Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 4, 1980

УДК 531.31+62—50

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДВУХТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Л. Д. Акуленко

(Москва)

Получена оценка близости решений исходной и усредненной краевых задач для стандартных систем [1–6]. Эти задачи возникают в исследованиях оптимальных колебательных процессов при помощи необходимых условий оптимальности принципа максимума [7], (см., например, [8–12]). Рассмотрены конкретные постановки задач оптимального управления, имеющие механическое содержание.

1. Исходные предположения и постановка задачи. Ряд прикладных задач оптимального управления квазилинейными колебательными процессами при помощи малых по величине управляющих воздействий приводит к исследованию краевых задач принципа максимума для стандартных систем на заданном асимптотически большом интервале времени. Объединяя оскулирующую фазовую переменную и соответствующую ей сопряженную в один медленный вектор и исключая при соответствующих предположениях (см. п. 3) линейно входящие в соотношения трансверсальности на левом и правом концах векторы множителей Лагранжа [10,11], получим двухточечную краевую задачу

$$\dot{x} = \varepsilon X(t, x), \quad M(x(0), x(T)) = 0 \tag{1.1}$$

Здесь x — искомый медленный n-вектор; t — независимая переменная (время), $t \in [0, T]$, $T = \Theta\varepsilon^{-1}$, $\Theta = \mathrm{const} > 0$; ε — малый числовой параметр, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$; $X(t, x)$, $M(y, z)$ — заданные вектор-функции размерности $n \geqslant 2$. Заметим, что обычно в краевых задачах принципа максимума граничное условие (1.1) состоит из двух соотношений в начале ($t = 0$) и конце ($t = T$) процесса управления размерности m_0 и m_T соответственно

$$M_0(x(0)) = 0, \quad M_T(x(T)) = 0, \quad m_0 + m_T = n$$

В частности, если формально допустить, что одна из величин (m_0 или m_T) равна нулю, то уравнения (1.1) имеют вид задачи Коши, для исследования которой широко применяется метод усреднения [1–6]. Представляется поэтому важным установить возможно более общие условия, налагаемые на функции $X(t, x)$, $M(y, z)$, достаточные для близости решений исходной (1.1) и усредненной краевых задач.

Предположим, что функции X, M удовлетворяют следующим условиям.

1. Функция $X(t, x)$ определена для всех $t \geqslant 0$, измерима по t для фиксированных значений $x \in D_x$, где D_x — открытое связное множество.

2. Известное требование на X существования равномерного относительно $x \in D_x$ среднего по t [1-3] заменим более жестким. А именно, будем считать, что $X(t, x)$ — равномерно квазипериодична по t, т. е. представляет собой конечную сумму периодических по t функций $X^{(i)}(t, x)$ $(i = 1, \ldots, k \geqslant 1)$ с произвольными постоянными периодами Π_i.

3. Функции $X(t, x)$, $M(y, z)$ определены для всех $x, y, z \in D_x$ и равномерно непрерывны по x, y, z.

4. Существуют постоянные $C_X, C_M > 0$, зависящие от D_x, такие, что

$$|X(t, x)| \leqslant C_X, \quad |M(y, z)| \leqslant C_M, \quad t \geqslant 0, \; x, y, z \in D_x \tag{1.2}$$

5. Более того, функции X, M удовлетворяют условиям Липшица по x, $y, z \in D_x$, т. е. существуют постоянные λ_X, λ_M, вообще говоря, зависящие от D_x, такие, что

$$\begin{gathered} |X(t, x') - X(t, x'')| \leqslant \lambda_X |x' - x''|, \quad t \geqslant 0, \quad x', \; x'' \in D_x \\ |M(y', z') - M(y'', z'')| \leqslant \lambda_M (|y' - y''| + |z' - z''|), \\ y', y'', z', z'' \in D_x \end{gathered} \tag{1.3}$$

