условия устойчивости и неустойчивости основных периодических колебаний, определяемые видом возмущающего воздействия и характером нелинейности. Доказаны теоремы о числе рассмотренных периодических решений и их амплитудно-частотных характеристиках.

Большинство исследований по устойчивости периодических колебаний выполнено асимптотическими методами и методом малого параметра и относится к квазилинейным и квазиляпуновским системам (см. [1−3] и др.). С помощью функций Ляпунова при весьма жестких ограничениях на степень нелинейности получены некоторые достаточные условия асимптотической устойчивости в целом [4]. Однако эти и другие известные результаты не могут быть использованы, если нелинейные и неавтономные члены достаточно велики. Некоторые системы такого типа исследовались приближенными аналитическими методами и с помощью моделирования [5,6]. В данной работе для широкого класса систем получены строгие результаты без ограничения величины нелинейных и неавтономных членов.

1. Рассматривается неавтономная нелинейная система с одной степенью свободы

$$x^{\cdot\cdot} + \mu\varphi(x, x^{\cdot}, \omega t) + f(x) = p(\omega t) \tag{1.1}$$

$$\mu > 0,\ f(x) = -f(-x),\ f(x)x \geqslant 0 \text{ при } |x| \leqslant c < \infty$$

$$\varphi(x, x^{\cdot}, \tau) = \varphi(x, x^{\cdot}, \tau + 2\pi), \quad p(\omega t) = \sum_k p_k \cos k\omega t,\ k = 1, 3, 5, \ldots$$

Предполагается, что $f(x)$ и $\varphi(x, x^{\cdot}, \omega t)$ дифференцируемы по своим аргументам и

$$\int_0^T \varphi_{x^{\cdot}}(x(t), x^{\cdot}(t), \omega t)\,dt > 0, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{1.2}$$

где $x(t)$ — любая функция вида

$$x(t) = \sum_k x_k \cos k\omega t, \quad k = 1, 3, 5, \ldots \tag{1.3}$$

Слагаемое $\mu\varphi(x, x^{\cdot}, \omega t)$ характеризует диссипативные силы, малость которых учитывается параметром μ. Заметим, что в диссипативных системах, как правило, $\varphi_{x^{\cdot}}(x, x^{\cdot}, \omega t) > 0$, т. е. условие (1.2) выполняется.

Предполагается, что $f(x)$ при $x>0$ выпукла (жесткая нелинейность) или вогнута (мягкая нелинейность). В последнем случае $f(x)$ может при некотором $x = c$ менять знак.

Пусть $x(t)$ — периодическое решение уравнения (1.1) при $\mu = 0$:

(1.4) $$x^{\cdot\cdot} + f(x) = p(\omega t)$$

Рассмотрим соответствующее уравнение в вариациях

(1.5) $$y^{\cdot\cdot} + a(t)y = 0, \quad a(t) = f_x(x(t))$$

Если его мультипликаторы не равны единице, то при достаточно малых μ существует единственное периодическое решение $x(t, \mu)$ уравнения (1.1), обращающееся при $\mu = 0$ в $x(t)$ [3]. Соответствующее уравнение в вариациях имеет вид

(1.6) $$y^{\cdot\cdot} + b(t, \mu)\, y^{\cdot} + a(t, \mu)\, y = 0$$
$$b(t, \mu) = \mu\varphi_{x^{\cdot}}(x(t,\mu), x^{\cdot}(t, \mu), \omega t), \quad a(t, \mu) = f_x(x(t, \mu)) + \mu\varphi_x(x(t, \mu), x^{\cdot}(t, \mu), \omega t)$$

При малых μ имеем $x(t, \mu) \approx x(t)$, $a(t, \mu) \approx a(t)$, $b(t, \mu) \approx 0$. Если мультипликаторы уравнения (1.5) действительны и не равны 1 или —1, то, как известно, решение $x(t)$ неустойчиво. Очевидно, что соответствующее решение $x(t, \mu)$ при малых μ также неустойчиво. Если мультипликаторы комплексны, то при малых μ и условии (1.2) мультипликаторы уравнения (1.6) лежат внутри единичной окружности [3]. Поэтому устойчивость тривиального решения уравнения (1.5) обеспечивает при указанных условиях асимптотическую устойчивость решения $x(t, \mu)$ (не гарантируя, как известно, устойчивости $x(t)$).

Предположим, что импульс возмущающей силы в течение первой четверти периода неотрицателен, т. е.

(1.7) $$P(t) = \int_0^t p(\omega s)\, ds \geqslant 0 \quad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2\omega}$$

Это условие, в частности, выполняется, если $p(\omega t)$ меняет знак два раза за период, так как при этом

(1.8) $$p(\omega t) \geqslant 0 \qquad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \pi/2\omega$$

Пусть $x(t)$ — решение уравнения (1.4) при начальных условиях $x(0) = -A > -c$ $(A > 0)$, $x^{\cdot}(0) = 0$. В силу (1.1) и (1.7) для больших значений параметра ω

$$x(t) < 0, \quad x^{\cdot}(t) = \int_0^t [p(\omega s) - f(x(s))]\, ds > 0 \quad \text{при } 0 < t \leqslant \frac{\pi}{2\omega}$$

Поэтому при уменьшении ω найдется такое $\omega(A)$, что $x(\pi/(2\omega)) = 0$. Очевидно, что соответствующее решение $x(t)$ — периодическое с периодом $T = 2\pi/\omega$, причем

(1.9) $$x(t) = -x(\pi/\omega - t), \quad x(t) = x(-t), \quad x^{\cdot}(t) > 0 \quad \text{при } 0 < t \leqslant \pi/2\omega$$

Как следует из (1.9), $x(t)$ имеет вид (1.3) и монотонно изменяется между экстремальными значениями $-A$ и A.