Далее требования (1.3) усиливаются для упрощения доказательств предположением существования непрерывных и ограниченных частных производных

$$|\partial X / \partial x| \leqslant \lambda_X, \quad |\partial M / \partial y| \leqslant \lambda_M, \quad |\partial M / \partial z| \leqslant \lambda_M \tag{1.4}$$

6. При выполнении указанных требований существует среднее $X_0(x)$ функции $X(t, x)$ по t, равномерное для всех $x \in D_x$

$$X_0(x) = \lim_{S \to \infty} \frac{1}{S} \int_t^{t+S} X(s, x)\, ds = \sum_{i=1}^{k} X_0^{(i)}(x), \quad t \geqslant 0 \tag{1.5}$$

$$X_0^{(i)}(x) = \frac{1}{\Pi_i} \int_t^{t+\Pi_i} X^{(i)}(s, x)\, ds, \quad i = 1, \ldots, k$$

Функция $X_0(x)$ обладает свойствами 3—5. Известно [1-6], что решения задач Коши для некоторой области общих начальных значений исходных и усредненных уравнений обладают свойством ε-близости на всем интервале времени $t \in [0, T]$.

Рассмотрим наряду с исходной краевой задачей (1.1) более простую, усредненную согласно (1.5)

$$d\xi / d\tau = X_0(\xi), \quad M(\xi(0), \xi(\Theta)) = 0, \quad \tau = \varepsilon t \in [0, \Theta] \tag{1.6}$$

Предположим, что некоторое решение $\xi(\tau)$ краевой задачи (1.6), принадлежащее области D_x для всех $\tau \in [0, \Theta]$, существует и единственно.

Исследуем вопрос, при каких дополнительных условиях на функции $X(t, x)$, $M(y, z)$ существует также решение $x(t, \varepsilon)$ исходной краевой задачи (1.1) и какова степень близости его решению $\xi(\varepsilon t)$ для $t \in [0, \Theta\varepsilon^{-1}]$, где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Заметим, что построение функции $\xi(\tau)$ обычно проще, так как порядок интегрируемой системы уравнений (1.6) на единицу меньше, чем (1.1), — отсутствует зависимость от t. Кроме того, система уравнений (1.1), полученная из принципа максимума, гамильтонова [7,10,11]. Как показано в [10,11], усредненная система (1.6) также имеет гамильтонову форму с известным интегралом «энергии». Поэтому порядок системы дифференциальных уравнений можно уменьшить еще на единицу. Численное решение краевой задачи (1.6) удобнее тем, что интегрирование уравнений проводится на относительно коротком интервале медленного времени $\tau \in [0, \Theta]$, $\Theta \sim 1$, причем эти уравнения не содержат быстрых осцилляций.

2. Оценка близости решений исходной и усредненной краевых задач. Для исследования вопроса о существовании решения $x(t, \varepsilon)$ исходной двухточечной задачи (1.1) и близости его решению $\xi(\tau)$, $\tau = \varepsilon t$, усредненной задачи (1.6) предлагается следующий конструктивный подход. В силу предположений 1—5 п. 1 задача Коши

$$x^\cdot = \varepsilon X(t, x),\ x(0) = a \in D_a \subset D_x,\ t \in [0, T] \tag{2.1}$$

имеет решение вида [3,6]

$$x(t, a, \varepsilon) = \varphi(\tau, a) + v(t, a, \varepsilon) \tag{2.2}$$

Здесь D_a — непустое открытое связное множество; $\varphi(\tau, a)$ — непрерывно дифференцируемая по $\tau \in [0, \Theta]$, $a \in D_a$ функция — общее решение задачи Коши, отвечающей (2.1)

$$d\xi / d\tau = X_0(\xi),\ \xi(0) = a \in D_a,\ \xi = \varphi(\tau, a) \tag{2.3}$$

Согласно [3,6], функция v в (2.2) равномерно относительно t, ε ограничена и непрерывна по a

$$|v| \leqslant \varepsilon C_v,\ \lim_{a_k \to a_*} v(t, a_k, \varepsilon) = v(t, a_*, \varepsilon) \tag{2.4}$$

$$t \in [0, T],\ a_k, a_* \in D_a,\ C_v = \text{const} > 0,\ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$$

Определенное согласно (1.6) решение усредненной краевой задачи $\xi(\tau)$ соответствует некоторому значению параметра $a = a^* \in D_a$ в функции $\varphi(\tau, a)$ из (2.3). Это значение a удовлетворяет нелинейной системе

$$M(a, \varphi(\Theta, a)) \equiv M^*(a) = 0 \tag{2.5}$$

Аналогично решение $x(t, \varepsilon)$ исходной задачи (1.1) получается при подстановке в (2.2) значения параметра a, определяемого соотношениями

$$M^*(a) + N(\alpha, \varepsilon) = 0,\ N \equiv M(a, \varphi(\Theta, a) + v(T, a, \varepsilon)) - M^*(a) \tag{2.6}$$

Здесь функция N непрерывна по $a \in D_a$ и в силу (1.4) равномерно ограничена по $a \in D_a$: $|N| \leqslant \varepsilon C_N$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Далее для исследования неявной функции $a(\varepsilon)$ предположим, что определенный выше в (2.5) корень a^* простой, т. е.

$$\det(\partial M^*(a^*) / \partial a) \neq 0 \tag{2.7}$$

Будем искать корень $a \in D_a$ уравнения (2.6) в виде $a = a^* + \alpha$, где неизвестная α непрерывно зависит от ε и обращается в нуль при $\varepsilon = 0$. Она определяется уравнением

$$\alpha = -\left[\frac{\partial M^*(a^*)}{\partial a}\right]^{-1} \frac{\partial M^*(a^*, \varphi(\Theta, a^*))}{\partial \varphi} v(T, a^*, \varepsilon) + A(\alpha, \varepsilon) \tag{2.8}$$

Здесь A — непрерывная функция α, ε при $a^* + \alpha \in D_a$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, обращающаяся тождественно в нуль при $\varepsilon = 0$, $\alpha = 0$, причем $|A| = o(\varepsilon + |\alpha|)$.

Для вычисления α из (2.8) применим метод последовательных приближений, считая A возмущением. Получим равномерно-ограниченную и равностепенно непрерывную при достаточно малых $\varepsilon > 0$ последовательность $\alpha_{j+1} = \alpha_1 + A(\alpha_j, \varepsilon)$, $j \geqslant 1$. Из этой последовательности на основе теоремы Арцела [13] можно выделить равномерно сходящуюся к решению (2.8) подпоследовательность $\alpha_{j_l} \to \alpha^*$, такую, что $a_{j_l} = a^* + \alpha_{j_l} \to a_* \in D_a$, $a_* = a^* + \alpha^*$, $|\alpha^*| \leqslant \varepsilon C_\alpha$.

Таким образом, справедлива

Теорема. При выполнении условий 1—6 п. 1 и (2.5), (2.7) исходная краевая задача (1.1) в рассматриваемой области

$$t \in [0, T], \quad x \in D_x, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0] \tag{2.9}$$

при $\varepsilon_0 > 0$ достаточно малом допускает решение $x(t, \varepsilon)$, лежащее в ε-окрестности порождающего решения $\xi(\tau) = \varphi(\tau, a^*)$ усредненной задачи (1.6)

$$|x(t, \varepsilon) - \xi(\tau)| \leqslant \varepsilon C, \quad C = \text{const} > 0 \tag{2.10}$$

Более того, система (1.1) не допускает в области (2.9) решений, не удовлетворяющих оценке (2.10).

Величина постоянной C в оценке (2.10) может быть эффективно определена в терминах коэффициентов задачи и размеров областей D_x, D_a.