Таким образом, при условии (1.7) решение вида (1.9) существует для любого $A \in (0, c)$. Можно показать, что $\omega(A) \to \infty$ при $A \to 0$. Если $f(x)$ — возрастающая функция, то $\omega(A) \to \omega_0(A)$ при $A \to \infty$, где $\omega_0(A)$ — амплитудно-частотная характеристика свободных колебаний (скелетная кривая).

Наряду с (1.3) и (1.9) ниже будут рассмотрены периодические решения следующего типа:

(1.10) $\quad x(t) = -x(\pi/\omega - t), \; x(t) = x(-t), \; x(t) \geqslant 0$ при $0 \leqslant t \leqslant \pi/2\omega$

Решение (1.10) находится «в противофазе» с (1.9), меняет знак два раза за период, но, вообще говоря, не является монотонным на $[0, \pi/\omega]$. Если $f(x)$ возрастает, причем $f(x) > p_* = \max p(t)$ при $x > x_*$, то такое решение заведомо существует для любого $A > A_*$, где A_* — корень уравнения

$$F(A) - p_* A = 0, \quad F(A) = \int_0^A f(x)\, dx$$

Действительно, можно показать, что при $A > A_*$ выходящая из точки $x = A$, $v = x^\cdot = 0$ фазовая траектория уравнения (1.4) при $p = p_*$ (а следовательно, при любом $p(t) \leqslant p_*$) удовлетворяет неравенству $v(x) < 0$ на $[0, A)$. Таким образом, для любого ω имеем $x^\cdot(t) < 0$ при $x(t) > 0$, поэтому найдется такое $\omega(A)$, что $x(\pi/(2\omega)) = 0$. Соответствующее решение имеет вид (1.10), причем $x(t)$ монотонно убывает на $[0, \pi/\omega]$.

2. Рассмотрим сначала систему с мягкой нелинейностью. Предположим, что $f(x)$ — неубывающая функция, т. е.

(2.1) $\quad f_x(x) \geqslant 0$

Пусть $A(\omega)$ — амплитудно-частотная характеристика решения вида (1.9); $\omega_* = \inf \omega(A)$ при $A \in (0, \infty)$; $A_0(\omega)$ — скелетная кривая.

Теорема 1. В системе (1.4), (1.7), (2.1) с мягкой нелинейностью для любого $\omega \in (\omega_*, \infty)$ существует единственное периодическое решение вида (1.9). Функция $A(\omega)$ монотонно убывает и удовлетворяет неравенству $A(\omega) > A_0(\omega)$. Соответствующее решение $x(t, \mu)$ уравнения (1.1) при условии (1.2) и достаточно малых μ асимптотически устойчиво.

Доказательство. Покажем сначала, что тривиальное решение уравнения (1.5), где $x(t)$ имеет вид (1.9), устойчиво.

В системе с мягкой нелинейностью $f_x(x)$ — невозрастающая при $x > 0$ четная функция. Поэтому из (1.9) следует, что $a(t)$ имеет период $\theta = \pi/\omega$, возрастает (не убывает) на $[0, \theta]$ и удовлетворяет соотношению $a(t) = a(\theta - t)$.

Умножим (1.4) на $y^\cdot(t)$ и проинтегрируем в пределах от 0 до t. После простых преобразований с учетом (1.5) получим

(2.2) $$x^\cdot(s)\, y^\cdot(s)\Big|_0^t = \int_0^t p(\omega s)\, y^\cdot(s)\, ds - f(x(s))\, y(s)\Big|_0^t$$

или

$$(2.3)\qquad x^{\cdot}(s)\,y^{\cdot}(s)\,|_0^t=\int_0^t P(s)\,a(s)\,y(s)\,ds+P(s)\,y(s)\,|_0^t-f(x(s))\,y(s)\,|_0^t$$

Обозначим $y_1(t)$ — решение (1.5), удовлетворяющее условиям $y_1(0) = 0$, $y^{\cdot}_1(0) = 1$. При принятых предположениях $a(t) \geqslant 0$, $f(x(t)) \leqslant 0$, $P(t) \geqslant 0$ на $[0, {}^1/_2\,\theta]$; $x^{\cdot}(0) = 0$, $P(0) = 0$, поэтому $y^{\cdot}_1(t)$ не может обратиться в нуль в некоторой точке $t \leqslant {}^1/_2\theta$, так как при этом правая часть равенства (2.3) положительна. Следовательно, $y_1(t) > 0$, $y_1^{\cdot}(t) > 0$ на $(0, {}^1/_2\theta]$, откуда, используя тождество $a(t) = a(\theta - t)$, найдем, что $y_1(t) > 0$ на $(0, \theta]$.

Рассмотрим краевую задачу

$$(2.4)\qquad y^{\cdot\cdot} + \lambda a(t)y = 0,\quad y(t_0) = y(\theta + t_0) = 0$$

Функция $a(t)$ θ-периодична, поэтому на $[t_0, \theta + t_0]$ мера Лебега $L(u)$ множества значений t, в которых $a(t) \geqslant u$, не зависит от t_0. Так как $a(t)$ возрастает на $[0, {}^1/_2\theta]$ и $a(t) = a(\theta - t)$, то в соответствии с доказанной в [7] теоремой минимум первого собственного значения задачи (2.4) $\lambda_{\min}$ достигается при $t_0 = 0$. Выше показано, что решение $y_1(t)$ уравнения (2.4) при $\lambda = 1$ положительно на $(0, \theta]$, поэтому $\lambda_{\min} > 1$. Следовательно, расстояние между соседними нулями любого решения уравнения (1.5) превышает θ.

В соответствии с теоремой Н. В. Адамова [8,9] необходимым и достаточным условием устойчивости тривиального решения (1.5) является выполнение одного из неравенств

$$(2.5)\qquad D_n < \theta < d_{n+1}$$

где D_n, d_n — соответственно верхний и нижний предел расстояний между каким-нибудь нулем любого решения уравнения (1.5) и n-м следующим нулем. Как показано выше, в рассматриваемом случае $d_1 > \theta$, причем $d_1 < \infty$ в силу положительности $a(t)$. Таким образом, тривиальное решение уравнения (1.5) устойчиво, поэтому решение $x(t, \mu)$ при условии (1.2) и малых μ асимптотически устойчиво.

Докажем, что уравнение (1.4) имеет единственное решение вида (1.9). Предположим, что при некотором $\omega \in (\omega_*, \infty)$ существуют два таких решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Используя теорему о конечных приращениях, найдем, что разность $\Delta(t) = x_2(t) - x_1(t)$ удовлетворяет уравнению

$$(2.6)\qquad \Delta^{\cdot\cdot} + \alpha(t)\,\Delta = 0,\quad \alpha(t) = f_x(\chi(t)),\quad \chi \in (x_1, x_2)$$

Как показано выше, при $a(t) = a_1(t) = f_x(x_1(t))$ и $a(t) = a_2(t) = f_x(x_2(t))$ расстояния между соседними нулями любого решения $y(t)$ уравнения (1.5) превышают θ. Так как $f_x(x)$ — невозрастающая по $|x|$ функция, то $\alpha(t) \leqslant a_1(t)$ при $|x_2(t)| > |x_1(t)|$ и $\alpha(t) \leqslant a_2(t)$ при $|x_2(t)| < |x_1(t)|$, поэтому расстояния между нулями $\Delta(t)$ также должны превышать θ. Но в силу (1.9) $\Delta({}^1/_2\theta) = \Delta({}^3/_2\theta) = 0$. Полученное противоречие и доказывает единственность решения вида (1.9).

Покажем, что $A(\omega)$ монотонно убывает. Положив в (1.4) $\omega t = \tau$, получим

$$\omega^2 x^{\cdot\cdot} + f(x) = p(\tau) \tag{2.7}$$

Пусть $x(A, \omega, \tau)$ — решение (2.7) при $x(A, \omega, 0) = -A$, $x^{\cdot}(A, \omega, 0) = 0$. Условие $x(A, \omega, {}^1/_2\pi) = 0$, обеспечивающее периодичность решения, определяет в неявной форме функцию $A(\omega)$.

В силу дифференцируемости $f(x)$ решение $x(A, \omega, \tau)$ дифференцируемо по параметрам A и ω, причем $x_A = \partial x/\partial A$ и $x_\omega = \partial x/\partial\omega$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered}\omega^2 x_A^{\cdot\cdot} + a(\tau) x_A = 0, \quad x_A(0) = -1, \quad x_A^{\cdot}(0) = 0, \quad a(\tau) = \\ = f_x(x(A, \omega, \tau)) \\ \omega^2 x_\omega^{\cdot\cdot} + a(\tau) x_\omega = -2\omega x^{\cdot\cdot}(\tau), \quad x_\omega(0) = x_\omega^{\cdot}(0) = 0\end{gathered} \tag{2.8}$$

При $x_A({}^1/_2\pi) \neq 0$ существует производная

$$\frac{dA}{d\omega} = -\frac{x_\omega({}^1/_2\pi)}{x_A({}^1/_2\pi)} \tag{2.9}$$

Решение второго уравнения (2.8) можно представить в виде

$$\begin{gathered}x_\omega(\tau) = -2\omega\int_0^\tau x^{\cdot\cdot}(s)\, y(\tau, s)\, ds = \\ = 2\omega\left[\int_0^\tau x^{\cdot}(s)\, y_s(\tau, s)\, ds - x^{\cdot}(s)\, y(\tau, s)\,|_0^\tau\right], \quad y_s = \frac{\partial y(\tau, s)}{\partial s}\end{gathered} \tag{2.10}$$

где $y(\tau, s)$ удовлетворяет первому уравнению (2.8), $y(s, s) = 0$ $y^{\cdot}(s, s) = 1$. Как известно, $y_s(\tau, s)$ — также решение (2.8), причем $y_s(s, s) = -1$, $y_s^{\cdot}(s, s) = 0$, т. е. $y_s \mid (\tau, 0) = x_A(\tau)$.

Как следует из полученных выше результатов, $x_A(\tau) < 0$ на $[0, {}^1/_2\pi]$, поэтому $y_s(\tau, s) < 0$ при $0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant {}^1/_2\pi$, $x_A({}^1/_2\pi) < 0$. Учитывая, что $x^{\cdot}(\tau) > 0$ на $(0, {}^1/_2\pi]$, $x^{\cdot}(0) = 0$, из (2.10) и (2.9) найдем $x_\omega({}^1/_2\pi) < 0$, $dA/d\omega < 0$. Таким образом, $A(\omega)$ монотонно убывает на (ω_*, ∞).