Замечания. 1°. Единственность решения уравнения (2.8), а вместе с тем и краевой задачи (1.1) не гарантируется. Для существования и единственности решения исходной краевой задачи, обращающегося в порождающее $\xi(\tau)$ при $\varepsilon = 0$, достаточно помимо условия (2.7) наложить требование, чтобы функция A в (2.8) удовлетворяла условию Липшица или обладала равномерно-ограниченной производной по α. Очевидно, эти предположения повлекут аналогичные требования гладкости по аргументу a на функцию v из (2.2). Отметим, что равномерная оценка величины $\partial v / \partial a$ для всех $t \in [0, T]$, $a \in D_a$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ может быть получена стандартным способом на основе леммы Гроноулла — Беллмана [1, 6, 13]. Однако для этого потребуются более высокие свойства гладкости функции X по $x \in D_x$, а именно: существование производных $\partial X / \partial x$, равномерно-ограниченных и удовлетворяющих условиям Липшица по $x \in D_x$ с независящими от t, ε постоянными. Для построения решения первого приближения эти свойства гладкости излишни.

2°. Выполнение неравенства (2.7) существенно, так как в противном случае возможно ветвление корня a^* уравнения (2.6) при $\varepsilon > 0$ на величины порядка дробной степени ε [14]. Отличие порождающего решения от точного в общем случае может иметь порядок низшей ненулевой степени малого параметра. В этом критическом случае требуется дополнительное исследование.

3°. Отметим, что в частном случае терминальной задачи управления (критерий качества $\Phi(z(T)) \to \min$) краевые условия для вектора $x = (z, p)$, где z — фазовый, а p — сопряженный векторы, имеют вид [11 12]: $z(0) = z^\circ$, $p(T) = -\Phi'(z(T))$. Неравенство (2.7) эквивалентно требованию существования общего решения $\xi = (\zeta, \eta)$ усредненной системы, такого, что $\zeta(0, a, b) = a$, $\eta(\Theta, a, b) = b$, где параметр a принадлежит окрестности точки z°, а b — точки $b^*(z^\circ)$, являющейся простым корнем уравнения $\Phi'(\zeta(\Theta, z^\circ, b)) = -b$.

4°. Сформулированная теорема и приведенные выше замечания справедливы для каждого допустимого корня $a^* \in D_a$ уравнения (2.5). Выбор нужного значения

$a(\varepsilon) = a^* + \alpha(\varepsilon)$ проводится из дополнительных условий. Для задачи оптимального управления корень $a(\varepsilon)$ выбирается из условия минимума функционала, вычисленного с достаточной степенью точности по ε. В рассмотренной выше постановке функционал определяется с допустимой погрешностью $O(\varepsilon)$.

Таким образом, приведенное в теореме утверждение обосновывает применение метода усреднения к задачам оптимального управления.

5°. Отметим еще, что к уравнениям вида (1.1) приводится ряд более общих систем с вращающимися фазами

$$a^\cdot = \varepsilon A(\tau, a, \psi),\ a = (a_1, \ldots, a_n),\ \tau = \varepsilon t,\ t \in [0, T] \tag{2.11}$$

$$\psi^\cdot = \nu(\tau) + \varepsilon\Psi(\tau, a, \psi),\ \psi = (\psi_1, \ldots, \psi_r),\ \nu_j(\tau) \geqslant \nu_0 > 0$$

Действительно, если $r = 1$, а функции A и Ψ квазипериодичны по ψ аналогично X, то введением новой независимой переменной θ и медленной переменной φ по формулам

$$\theta = \int_0^t \nu(\varepsilon s)\, ds, \quad \psi = \theta + \varphi, \quad \varepsilon\theta = \int_0^\tau \nu(\sigma)\, d\sigma \tag{2.12}$$

система (2.11) приводится к виду (1.1).

При $r > 1$ и дополнительном требовании $\nu_1(\tau) \equiv \ldots \equiv \nu_r(\tau)$ аналогичной (2.12) векторной заменой система (2.11) также приводится к форме (1.1). Если же $\nu_j = \text{const} \geqslant 0$ (ν_j — произвольны), то при условии разложимости функций A и Ψ в конечные тригонометрические суммы для системы (2.11) возможно приведение к стандартной форме (1.1).