Для доказательства неравенства $A(\omega) > A_0(\omega)$ рассмотрим зависящее от параметра ε решение $x(A, \varepsilon, \tau)$ уравнения

$$\omega^2 x^{\cdot\cdot} + f(x) = \varepsilon p(\tau), \quad x(A, \varepsilon, 0) = -A, \quad x^{\cdot}(A, \varepsilon, 0) = 0$$

Функция $A(\varepsilon, \omega)$ определяется условием $x(A, \varepsilon, {}^1/_2\pi) = 0$; очевидно, что $A_0(\omega) = A(0, \omega)$, $A(1, \omega) = A(\omega)$. Производная $x_\varepsilon = \partial x/\partial\varepsilon$ удовлетворяет уравнению

$$\omega^2 x_\varepsilon^{\cdot\cdot} + a(\tau) x_\varepsilon = p(\tau), \quad x_\varepsilon(0) = x_\varepsilon^{\cdot}(0) = 0$$

Представив его решение в виде

$$x_\varepsilon(\tau) = \int_0^\tau p(s)\, y(\tau, s)\, ds = -\int_0^\tau P(s)\, y_s(\tau, s)\, ds + P(s)\, y(\tau, s)\,|_0^\tau$$

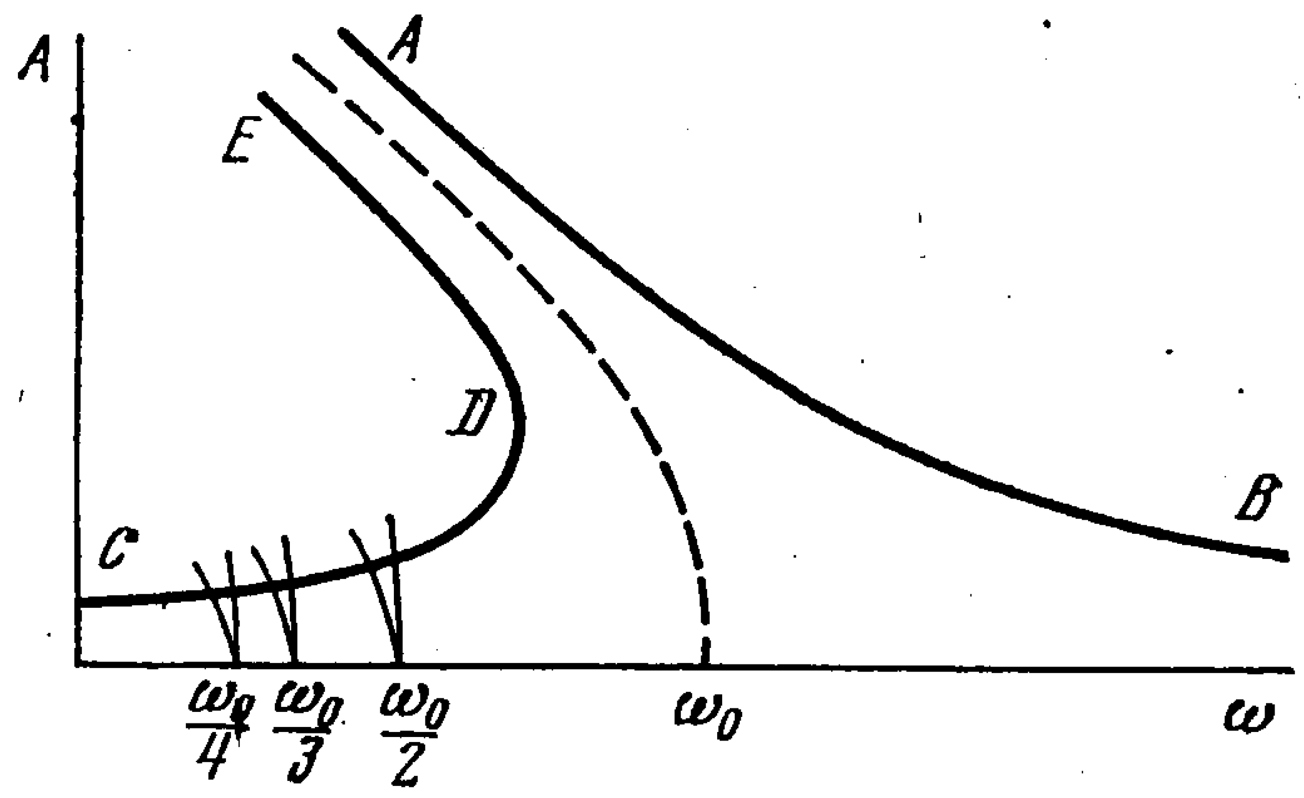
и учитывая (1.7) и полученные выше результаты, найдем, что $x_\varepsilon(^1/_2\pi) > 0$. Следовательно, $\partial A/\partial\varepsilon = -x_\varepsilon(^1/_2\pi)\cdot x_A^{-1}(^1/_2\pi) > 0$, т. е. $A(\varepsilon, \omega)$ монотонно возрастает при изменении ε от 0 до 1.

Таким образом, все утверждения теоремы доказаны.

Замечание 1°. Если выполнено условие (1.8), то, используя (2.2) вместо (2.3), можно получить неравенство $d_1 > \theta$ без предположения о монотонности $f(x)$. Поэтому здесь выводы о существовании и единственности решения вида (1.9), а также о характере $A(\omega)$ сохраняются. Утверждение об устойчивости $x(t, \mu)$ будет справедливым, если $d_1 < \infty$, т. е. если решения (1.5) являются осциллирующими.

В соответствии с доказанной теоремой амплитудно-частотная характеристика рассмотренного решения имеет вид кривой AB (фиг. 1).

При $\omega > \omega_0 = \sqrt{f_x(0)}$ (ω_0 — частота собственных «малых» колебаний системы) справедлива более общая



Фиг. 1

Теорема 2. В системе (1.4), (2.1) с мягкой нелинейностью для любого $\omega > \omega_0$ T-периодическое решение существует, единственно и имеет вид (1.3). Соответствующее решение уравнения (1.1) при условии (1.2) и достаточно малых μ асимптотически устойчиво.

Доказательство. Так как в системе с мягкой нелинейностью период свободных колебаний $T_0(A) \geqslant 2\pi/\omega_0$, то при $\omega > \omega_0$ существование хотя бы одного T-периодического решения следует из теоремы Опяля [4]. Пусть $x_2(t)$ — второе такое решение, тогда из уравнения (2.6), где $0 \leqslant \alpha(t) \leqslant f_x(0) = \omega_0^2$, найдем, что $\Delta(t) = x_2(t) - x_1(t)$ осциллирует, причем минимальное расстояние между нулями $d_1 \geqslant \pi/\omega_0 > \pi/\omega$. Последнее, однако, невозможно, так как $\Delta(t)$ имеет период $2\pi/\omega$. Полученное противоречие доказывает единственность $x_1(t)$.

Так как $f(x) = -f(-x)$, $p(\omega t) = p(-\omega t), p(\omega t) = -p(\pi - \omega t)$, то функции $-x_1(\pi/\omega - t)$ и $x_1(-t)$ также удовлетворяют уравнению (1.4). В силу единственности решения $x_1(t)$ это означает, что $x_1(t) = -x_1(\pi/\omega - t)$, $x_1(t) = x_1(-t)$, т. е. $x_1(t)$ имеет вид (1.3). Поэтому соответствующий коэффициент $a(t)$ в (1.5) имеет период $\theta = \pi/\omega < d_1$, что с учетом (2.5) доказывает последнее утверждение теоремы.

Замечание 2°. Решение $x_1(t)$ имеет также период nT, где n — любое целое число. Поэтому из существования и единственности $x_1(t)$ следует, что в системе (1.4), (2.1) с мягкой нелинейностью невозможны субгармонические колебания с периодом $nT < 2\pi/\omega_0$.

3. Перейдем к анализу решений вида (1.10).

Теорема 3. В системе (1.4) с мягкой нелинейностью для любого $\omega \in [\omega_0/3, \omega_0]$ существует не более двух решений вида (1.10). Если существуют два таких решения, то при условии (1.8) или условиях (1.7), (2.1) решение с большей амплитудой неустойчиво.

Доказательство. Предположим, что при $\omega > \omega_0/3$ существуют три решения $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ ($x_3(0) > x_2(0) > x_1(0)$), имеющие вид (1.10). Функции $\Delta_1(t) = x_2(t) - x_1(t)$, $\Delta_2(t) = x_3(t) - x_2(t)$ удовлетворяют уравнению (2.6) с коэффициентами $\alpha_1(t) = f_x(\chi_1(t)) \leqslant \omega_0^2$, $\alpha_2(t) = f_x(\chi_2(t)) \leqslant \omega_0^2$, где $\chi_1 \in (x_1, x_2)$, $\chi_2 \in (x_2, x_3)$. Учитывая, что $\omega > \omega_0/3$, $\Delta_1(t) = \Delta_1(-t)$, $\Delta_2(t) = \Delta_2(-t)$, $\Delta_1(\pi/2\omega)) = \Delta_2(\pi/2\omega)) = 0$, найдем, что $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ на $[0, \pi/(2\omega)]$, так как в противном случае расстояние между некоторыми соседними нулями было бы меньше π/ω_0. Таким образом, $x_3(t) > x_2(t) > x_1(t) \geqslant 0$ на $[0, \pi/(2\omega)]$, откуда $\alpha_2(t) \leqslant \alpha_1(t)$, причем $\alpha_2(t) \equiv \alpha_1(t)$ только при $f(x) = \omega_0^2 x$, где, однако, рассматриваемая ситуация невозможна в силу единственности решения. Поэтому равенства $\Delta_1(\pi/(2\omega)) = 0$ и $\Delta_2(\pi/(2\omega)) = 0$ исключают одно другое, т. е. существует не более двух решений рассматриваемого типа.

Докажем неустойчивость $x_2(t)$. Соответствующий коэффициент в (1.5) $a_2(t) = f_x(x_2(t)) \leqslant \alpha_1(t)$, поэтому $y_2(t)$ ($y_2(0) = 1$, $y_2^{\cdot}(0) = 0$) не имеет нулей на $[-\pi/(2\omega), \pi/(2\omega)]$. Следовательно, верхняя грань расстояний между соседними нулями $D_1 > \theta$. Покажем, что нижняя грань $d_1 < \theta$.

Выберем на $[0, \pi/(2\omega)]$ такую точку t_1, что $x_2^{\cdot}(t_1) = 0$, $x_2^{\cdot}(t) < 0$ при $t_1 < t \leqslant \pi/(2\omega)$, и рассмотрим решение $y(t)$ ($y(t_1) = 0$, $y^{\cdot}(t_1) = 1$) уравнения (1.5). Так как $x(\pi/(2\omega)) = 0$, $x^{\cdot}(t_1) = 0$, $x^{\cdot}(\pi/(2\omega)) < 0$, то, полагая в (2.2) или (2.3) нижний предел равным t_1, верхний — $\pi/(2\omega)$ и учитывая соответственно условия (1.8) или (1.7) и (2.1), найдем, что $y^{\cdot}(t)$ имеет на $[t_1, \pi/(2\omega)]$ не менее одного нуля, иначе знаки обеих частей равенства (2.2) или (2.3) были бы различны. Если $y^{\cdot}(\pi/(2\omega)) < 0$, то из тождества $a(t) = a(\pi/w - t)$ следует, что $y(t)$ имеет нуль на $[\pi/(2\omega), \pi/\omega]$. Если $y^{\cdot}(\pi/(2\omega)) > 0$, то $y^{\cdot}(t)$ имеет на $[t_1, \pi/(2\omega)]$ не менее двух нулей. Между ними найдется точка t_2, в которой $y^{\cdot\cdot}(t_2) = 0$ и в силу (1.5) $y(t_2) = 0$ или $a(t_2) = 0$. В последнем случае $a(t) \leqslant 0$ на $[t_1, t_2]$, так как $x_2(t)$ убывает, а $f_x(x_2(t))$ возрастает на $[t_1, t_2]$. Следовательно, если $y(t) > 0$, то в силу (1.5) $y^{\cdot\cdot}(t) \geqslant 0$ на $[t_1, t_2]$, поэтому $y^{\cdot}(t)$ не может иметь здесь нулей. Полученное противоречие показывает, что $y(t_2) = 0$.