3. Приложения к задачам управления. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления движением колебательной системы:

$$q^\cdot = Aq + F(t) + \varepsilon\,[G(t, q)\,u + L(t, q)],\quad q(0) = q^\circ \tag{3.1}$$

$$S(q)|_T = 0, \quad J = \frac{\varepsilon}{2}\int_0^T u^2\, dt \to \min, \quad 0 \leqslant t \leqslant T = \Theta\varepsilon^{-1}$$

Здесь q — n-вектор обобщенных фазовых координат, u — m-вектор управляющих функций, A — постоянная кососимметрическая матрица, S — заданная функция размерности $r \leqslant n$. Предполагается, что F, G, L — квазипериодические функции t. Они имеют вид тригонометрических многочленов с ограниченным набором частот $\{\Omega\}$, а коэффициенты представляют собой полиномы относительно q, степень которых не превосходит некоторого $k \geqslant 0$.

Пусть все характеристические показатели — собственные значения матрицы A — имеют нулевые вещественные части, а число элементарных делителей равно n — размерности вектора q. Тогда элементы фундаментальной матрицы $Q(t)$ $(Q(0) = I)$ и ей обратной $Q^{-1}(t) = Q(-t)$ являются квазипериодическими функциями t с частотным базисом $\{\nu\}$, а определитель $|Q(t)| = 1$. Среди указанных частот могут быть и нулевые. Предположим, что невозмущенная система (3.1) (при $\varepsilon = 0$) не имеет резонансных решений, т. е. ее частное решение q^* — ограниченная квазипериодическая функция t с набором частот $\{\Omega - \nu, \Omega + \nu\}$

$$q^*(t) = \int_0^t Q(t-s)\, F(s)\, ds \tag{3.2}$$

Совершим в системе (3.1) замену к оскулирующей переменной x при помощи выражения (3.2)

$$q = q^* (t) + Q (t) x \tag{3.3}$$

Дифференцируя подстановку (3.3) в силу системы (3.1), получим уравнение управляемого движения для медленной переменной x

$$x^{\cdot} = \varepsilon [g (t, x) u + h (t, x)], \ x (0) = q^{\circ} \tag{3.4}$$

$$g (t, x) \equiv Q^{-1} (t) G (t, q^* + Qx), \ h (t, x) \equiv Q^{-1} (t) L (t, q^* + Qx)$$

Здесь функции g, h квазипериодичны по t с частотами вида $\{\Omega, \Omega - \nu, \Omega + \nu\}$ и их комбинациями с целочисленными множителями, величины которых не превосходят k. Коэффициенты тригонометрических многочленов представляют полиномы от x степени не выше k. Соответствующие граничные условия на вектор $x (T)$, согласно (3.3), принимают вид $M (x (T)) = 0$, где $M (x) = S (q^* + Qx)$. Выражение (3.1) для функционала J остается прежним.

Применим для решения полученной задачи необходимые условия принципа максимума, согласно которым оптимальное управление $u (t)$ и фазовая траектория $x (t)$ удовлетворяют соотношениям

$$H = -(\varepsilon/2) \ u^2 + \varepsilon (p'gu + p'h) \to \max, \ | u | < \infty \tag{3.5}$$

$$u = g' (t, x) p, \ g' = (g_{ij})', \quad i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, m$$

$$x^{\cdot} = \varepsilon [gg'p + h (t, x)], \ x (0) = q^{\circ}, \ M (x (T)) = 0$$

$$p^{\cdot} = -\varepsilon \left(p' \frac{\partial g}{\partial x} g'p - p' \frac{\partial h}{\partial x}\right), \quad p (T) = \left(\lambda' \frac{\partial M}{\partial x}\right)_T$$

Здесь H — функция Гамильтона задачи, p — сопряженный n-вектор, λ — вектор множителей Лагранжа размерности $r \leqslant n$. Предположим, что матрица $(\partial M / \partial x)_T$ имеет максимальный ранг (равный r) и найдем из каких-либо r линейных уравнений, например первых r, вектор $\lambda : \lambda^* = p^{(r)} (T) [(\partial M / \partial x)_T^{(r)}]^{-1}$ и подставим его в остальные $(n - r)$ условий трансверсальности для $p (T)$. Получим $(n - r)$ соотношений, связывающих $x (T)$ и $p (T)$: $p^{n-r} (T) = \lambda^* (\partial M / \partial x)_T^{(n-r)}$. В частности, при $n = r$ эти соотношения отсутствуют; вектор λ при этом определять не следует.

В результате получена краевая задача типа (1.1) для гамильтоновой системы стандартного вида. Она может быть исследована при помощи методики пп. 1, 2, так как имеет форму тригонометрического многочлена с конечным набором периодов. Как отмечалось, применение метода усреднения к системе (3.5) удобно тем, что усредненная система остается гамильтоновой и для нее в первом приближении по ε сохраняется интеграл энергии

$$\langle H \rangle = (\varepsilon / 2) \ p'\Gamma p + \varepsilon p'h = \text{const}, \ \Gamma \equiv \langle g'g \rangle = \Gamma'$$

Здесь угловые скобки означают усреднение соответствующих выражений по явно входящему времени t. Средние существуют и являются гладкими функциями медленных переменных x, p.

Рассмотрим задачу в частном случае, когда усредненная система (3.5) линейна по x, p, что имеет место при

$$g = g(t), \quad h = h^{(0)}(t) + \Lambda(t)\, x + h^{(2)}(t, x), \quad \langle h^{(2)} \rangle \equiv 0$$

Тогда усредненные уравнения имеют постоянные коэффициенты. Искомое решение двухточечной задачи сводится к алгебраическим и конечным уравнениям. Пусть, например, требуется перевести фазовый вектор исходной системы (3.1) в конечное состояние $q(T) = q_T$, где q_T — заданный вектор, т. е. $S = q - q_T$. Согласно (3.3), краевые условия из (3.5) примут вид: $x(0) = q^\circ$, $x(T) = x_T$, где $x_T = Q^{-1}(T)\,[q_T - q^*(T)]$ — известный вектор. Предположим еще, что фундаментальная матрица $W(\tau)$ ($\tau = \varepsilon t$) линейной системы с постоянными коэффициентами $w^{\boldsymbol{\cdot}} = \varepsilon\Lambda_0 w$, где $\Lambda_0 = \langle\Lambda\rangle$, построена. Тогда усредненные переменные $\xi = \langle x\rangle$, $\eta = \langle p\rangle$ можно представить в форме

$$\xi(\tau) = W(\tau)\,[a + R(\tau)b + Z(\tau)\,h_0], \qquad \eta(\tau) = W'(-\tau)b \tag{3.6}$$

$$R(\tau) = \int_0^\tau W(-s)\,\Gamma(s)\,W'(s)\,ds, \quad Z(\tau) = \int_0^\tau W(-s)\,ds, \quad h_0 = \langle h^{(0)}\rangle$$

Согласно записи (3.6), n-вектор a определяется вполне однозначно, а постоянный n-вектор b определяется также однозначно из краевых условий, если матрица $R(\Theta)$ неособенна; в этом случае находим

$$a = q^\circ, \quad b = R^{-1}(\Theta)\,[W^{-1}(\Theta)x_T - q^\circ - Z(\Theta)\,h_0] \tag{3.7}$$