Таким образом, $d_1 < \theta < D_2$, что в соответствии с критерием (2.5) свидетельствует о неустойчивости решения $x_2(t)$. Теорема доказана.

Если при $\omega < \omega_0/3$ для решений вида (1.10) имеет место неравенство $|x_2(t)| \geqslant |x_1(t)|$, то утверждение о неустойчивости $x_2(t)$ остается справедливым, так как сохраняются все приведенные выше рассуждения.

Можно показать, что если $p(\omega t) > 0$ на $[0, \pi/(2\omega)]$, то амплитудно-частотная характеристика $A(\omega)$ решения вида (1.10) лежит слева от скелетной кривой. При $p = p_1 \cos \omega t$, как известно, $A(\omega)$ имеет вид кривой CDE (фиг. 1). В соответствии с теоремой 3 решения, отвечающие ветви DE, неустойчивы.

Заметим, что для квазилинейной системы при гармоническом воздействии устойчивость ветви AB и неустойчивость DE общеизвестны (см. [1,3] и др.) Теоремы 1—3 обобщают эти результаты на широкий класс возмущающих воздействий, не ограничивая их величину, а также степень нелинейности системы.

Пусть $x(t)$ — решение вида (1.3). Учитывая, что $f_x(A) \leqslant a(t) \leqslant \omega_0^2$, и используя критерий Жуковского [10], найдем достаточные условия устойчивости тривиального решения (1.5)

$$\frac{\omega_0}{n+1} \leqslant \omega \leqslant \frac{\sqrt{f_x(A)}}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.1}$$

Если эти неравенства выполняются для какого-нибудь n, то решение $x(t, \mu)$ при условии (1.2) и малых μ асимптотически устойчиво. Условия (3.1) могут быть использованы при анализе устойчивости колебаний с малой амплитудой и частотой (соответствующих, например, ветви CD на фиг. 1).

Так как $a_n \neq D_n$ при $a(t) \neq \text{const}$, то на амплитудно-частотной характеристике $A(\omega)$ всегда имеются области, где условия устойчивости (2.5) не выполняются. Как видно из (3.1), они расположены слева от значений ω_0/n, стягиваясь к ним при $A \to 0$ (фиг. 1). Отметим, что такие области неустойчивости отсутствуют в квазилинейных и квазиляпуновских системах.

4. Перейдем к исследованию систем с жесткой нелинейностью. Рассмотрим сначала решения вида (1.9). Как показано выше, при условии (1.7) они существуют для любого A, причем $\lim \omega(A) = \infty$, при $A \to 0$, $\lim \omega(A) = \lim \omega_0(A) = k$ при $A \to \infty$, где $k^2 = \lim\, [f(A) A^{-1}]$ при $A \to \infty$ [4].

Пусть $y_1(t)$ $(y_1(0) = 0,\ y_1^{\cdot}(0) = 1)$, $y_2(t)$ $(y_2(0) = 1,\ y_2^{\cdot}(0) = 0)$ — решения уравнения (1.5). Как видно из доказательства теоремы 1, независимо от характера нелинейности $y_1(t) > 0$ на $(0, \pi/\omega]$, поэтому $y_2(t)$ имеет на $[0, \pi/(2\omega)]$ не более одного нуля. Следовательно, если $x_A(\pi/2) = -y_2(\pi/(2\omega)) = 0$, то в (2.10) $y_s(\tau, s) < 0$ при $0 \leqslant s \leqslant \tau < \pi/2$, в результате $x_\omega(\pi/2) < 0$. Таким образом, определяемая уравнением $x(A, \omega, {}^1/_2\pi) = 0$ амплитудно-частотная характеристика $A(\omega)$ представляет собой гладкую кривую без особых точек. Поэтому для любого $\omega \in (\omega_*, \infty)$ $(\omega_* = \inf \omega(A))$ существует по крайней мере одно решение вида (1.9); если $k > \omega_*$, то при $\omega_* < \omega < k$ число таких решений превышает единицу.

Теорема 4. В системе (1.4), (1.7) с жесткой нелинейностью при $\omega_0 < \omega < k$ существуют два решения $x_1(t)$, $x_2(t)$ $(A_1 < A_2)$ вида (1.9), при $\omega > k$ — одно решение $x_1(t)$. Решение $x_2(t)$ неустойчиво; при условии (1.2) и достаточно малых μ решение $x(t, \mu)$ уравнения (1.1), соответствующее $x_1(t)$, асимптотически устойчиво.