Таким образом, при $|R(\Theta)| \neq 0$ условие (2.7) выполнено, т. е. краевая задача допускает решение $x(t, \varepsilon)$, $p(t, \varepsilon)$, лежащее в ε-окрестности построенного единственного решения (3.6), (3.7) усредненной системы для всех $t \in [0, T]$. Подставляя приближенное решение $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$ в выражение (3.5) для управления u находим представление в форме программы. Заменяя τ на 0, Θ на $\Theta - \tau$ и q^0 на q, получим приближенное оптимальное управление в форме синтеза. Минимальное значение функционала J с погрешностью порядка ε согласно (3.1), (3.5), (3.6) равно

$$J_0 = \frac{1}{2}\int_0^\Theta \eta'(\tau)\,\Gamma(\tau)\,\eta(\tau)\,d\tau$$

Приведенные результаты могут быть обобщены для случая систем (3.1) с медленно изменяющимися параметрами.

Отметим, что к виду (1.1) приводятся в ряде случаев (см. замечание 5° п. 2) механические системы с переменными параметрами, описываемые уравнениями

$$q^{\boldsymbol{\cdot\cdot}} + G(\tau)\,q^{\boldsymbol{\cdot}} + C(\tau)\,q = F(\tau, t, y) + \varepsilon f(\tau, t, q, q^{\boldsymbol{\cdot}}, y, u) \tag{3.8}$$

$$y^{\boldsymbol{\cdot}} = \varepsilon Y(\tau, t, q, q^{\boldsymbol{\cdot}}, y, u), \quad g(0) = q^\circ, \quad q^{\boldsymbol{\cdot}}(0) = q^{\boldsymbol{\cdot}\circ}, \quad y(0) = y^\circ$$

Здесь G — матрица гироскопических сил, $C > 0$ — матрица жесткости, y — медленный вектор управляемых параметров системы; F, f, Y — квазипериодические функции t типа X в (1.1). Предполагается, что при $\varepsilon = 0$, τ, $y = \text{const}$ вектор $q = q(\tau, t, a, b, c)$ — квазипериодическая функция t для $t \geqslant 0$ и значений a, b, c из некоторой выпуклой окрестности точки q°, $q^{\boldsymbol{\cdot}\circ}$, y°.

Частным случаем уравнений (3.8) описываются в квазилинейном приближении одночастотные механические колебательные системы. К примерам последних можно отнести системы типа линейных осцилляторов (в том числе многомерных — плоских или пространственных) с управляемым по скорости перемещения положением равновесия. Уравнениями квазилинейных осцилляторов описываются плоские или пространственные колебания маятника с изменяемой точкой подвеса и медленно изменяющейся длиной и др. В рассматриваемых случаях одночастотных колебаний допускается произвольная зависимость возмущений от аргументов, так как после приведения уравнений к оскулирующим переменным типа x функция X в (1.1) будет 2π-периодической по независимой переменной θ (см. (2.12)).

Поступила 15 X 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
2. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев, «Наукова думка», 1971.
3. *Волосов В. М.* Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений. Успехи матем. наук, 1962, т. 17, вып. 6.
4. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М. «Наука», 1969.
5. *Розо М.* Нелинейные колебания и теория устойчивости. М., «Наука», 1971.
6. *Besjes J. G.* On the asymptotic methods for non — linear differential equations. J. Mechanique, 1969, vol. 8, No. 3.
7. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1969.
8. *Акилов У. А., Филатов А. Н.* О принципе усреднения в математической теории оптимальных процессов. Докл. АН УзССР, 1966, № 7.
9. *Евтушенко Ю. Г.* Приближенный расчет задач оптимального управления. ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
10. *Акуленко Л. Д.* Исследование некоторых оптимальных систем методом усреднения. ПММ, 1974, т. 38, вып. 3.
11. *Акуленко Л. Д.* Приближенное решение нелинейных задач оптимального управления колебательными процессами методом канонического разделения движений. ПММ, 1976, т. 40, вып. 6.
12. *Плотников В. А., Зверкова Т. С.* Усреднение краевых задач в терминальных задачах оптимального управления. Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, № 8.
13. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Мир», 1970.
14. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., «Наука», 1969.