Доказательство. Пусть $x_1(t)$, $x_2(t)$ — решения вида (1.9) при $\omega \in (\omega_*, k)$. Так как $f_x(x)$ возрастает (не убывает) по $|x|$, то при $|x_2| > |x_1|$

$$a_1(t) \leqslant \alpha_1(t) \leqslant a_2(t), \quad a_1(t) = f_x(x_1(t)), \quad a_2(t) = f_x(x_2(t)) \tag{4.1}$$

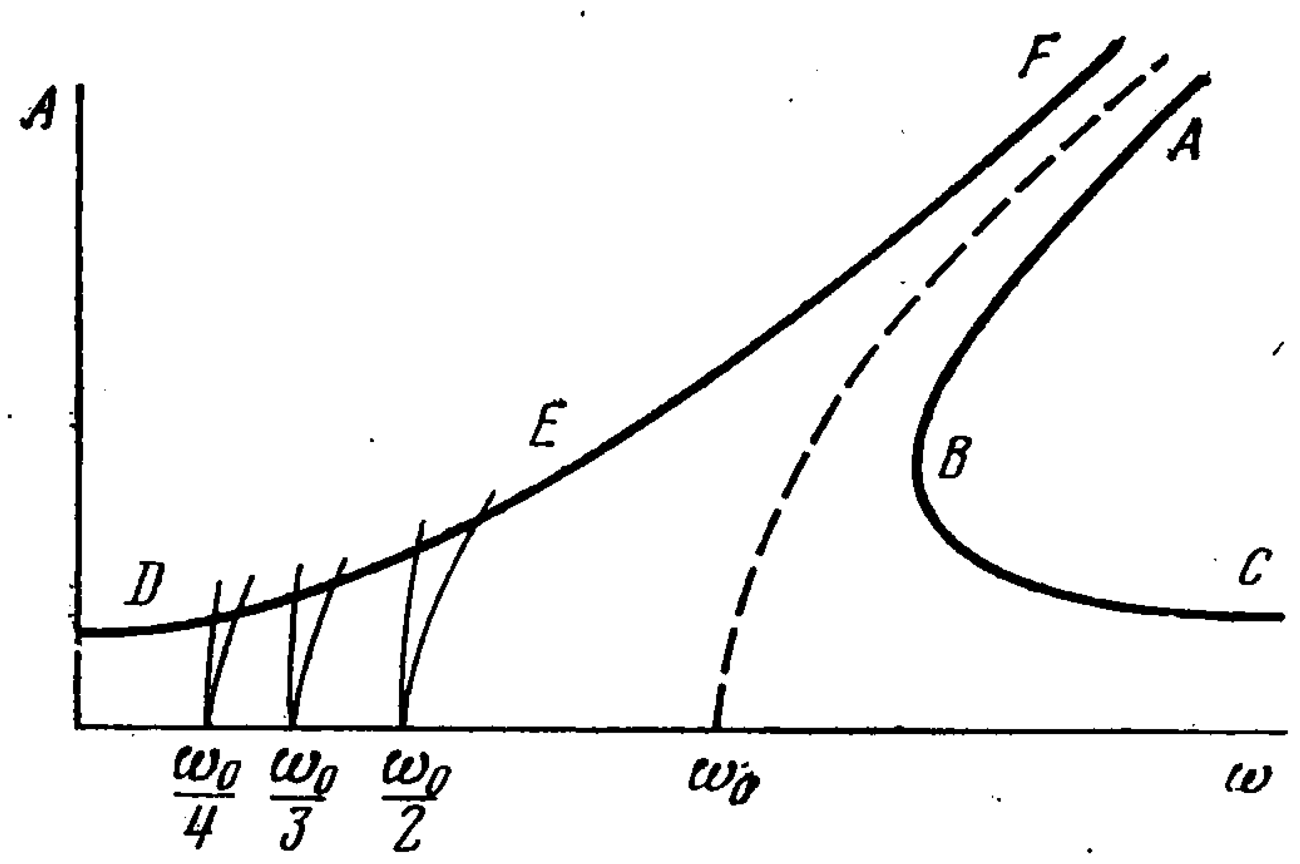
Как показано выше, $y_1(t) > 0$ на $(0, \theta]$ при $a(t) = a_1(t)$ и $a(t) = a_2(t)$, поэтому в обоих случаях $D_1 > \theta$. Отсюда также следует, что $y_2(t)$, а также $\Delta(t)$ (в силу правого неравенства (4.1)) имеют на $[0, \theta]$

не более одного нуля. Так как $\Delta(-\theta/2) = \Delta(\theta/2) = 0$, то $y_2(t)$ при $a(t) = a_2(t)$ имеет два нуля на $(-\theta/2, \theta/2)$; следовательно, при $a(t) = a_2(t)$ имеет место неравенство $d_1 < \theta < D_1$, т. е. решение $x_2(t)$ неустойчиво.

В силу левого неравенства (4.1) $y_2(t)$ при $a(t) = a_1(t)$ не имеет нулей на $[-\theta/2, \theta/2]$. Так как $a_1(t)$ монотонно убывает (не возрастает) на $[0, \theta/2]$ и $a_1(t) = a_1(-t)$, то, как показано при доказательстве теоремы 1, расстояние между соседними нулями любого решения также превышает θ. Таким образом, $d_1 > \theta$ при $a(t) = a_1(t)$, поэтому решение $x_1(t, \mu)$ при условии (1.2) и достаточно малых μ асимптотически устойчиво.

Так как для одного из любых двух решений $x_1(t)$, $x_2(t)$ имеем $d_1 > \theta$, для другого — $d_1 < \theta$, то число решений при $\omega \in (\omega_*, k)$ равно двум.

Если $k < \infty$, то для доказательства теоремы при $\omega > k$ рассмотрим систему с жесткой характеристикой $f^*(x)$, такой, что $f^*(x) = f(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant x^*$, $k^{*2} = \lim f^*(A) A^{-1} = \infty$ при $A \to \infty$. Для соответствующего решения $x_1^*(t)$ теорема справедлива при любом ω. Но $x_1(t) = x_1^*(t)$ при $A < x^*$, а значение x^* может быть выбрано сколь угодно большим, поэтому теорема верна и для решения $x_1(t)$. Очевидно, что приведенные рассуждения применимы и в случае $k = \omega_*$, т. е. когда решение $x_2(t)$ отсутствует. Теорема доказана.



Фиг. 2

Таким образом, амплитудно-частотная характеристика $A(\omega)$ состоит из двух однозначных ветвей $A_1(\omega)$ и $A_2(\omega)$, соответствующих решениям $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Как видно из доказательства теоремы 1, $x_1(t)$ монотонно убывает. Если $p(\omega t) \geqslant 0$ на $[0, \pi/(2\omega)]$, то аналогично можно доказать, что $A_2(\omega)$ монотонно возрастает и удовлетворяет неравенству $A_2(\omega) < A_0(\omega)$, т. е. $A(\omega)$ имеет вид кривой ABC (фиг. 2). При более слабом условии (1.7) ветвь AB может, вообще говоря, пересекать скелетную кривую, т. е. амплитуды неустойчивых решений могут превышать амплитуды свободных колебаний.

Для анализа устойчивости периодических колебаний с малой частотой и амплитудой, имеющих при $\mu = 0$ вид (1.3), можно воспользоваться критерием Жуковского [10]. Учитывая, что $f_x(A) \geqslant a(t) \geqslant \omega_0^2$, получим

$$\frac{\sqrt{f_x(A)}}{n+1} \leqslant \omega \leqslant \frac{\omega_0}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.2}$$

Выполнение этих неравенств для какого-либо n гарантирует устойчивость тривиального решения (1.5), а при условии (1.2) и малых μ — асимптотическую устойчивость решения $x(t, \mu)$. Как видно из (4.2), области неустойчивости расположены справа от значений ω_0/n, стягиваясь к ним при $A \to 0$ (фиг. 2). Заметим, что такие области неустойчивости в системе, описываемой уравнением Дуффинга, изучались в [6].

Остановимся на решениях вида (1.10). Как показано в п. 1, при $A \geqslant A_*$ функция $x(t)$ и, следовательно, соответствующий коэффициент $a(t)$ монотонно убывают на $[0, \pi/(2\omega)]$. Поэтому из теоремы [7] следует, что максимум первого собственного значения краевой задачи (2.4) $\lambda_{\max}$ достигается при $t_0 = 0$. При доказательстве теоремы 3 установлено, что при условии (1.7) решение $y_1(t)$ $(y_1(0) = 0, \dot{y}_1(0) = 1)$ уравнения (1.5) имеет нуль на $(0, \theta)$. Поэтому $\lambda_{\max} < 1$ и, следовательно, верхняя грань расстояний между соседними нулями $D_1 < \theta$.

Если $p(\omega t) \equiv 0$, то, как видно из (2.2), $\dot{y}_1(\theta/2) = 0$, откуда $y_1(\theta) = 0$, т. е. при свободных колебаниях $\overset{\circ}{D}_1 = \theta$. При увеличении ω имеем $A(\omega) \to A_0(\omega)$, $D_1 \to D_1^0$, в результате, начиная с некоторого ω, выполняется условие устойчивости $D_1 < \theta < d_2$. Таким образом, при условиях (1.2), (1.7) и малых μ решение $x(t, \mu)$, соответствующее резонансным колебаниям вида (1.10) (кривой EF на фиг. 2), асимптотически устойчиво. Так как $a(t) \leqslant f_x(A)$, то достаточное условие устойчивости (обеспечивающее неравенство $\theta < d_2$) имеет вид $\omega \geqslant {}^1/_2 \sqrt{f_x(A)}$.

Если при фиксированном ω увеличивать $p(\omega t)$, то $x(t)$ и коэффициент $a(t)$ в (1.5) будут возрастать, а величины d_n, D_n уменьшаться, в результате для решения (1.10) (если, конечно, оно существует) будут последовательно выполняться условия устойчивости и неустойчивости. Заметим, что для уравнения Дуффинга чередование устойчивых и неустойчивых решений при возрастании возмущающей силы изучалось теоретически и экспериментально в [5].

Поступила 9 VII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., «Наука», 1974.
2. *Кац А. М.* Вынужденные колебания нелинейных систем с одной степенью свободы, близких к консервативным. ПММ, 1955, т. 19, вып. 1.
3. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
4. *Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. М., «Наука», 1974.
5. *Хаяси Т.* Нелинейные колебания в физических системах. М., «Мир», 1968.
6. *Szemplinska-Stupnicka W.* Higher harmonic oscillations in heteronomous nonlinear systems with one degree of freedom. Internal. J. Nonlinear Mech., 1968, vol. 3, Nol 1. (Рус. перев.: «Механика. Период. сб. перев. ин. статей», 1969, № 6.)
7. *Schwarz B., Beesack P. R.* On the zeros of solutions of second order linear differential equations. Canad. J. Math., 1958, vol. 8, No. 4.
8. *Адамов Н. В.* О колебаниях интегралов уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами и некоторых условиях устойчивости. Матем. сб., 1935, т. 42, № 6.
9. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М., «Наука», 1972.
10. *Жуковский Н. Е.* Условия конечности интегралов уравнения $d^2y/dx^2 + py = 0$. Собр. соч., т. 1. М.— Л., Гостехтеориздат, 1948.